

## Программа учебной дисциплины «Численные методы»

Утверждена

Академическим советом ОП<sup>1</sup>

Протокол № от \_\_. \_\_. 20\_\_

Разработчик	Е.А. Буровский, PhD, доцент ДПМ МИЭМ НИУ ВШЭ Ю.А. Будков, к.х.н., д.ф.-м.н., доцент ДПМ МИЭМ НИУ ВШЭ
Число кредитов	<b>6</b> = 4 (3-й курс) + 2 (4-й курс)
Контактная работа (час.)	<b>108</b> = 80 (3-й курс) + 28 (4-й курс)
Самостоятельная работа (час.)	<b>120</b> = 72 (3-й курс) + 48 (4-й курс)
Курс, Образовательная программа	3, 4 курс, ОП «Прикладная математика»
Формат изучения дисциплины	С использованием онлайн курса

### 1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

Целями освоения дисциплины «Численные методы» являются:

- Освоение базовых знаний о численных методах, используемых в современной прикладной математике.
- Приобретение навыков работы в математических пакетах и с библиотеками математического программного обеспечения.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать математические основы численных методов, применяемых в современных прикладных и фундаментальных исследованиях
- Уметь правильно выбирать тот или иной численный метод для решения конкретных математических задач
- Иметь навыки работы со стандартными математическими пакетами

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

Математический анализ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Обыкновенные дифференциальные уравнения

---

<sup>1</sup> Для ПУД из общеуниверситетского пула – Руководитель Департамента.

Дисциплина изучается в формате смешанного обучения blended learning, с использованием онлайн-курса Introduction to Numerical Analysis на платформе Coursera, <https://www.coursera.org/learn/intro-to-numerical-analysis/>

## 2. Содержание учебной дисциплины

### 3 курс

#### **Тема 1. Решение нелинейных уравнений.**

Постановка задачи приближенного решения нелинейных уравнений. Локализация корней. Метод бисекции, метод простой итерации, метод Ньютона: алгоритмы, теоремы сходимости. Априорные и апостериорные оценки погрешности. Приведение к виду, удобному для итераций. Влияние погрешности вычислений. Вычисление кратных корней.

#### **Тема 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений прямыми методами.**

Нормы векторов и матриц. Обусловленность задачи решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса и его модификации. LU-разложение матрицы. Задачи, решаемые на основе LU-разложения. Трудоемкость метода. Метод Холецкого. Метод прогонки. Алгоритм и трудоемкость метода.

#### **Тема 3. Решение систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами.**

Метод простой итерации и метод Зейделя: основные алгоритмы и теоремы сходимости. Каноническая форма записи итерационных методов. Итерационный метод с оптимальным параметром.

#### **Тема 4. Приближение функций в смысле наименьших квадратов.**

Постановки задач приближения функций. Метод наименьших квадратов: вывод нормальной системы уравнений, ее разрешимость. Выбор степени аппроксимирующего многочлена.

#### **Тема 5. Интерполяция функций.**

Полиномиальная интерполяция. Существование и единственность интерполяционного многочлена. Многочлен Лагранжа. Погрешность интерполяции. Интерполяция с кратными узлами. Конечные разности. Интерполяционный многочлен Лагранжа и Ньютона на равномерной сетке. Разделенные разности. Интерполяционный многочлен Ньютона. Кусочно-полиномиальная интерполяция.

#### **Тема 6. Сплаины.**

Определение сплайна. Многочлен Эрмита. Построение кубических сплайнов дефектов один и два. Различные виды граничных условий.

#### **Тема 7. Решение систем нелинейных уравнений.**

Постановка задачи отыскания решения систем нелинейных уравнений, корректность и обусловленность задачи. Метод простой итерации: сходимость метода, модификации. Проблема выбора начального приближения. Метод Ньютона. Теорема о квадратичной

сходимости. Трудности использования метода Ньютона. Влияние вычислительной погрешности. Другие подходы к решению задач по решению систем нелинейных уравнений.

#### **Тема 8. Минимизация функций.**

Постановка задачи одномерной минимизации. Основные этапы решения. Решение задачи одномерной минимизации методом деления отрезка пополам. Алгоритм и оценка погрешности. Решение задачи одномерной минимизации методом золотого сечения. Алгоритм и оценка погрешности. Связь с задачей отыскания корней нелинейного уравнения. Метод Ньютона для решения задачи минимизации функций.

#### **Тема 9. Численное интегрирование.**

Постановка задачи численного интегрирования. Вывод формул прямоугольников, трапеций и Симпсона и оценки погрешностей.

