

**Программа учебной дисциплины
«Симметрии, представления и комплексный анализ»**

Утверждена
Академическим советом ОП
Протокол № от __.__.20__

Разработчик	Новикова Елена Михайловна, профессор, департамент прикладной математики МИЭМ
Число кредитов	4
Контактная работа (час.)	60
Самостоятельная работа (час.)	92
Курс, Образовательная программа	1 курс, Математические методы моделирования и компьютерные технологии
Формат изучения дисциплины	С использованием онлайн курса/ без использования онлайн курса/иное

1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

Целью освоения дисциплины «Симметрии, представления и комплексный анализ» является ознакомление студентов с:

- алгебрами симметрий, в том числе, нелиевского типа, возникающими в широко известных физических моделях,
- методами исследования этих алгебр (построение неприводимых представлений и когерентных состояний для квантовых алгебр; анализ симплектических листов для соответствующих пуассоновых алгебр),
- методом решения спектральных задач с помощью когерентного преобразования (т.е. интегрального преобразования, ядром которого является когерентное состояние).

Настоящая дисциплина является адаптационной.

2. Содержание учебной дисциплины

Часов по видам учебных занятий:	лекции - 24
	семинары - 36
	самостоятельная работа - 92
Итого часов:	152

Формы учебных занятий:

лк – лекции в аудитории;

см - семинары/ практические занятия/ лабораторные работы в аудитории;

онl – лекции или иные виды работы студента с помощью онлайн-курса;

ср – самостоятельная работа студента.

Содержание разделов дисциплины:

Раздел 1. Алгебры симметрий (лк – 4 часа, см – 6 часов, ср – 18 часов)

Тема 1. Одномерный гармонический осциллятор и алгебра Гейзенберга. Двумерный изотропный гармонический осциллятор и алгебра $su(2)$. Сингулярный осциллятор и алгебра $su(1,1)$.

Тема 2. Алгебра $SO(4)$ для четырехмерного изотропного гармонического осциллятора и для движения частицы в кулоновском поле. Регуляризация Кустаанхеймо.

Тема 3. Нелиевские подалгебры симметрий в задачах квантовой механики. Структура «рождение-уничтожение». Вакуумный вектор. Операторы Казимира. Эффект Зеемана и алгебра с квадратичными коммутационными соотношениями.

Тема 4. Резонансные алгебры. Алгебра резонансного эффекта Зеемана-Штарка. Атом-монополю в магнитном поле (модель МиК-Кеплера).

Раздел 2. Пуассонова структура и неприводимые представления динамической алгебры (лк – 12 часов, см – 18 часов, ср – 46 часов)

Тема 1. Основные понятия: представление алгебры в гильбертовом пространстве; векторная и операторная неприводимость и их связь; размерность представления; эквивалентные представления; когерентные состояния; воспроизводящее ядро; воспроизводящая мера.

Тема 2. Метод построения неприводимых представлений алгебр (в том числе, нелиевских) со структурой «рождение-уничтожение». Конструкция когерентных состояний.

Тема 3. Соответствие неприводимых представлений квантовой алгебры и симплектических листов пуассоновой алгебры.

Тема 4. Построение неприводимых представлений и когерентных состояний для примеров из раздела 1.

Раздел 3. Когерентное преобразование (лк – 8 часов, см – 12 часов, ср – 28 часов)

Тема 1. Когерентное преобразование спектральной задачи. Общая схема. Точное решение задачи и решение в квазиклассическом приближении.

Тема 2. Когерентное преобразование усредненной спектральной задачи для двумерного изотропного ангармонического осциллятора.

Тема 3. Когерентное преобразование усредненной спектральной задачи для эффекта Зеемана.

Тема 4. Решение усредненной спектральной задачи для эффекта Зеемана в квазиклассическом приближении.

3. Оценивание

Самостоятельное выполнение студентами домашних заданий к семинарам учитывается в рабочей ведомости и составляет оценку $O_{дом. задания}$.

Работа на семинарах также отмечается в рабочей ведомости; за нее выставляется оценка $O_{аудиторная}$.

Из этих двух оценок складывается накопленная оценка:

$$O_{накопленная} = 0,5 \cdot (O_{дом. задания} + O_{аудиторная}).$$

За экзамен выставляется оценка $O_{экзамен}$.

Блокирующие элементы не предусмотрены

Итоговая оценка по курсу выставляется по следующей формуле:

$$O_{итоговая} = 0,3 \cdot O_{накопленная} + 0,7 \cdot O_{экзамен}.$$

Способ округления: арифметический.

4. Примеры оценочных средств

Пример домашнего задания

1. Вычислить попарные коммутаторы операторов

$$\hat{A}_1 = \frac{\hbar}{2} (2b\bar{z} + \bar{z}^2 \frac{d}{d\bar{z}} + \frac{d}{d\bar{z}}),$$

$$\hat{A}_2 = \frac{i\hbar}{2} (2b\bar{z} + \bar{z}^2 \frac{d}{d\bar{z}} - \frac{d}{d\bar{z}}),$$

$$\hat{A}_3 = \hbar (b + \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}}),$$

действующих в пространстве антиголоморфных функций $\varphi = \varphi(\bar{z})$, по переменной \bar{z} . Здесь константа $b > \frac{1}{2}$.

2. Доказать, что $\hat{K} = \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 - \hat{A}_3^2$ является оператором Казимира в алгебре из задачи 1.

3. Задать в пространстве антиголоморфных функций скалярное произведение так, чтобы операторы $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ оказались эрмитовыми.

Указание: ввести операторы «рождение» $\hat{A}_+ = \hat{A}_1 - i\hat{A}_2$ и «уничтожение» $\hat{A}_- = \hat{A}_1 + i\hat{A}_2$.

4. Найти вакуумный вектор, подчиненный условию $\hat{A}_-\chi_0 = 0$.

5. Вычислить значение оператора Казимира в данном представлении.

6*. Записать скалярное произведение из п. 3 в интегральной форме.

Указание: чтобы найти область интегрирования на комплексной плоскости, необходимо вычислить радиус сходимости воспроизводящего ядра $K(z, \bar{z})$.

Блокирующие элементы не предусмотрены.

5. Ресурсы

5.1. Рекомендуемая основная литература

№п/п	Наименование
1	А.А. Кириллов, Элементы теории представлений / М.: Наука, 1972.
2	А.М. Переломов, Обобщенные когерентные состояния и их применение / М.: Наука, 1987.
3	М.В. Карасев, В.П. Маслов, Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование / М.: 1991.

5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

№п/п	Наименование
1	Ф.А. Березин, Метод вторичного квантования / М.: Наука, 1986.
2	M.V. Karasev (ed.), Coherent transform, quantization and Poisson geometry / Advances Math.Sci., 40, AMS, 1998.
3	M.V. Karasev (ed.), Asymptotic methods for wave and quantum problems / Advances Math.Sci., 53, AMS, 2003.

4	M.V. Karasev (ed.), Quantum algebra and Poisson geometry in mathematical physics / Advances Math.Sci., 57, AMS, 2005.
5	А.И. Базь, Я.Б. Зельдович, А.М. Переломов, Рассеяние, реакции и распады в нерелятивист-ской квантовой механике / М.: Наука, 1981

5.3. Программное обеспечение

Не предусмотрено.

5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

Не используются.

5.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Не требуется.