

Программа учебной дисциплины «Случайные процессы»

Утверждена
Академическим советом ООП
Протокол № от « » 2019 г.

Автор	Панов Владимир Александрович
Число кредитов	5
Контактная работа (час.)	58
Самостоятельная работа (час.)	132
Курс	3,4
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Цель освоения дисциплины «Случайные процессы» - вооружить студентов теоретическими знаниями и практическими навыками, необходимыми для применения теории случайных процессов при исследовании сложных динамических систем в экономике.

В результате освоения дисциплины студент будет:

знать:

-знать основные типы случайных процессов (процесс восстановления, пуассоновский процесс, Броуновское движение, гауссовские процессы, процессы Леви) и свойства этих процессов;

уметь:

-уметь выбирать модель и инструментарий теории случайных процессов, адекватные экономической задаче;
-уметь верно интерпретировать результаты, полученные при анализе экономических задач методами теории случайных процессов.

владеть:

-такими понятиями как стационарность, эргодичность, непрерывность случайных процессов
- навыками работы с элементами стохастического анализа, такими как стохастическое интегрирование и решение стохастических дифференциальных уравнений.

Изучение дисциплины «Случайные процессы» базируется на следующих дисциплинах:

Предполагается, что слушатели знакомы с основами теории вероятностей в объёме стандартного курса. Знание основ математической статистики не требуется, однако упрощает понимание данной дисциплины.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

Курс даёт теоретическую основу для изучения других вероятностных дисциплин, таких как финансовая математика, стохастическое моделирование и теория скачкообразных процессов.

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

III.

Тема (раздел дисциплины)	Объем в часа	Планируемые результаты обучения (ПРО), подлежащие контролю	Формы контроля
	лк		
	см		
	опл/ср		
Тема 1. Основные понятия теории случайных процессов.	лк 4	Понимает определение случайного процесса, строит траектории процессов.	Домашняя работа
	Ср 10		
Тема 2. Процессы восстановления	лк 4	Вычисляет математическое ожидание считающего процесса по распределению приращений процесса восстановления	Домашняя работа
	Ср 10		
Тема 3. Однородные и неоднородные процессы Пуассона, составные пуассоновские процессы.	лк 8	Понимание основных свойств пуассоновских процессов	Домашняя работа
	Ср 20		
Тема 4. Цепи Маркова.	Лк 12	Определяет тип цепи Маркова, даёт классификацию состояний цепи.	Письменная работа 120 минут Домашняя работа
	Ср 25		
Тема 5. Гауссовские процессы	Лк 4	Понимание основные понятия теории гауссовских процессов	Домашняя работа
	Ср 10		
Тема 6. Броуновское движение	Лк 4	Понимание основных свойств Броуновского движения.	Домашняя работа
	Ср 10		
Тема 7. Стационарность, непрерывность и эргодичность случайных процессов.	Лк 8	Понимание сути различных свойств случайных процессов.	Домашняя работа
	Ср 20		
Тема 8. Стохастическое интегрирование. Формула Ито.	Лк 14	Умение пользоваться формулой Ито для вычисления стохастических интегралов.	Домашняя работа
	Ср 27		
Часов по видам учебных занятий:	Лк 58		
	Ср 132		

Итого часов:	190
---------------------	-----

Тема 1. Основные понятия теории случайных процессов.

В этом разделе будет дано определение случайного процесса, конечномерных распределений, траекторий случайных процессов.

Тема 2. Процессы восстановления.

Будет дано определение процессов восстановления, считающих процессов. Будет выведено уравнение восстановления и показан метод вычисления математического ожидания считающего процесса по распределению интервала времени между моментами восстановления.

Тема 3. Однородные и неоднородные процессы Пуассона, составные пуассоновские процессы.

Будут даны различные определения однородного процесса Пуассона, показана их эквивалентность. Особое внимание уделено применению составных процессов Пуассона в страховании.

Тема 4. Цепи Маркова.

Будет дана классификация состояний конечной цепи Маркова, сформулирована и доказана эргодическая теорема.

Тема 5. Гауссовские процессы

В данном разделе подробно обсуждается понятие гауссовского вектора и гауссовского процесса.

Тема 6. Броуновское движение

Даются несколько эквивалентных определений броуновского движения, доказываются их эквивалентность. Доказываются свойства Броуновского движения - конечность квадратической вариации, недифференцируемость траекторий, наличие непрерывной модификации.

Тема 7. Стационарность, непрерывность и эргодичность случайных процессов.

Будут даны определения стационарных в широком и узком смыслах процессах. Будет сформулирован критерий Колмогорова о непрерывных модификациях.

Тема 8. Стохастическое интегрирование. Формула Ито.

В данном разделе рассматривается 4 вида стохастических интегралов. Доказывается формула Ито и показывается применение этой формулы для стохастического моделирования и подсчёта стохастических интегралов.