#### **Тема 10. Численное дифференцирование.**

Постановка задачи численного дифференцирования. Вычисление левой, правой и центральной производной (первого порядка). Вторая разностная производная. Их оценки погрешности.

### **4 курс.**

#### **Тема 1. Численное решение задачи Коши. Основные понятия и определения. Метод Эйлера.**

Постановка задачи Коши и ее геометрический смысл. Свойства задачи Коши: разрешимость, единственность, устойчивость. Дискретизация задачи Коши. Метод разложения в ряд Тейлора. Метод Эйлера. Понятие о локальной и глобальной погрешности. Оценка погрешности. Понятие одношаговых и многошаговых численных методов, устойчивость численных методов. Аппроксимация и сходимость. Устойчивость метода Эйлера на конечном отрезке. Модификации метода Эйлера. Методы Рунге Кутты. Правило Рунге оценки погрешностей. Организация программ с автоматическим выбором шага. Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений и уравнений  $m$ -го порядка.

#### **Тема 2. Численное решение задачи Коши. Устойчивость.**

Понятие о жестких задачах. Неявный метод Эйлера. Методы Адамса. Методы прогноза и коррекции. Устойчивость численных методов. Исследование устойчивости для систем линейных дифференциальных уравнений.

#### **Тема 3. Численное решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2 порядка.**

Постановка краевой задачи. Дискретизация задачи. Сетка, сеточные функции. Построение разностной схемы. Разрешимость. Использование метода прогонки. Оценка погрешности сеточного решения. Устойчивость, аппроксимация, сходимость. Основные свойства: разрешимость, принцип максимума, устойчивость. Проблема аппроксимации краевых условий. Метод пристрелки.

#### **Тема 4. Основные понятия теории разностных схем.**

Основные понятия теории разностных схем: аппроксимация, устойчивость, сходимость. Корректность разностной схемы. Связь между устойчивостью и сходимостью.

### **Тема 5. Разностные схемы для одномерного уравнения теплопроводности.**

Постановка начально-краевой задачи. Построение явной и неявных разностных схем для одномерной задачи теплопроводности. Устойчивость. Исследование сходимости разностных схем. Численная реализация разностных схем для уравнения теплопроводности.

### **Тема 6. Разностные схемы для одномерного волнового уравнения.**

Решение задачи о колебаниях струны. Построение разностных схем и исследование сходимости. Численная реализация разностных схем для волнового уравнения.

### **Тема 7. Вариационные и проекционные методы.**

Понятие о вариационных и проекционно-разностных методах решения краевых задач. Методы Ритца и Галеркина. Понятие о методе конечных элементов. Применение методов для многомерных задач.

## **3. Оценивание**

Описываются особенности организации текущего контроля и промежуточной аттестации по учебной дисциплине, правила (или формула) определения оценки по промежуточной аттестации, критерии оценивания по элементам текущего контроля, наличие или отсутствие блокирующих элементов, наличие или отсутствие элементов, не подлежащих пересдаче. Если ПУД предусматривает наличие блокирующих элементов до сессии, то указывается порядок проведения пересдач по каждому из таких элементов. Описываются особенности проведения пересдач (первой и второй), включая тематический состав контрольно-измерительных материалов для пересдач.

Данный раздел разработчиком ПУД создается строго в соответствии Положением об организации промежуточной аттестации и текущем контроле знаний студентов НИУ ВШЭ. Если ПУД предусматривает несколько промежуточных аттестаций по учебной дисциплине, то указывается способ определения итоговой оценки, которая отражается в документе об образовании (квалификации выпускника).

## **3 курс**

Результирующая оценка за третий курс формируется из оценки за домашние задания (**Д**), оценки за активность на семинарских, лекционных и практических занятиях (**А**) и оценки за экзамен (**Э**), и вычисляется по формуле

$$P_1 = 0.4 D + 0.3 A + 0.3 Э$$

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Округление оценки  $P_1$ : арифметическое. Отдельные компоненты оценки  $P_1$  не округляются.

Отдельные элементы домашних заданий входят в оценку **Д** с равными весами.

Для домашних заданий студент должен продемонстрировать владение методами решения нелинейных уравнений, решения систем линейных алгебраических уравнений, приближения функций, численного дифференцирования и интегрирования, а также умение методы программно реализовывать и применять.

Домашние задания выдаются студентам дистанционно, регистрация решений студентов производится дистанционно, с использованием системы контроля версий.

Сдача домашних заданий производится по установленному преподавателем графику. При сдаче задания позднее установленного преподавателем срока оценивание производится со штрафом в один балл за каждые полные сутки опоздания.

При оценивании домашнего задания может использоваться как результат автоматического оценивания, так и объяснения студента по использованным подходам и методам решения.