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Для контроля знаний студентов предусмотрены следующие формы и методы отчётности:

1. одна промежуточная письменная контрольная работа;
2. устное общение в процессе чтения лекций;
3. домашние работы (после каждой лекции);
4. итоговая контрольная работа.

Итоговая оценка вычисляется по следующей формуле:

$$\text{[Итоговая оценка]} = 0.6 * \text{[Оценка за итоговую к/р]} + 0.2 * \text{[Оценка за промежуточную к/р]} + 0.2 * \text{[Оценка за работу в течение семестра]}.$$

При выставлении оценки за работу в течение семестра учитывается активность на занятиях и качество выполнения домашних работ. В случае пропусков занятий в количестве 6 и более пар итоговая оценка уменьшается на 20%.

Обе передачи проходят в письменной форме.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Оценочные средства для текущего контроля студента

1. (4 балла) В русле реки лежит камень. В случайные моменты времени τ_1, τ_2, \dots камень передвигается на случайные расстояния Y_1, Y_2, \dots . Известно, что величины $\tau_1, (\tau_2 - \tau_1), (\tau_3 - \tau_2), \dots$ независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ , а величины Y_1, Y_2, \dots независимы и имеют Гамма-распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\},$$

где $\alpha > 0, \beta > 0, \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$. Предполагается, что случайные величины (τ_1, τ_2, \dots) независимы от (Y_1, Y_2, \dots) .

- (i) Какой тип имеет процесс X_t , представляющий собой суммарное расстояние, на которое передвинулся камень за время t ?
- (ii) Найдите $\mathbb{E}[X_t], \mathbb{D}[X_t], \mathbb{P}\{X_t = 0\}$, а также преобразование Лапласа процесса X_t .

Подсказка: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ для любого $x > 0$.

2. (3 балла.) Частица блуждает по прямой по целочисленным точкам $0, 1, \dots, n$. Из любой внутренней точки (то есть точки $1, 2, \dots, (n-1)$) частица передвигается с вероятностью $p \in (0, 1)$ на один шаг вправо и с вероятностью $(1-p)$ на один шаг влево. Кроме того, попадая в точки 0 и n , частица остаётся в них навсегда.
- (i) Выпишите матрицу переходных вероятностей за 1 шаг.
 - (ii) Найдите классы эквивалентности этой цепи Маркова и определите типы состояний (существенные / несущественные, периодические / непериодические, возвратные / невозвратные).
 - (iii) Найдите **все** стационарные распределения.

Оценочные средства для промежуточной аттестации

1. (3 балла.) Рассмотрим случайный процесс $X_t = W_t^2$, где W_t - Броуновское движение.

- (i) Выясните, является ли процесс X_t гауссовским.
- (ii) Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса X_t .
- (iii) Выясните, является ли процесс X_t стационарным (в узком и широком смысле).

2. (4 балла.) Вычислите дисперсии следующих интегралов:

(i) $\int_0^1 t^2 dW_t$, (ii) $\int_0^1 W_t^2 dt$, (iii) $\int_0^1 W_t^2 dW_t$.

3. (3 балла.) Про процесс Y_t известно, что

$$\mathbb{E}[Y_t] = \alpha + \beta t, \quad \text{cov}(Y_t, Y_{t+h}) = e^{-\lambda h}, \quad \forall t \geq 0, h \geq 0,$$

где $\lambda > 0$, α, β - некоторые константы. Определите, является ли процесс

$$X_t := Y_{t+1} - Y_t$$

- (i) стационарным в широком смысле;
- (ii) эргодическим.

Подсказка. При решении задач 1 и 2 может быть полезна формула для моментов нормального распределения:

$$\mathbb{E}[\xi^n] = \begin{cases} 0, & n - \text{нечётное}, \\ (n-1)!!, & n - \text{чётное}, \end{cases}$$

где $\xi \sim N(0, 1)$, и двойной факториал обозначает произведение всех нечётных чисел от 1 до n . В частности,

$$\mathbb{E}[\xi^4] = 3, \quad \mathbb{E}[\xi^6] = 15.$$

V. РЕСУРСЫ

5.1 Рекомендуемая основная литература

п/п	Наименование
1	Розанов Ю. А. «Случайные процессы : краткий курс : учеб. пособие для вузов», М., «Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.», 1979

5.2 Дополнительная литература

п/п	Наименование
1	1. Korolov L. and Sinai, Y. Theory of probability and random processes.[Электронный ресурс] Korolov L. and Sinai, Y. Berlin ; London: Universitext - Springer-Verlag, 2007. – 353 p. – 9783540254843. — Режим доступа: http://katalog.nukat.edu.pl/lib/item?id=chamo:999497&theme=nukat

5.3 Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS или Microsoft Windows 10 или Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>

5.4 Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
<i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i>		
1.	Консультант Плюс	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Электронно-библиотечная система Юрайт	URL: https://biblio-online.ru/
<i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i>		
1.	Открытое образование	URL: https://openedu.ru/

5.5 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для лабораторных и самостоятельных занятий по дисциплине оснащены ПЭВМ с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ, мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

VI. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.