Экзамен проводится в устной форме в экзаменационный период четвертого модуля. По решению преподавателя, если оценка за домашние работы **Д** равна или превышает значение 8, оценка за экзамен может быть установлена равной **Д**.

На экзамене, студенту предлагается пояснить теоретические основы и ход решения выбранного преподавателем домашнего задания. Затем студенту задаются дополнительные вопросы по элементам тематического плана дисциплины.

Формат проведения первой и второй пересдач соответствует формату экзамена.

## 4 курс

Результирующая оценка по дисциплине (**О**) формируется из оценки за домашние задания (**Д**), оценки за активность на семинарских, лекционных и практических занятиях (**А**) и оценки за экзамен (**Э**), и вычисляется по формуле

$$O = 0.5 Э + 0.5 Н$$

где накопленная оценка (**Н**) формируется по формуле

$$H = 0.4 Д + 0.2 А + 0.4 Р_1$$

Результирующая оценка **О** округляется по арифметическим правилам. Отдельные компоненты оценки не округляются.

Для домашних заданий студент должен продемонстрировать владение методами численного решения задачи Коши, численными методами решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2 порядка, а также теорией разностных схем.

Для итогового контроля (экзамена) студент должен продемонстрировать знание основных теоретических положений дисциплины, умение решать типичные задачи по материалу дисциплины, а также применять предложенные численные методы.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Домашние задания выдаются студентам дистанционно, регистрация решений студентов производится дистанционно, с использованием системы контроля версий.

Сдача домашних заданий производится по установленному преподавателем графику. При сдаче задания позднее установленного преподавателем срока оценивание производится со штрафом в один балл за каждые полные сутки опоздания.

При оценивании домашнего задания может использоваться как результат автоматического оценивания, так и объяснения студента по использованным подходам и методам решения.

Экзамен проводится в устной форме в экзаменационный период четвертого модуля. По решению преподавателя, если оценка за домашние работы **Д** равна или превышает значение 8, оценка за экзамен может быть установлена равной **Д**.

На экзамене, студенту предлагается пояснить теоретические основы и ход решения выбранного преподавателем домашнего задания. Затем студенту задаются дополнительные вопросы по элементам тематического плана дисциплины.

Формат проведения первой и второй пересдач соответствуют формату экзамена.

#### 4. Примеры оценочных средств

Для блокирующих элементов контроля (согласно пункту 3) и экзаменов должны быть приведены примеры (демонстрационные варианты) оценочных средств либо даны ссылки на электронный ресурс, где они размещены. Могут быть добавлены примеры (демонстрационные варианты) оценочных средств по иным формам контроля.

Если блокирующих элементов не предусмотрено в ПУД, то вписывается фраза «Блокирующие элементы не предусмотрены».

Блокирующие элементы не предусмотрены.

Примерные вопросы для оценки качества освоения дисциплины:

##### 3 курс

1. Постановка задачи приближенного вычисления корня и основные этапы ее решения. Метод простой итерации. Теорема о сходимости метода. Приведение уравнения к виду, удобному для итераций.

2. Метод Ньютона. Теорема о сходимости метода Ньютона.

3. Модификации метода Ньютона: упрощенный метод Ньютона, метод секущих.

4. Обусловленность задачи решения систем линейных уравнений. Число обусловленности матрицы. Оценка погрешности решения по погрешностям входных данных.

5. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Стратегии выбора ведущего элемента в методе Гаусса. Трудоемкость метода Гаусса.

6. LU-разложение матрицы. Теорема о возможности применения LU- разложения. Применение метода LU- разложения для решения задач вычислительной алгебры.

7. Метод Холецкого решения систем линейных уравнений.

8. Метод прогонки. Теорема о возможности применения метода прогонки.

9. Метод простой итерации для систем общего вида. Сходимость, оценки погрешности.

10. Метод Зейделя для систем общего вида. Сходимость, оценки погрешности.

11. Каноническая форма записи расчетных формул итерационных методов. Необходимое и достаточное условие сходимости итерационных методов.

12. Аппроксимация функций по методу наименьших квадратов. Постановка задачи. Вывод нормальной системы метода. Выбор степени аппроксимирующего многочлена.

13. Постановка задачи интерполяции. Теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена.
14. Многочлен Лагранжа. Оценка погрешности интерполяции. Минимизация погрешности интерполяции.
15. Многочлены Ньютона с конечными и разделенными разностями. Оценка погрешности.
16. Интерполяционный сплайн степени  $m$ . Различные виды граничных условий.
17. Построение линейного и кубического сплайнов. Оценка погрешности приближения функции кубическим сплайном.
18. Метод простой итерации для решения систем нелинейных уравнений.
19. Метод Ньютона и его модификации для решения систем нелинейных уравнений.
20. Постановка задачи одномерной минимизации. Метод деления отрезка пополам. Алгоритм и оценка погрешности.
21. Метод Ньютона решения задачи минимизации функций.
22. Приближенное вычисление интегралов. Вывод квадратурных формул центральных прямоугольников и трапеций. Априорная оценка погрешности.
23. Приближенное вычисление интегралов. Вывод квадратурной формулы Симпсона. Оценка погрешности.
24. Численное дифференцирование. Вычисление первой и второй производной, оценка погрешности. Построение формул высокого порядка точности. Построение центральных и односторонних разностных схем.

#### 4 курс

1. Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка, ее разрешимость, устойчивость на конечном отрезке, устойчивость по правой части и устойчивость на неограниченном промежутке.
2. Численные методы решения задачи Коши. Основные понятия и определения: дискретная задача Коши, явные и неявные методы, устойчивость, аппроксимация, сходимости.
3. Метод разложения в ряд Тейлора.
4. Метод Эйлера, его геометрическая интерпретация, оценка погрешности метода Эйлера.
5. Модификации метода Эйлера второго порядка точности, геометрическая интерпретация, оценка погрешности методов.
6. Методы Рунге–Кутты. Идея построения расчетных формул. Однопараметрическое семейство метод Рунге–Кутты 2-го порядка точности.
7. Аппроксимация, устойчивость и сходимости явных методов решения задачи Коши.
8. Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений.
9. Решение задачи Коши для уравнения  $m$ -го порядка.
10. Устойчивость численных методов. Понятие нуль-устойчивости.
11. А-устойчивость численных методов решения задачи Коши. Понятие об абсолютной устойчивости численных методов решения задачи Коши.
12. Жесткие задачи: понятие о жестких задачах, жесткие системы дифференциальных уравнений. Методы их решения.
13. Постановка краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Физический смысл и основные теоремы о свойствах решения.
14. Метод конечных разностей решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения разностной схемы.

Принцип максимума для разностной схемы.

15. Метод конечных разностей решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2 порядка. Априорная оценка решения. Теоремы об устойчивости, аппроксимации и сходимости разностной схемы.

16. Решение сеточных уравнений методом прогонки.

17. Метод конечных разностей для случая переменного коэффициента  $k(x)$ . Аппроксимация граничных условий 2-го рода со вторым порядком точности.

18. Метод пристрелки решения краевой задачи.

19. Основные понятия теории разностных схем. Корректность разностной схемы.

20. Теорема о связи между устойчивостью и сходимостью разностной схемы.

21. Решение начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности разностным методом. Явная схема. Условие устойчивости. Сходимость.

22. Решение начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности разностным методом. Неявная схема. Абсолютная устойчивость.

23. Решение начально-краевой задачи для одномерного волнового уравнения разностным методом. Явная схема. Условие устойчивости. Сходимость.

24. Решение начально-краевой задачи для одномерного волнового уравнения разностным методом. Неявная схема.

25. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Разностная схема. Итерационные методы решения сеточных уравнений: метод простой итерации и метод Зейделя.

26. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Принцип максимума. Единственность и устойчивость решения разностной схемы.

27. Вариационная постановка краевой задачи. Метод Ритца.

28. Проекционная постановка краевой задачи. Метод Галеркина.

## 5. Ресурсы

### 5.1. Рекомендуемая основная литература

№п/п	Наименование
1	Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.:2003. (любое издание)

### 5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

№п/п	Наименование
1	Н. Н. Калиткин <i>Численные методы</i> . М.: Наука, 1978.
2	Самарский А.А., Введение в численные методы, М.: Наука, 1987
3	N.J. Higham, <i>The Princeton Companion to Applied Mathematics</i> , Princeton University Press, 2015.

### 5.3. Программное обеспечение

№п/п	Наименование	Условия доступа/скачивания
	Дистрибутив Anaconda Python	Свободно-распространяемое ПО



**5.4.** Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№п/п	Наименование	Условия доступа/скачивания
		<i>Например, из внутренней сети университета (договор)</i>

**5.5.** Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения лекций необходима аудитория, оснащенная компьютером и проекционным оборудованием. Для проведения практических занятий необходим компьютерный класс с установленной системой Anaconda Python.

## **6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов**

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1.1. для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.2. для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.3. для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

## **7. Дополнительные сведения**

По желанию разработчика в ПУД могут быть включены другие содержательные элементы, например, методические рекомендации для студента и преподавателя, описание применяемых образовательных технологий.

