

## Майнор «Математические структуры»

### Программа учебной дисциплины «Графы и топология»

Утверждена  
Проректором Роциным С.Ю.  
от «\_\_» \_\_\_\_\_ 201\_ г.

|                               |  |
|-------------------------------|--|
| Автор                         | Ландо С.К., д.ф.-м.н., <a href="mailto:lando@hse.ru">lando@hse.ru</a> ; Васильев В.А., д.ф.-м.н., <a href="mailto:vva@mi.ras.ru">vva@mi.ras.ru</a> |
| Число кредитов                | 5  |
| Контактная работа (час.)      | 80   |
| Самостоятельная работа (час.) | 110  |
| Курс                          | 3  |
| Формат изучения дисциплины    | Без использования онлайн курса   |

#### I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целями освоения дисциплины «Графы и топология» являются освоение геометрических и топологических концепций, используемых в естествознании и в математических моделях социальных процессов.

Объекты, которым посвящен курс, - геометрической и топологической природы. Они универсальны и могут описывать совершенно разные объекты и явления реальной жизни. Графы используются в большинстве математических моделей, описывающих дискретные структуры с различными связями. Топология изучает наиболее принципиальные свойства реальных объектов, не зависящие от их описания в тех или иных координатах, и дает многочисленные выводы о существовании или несуществовании объектов или их подмножеств с заданными свойствами (как-то: о достижении экстремальных или предписанных значений функций и отображений, о неподвижных точках движений, о равновесных и стационарных решениях...)

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать:

- Основные понятия тех разделов математики, которые включены в программу

уметь:

- решать базовые задачи по каждому разделу;

владеть:

- Уверенно пользоваться математическим языком, владеть терминологией по каждому разделу;
- Приобрести опыт устного и письменного изложения математических рассуждений

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- Математика в объеме программы средней школы.
- Язык конечных множеств и операций над ними.

- Логический вывод и доказательства.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при исследовании графов в различных приложениях, возникающих в разнообразных дисциплинах, изучаемых слушателями майнора в рамках основных образовательных программ.

## II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Определение графов, их типы, приложения и простейшие свойства. Примеры из практики. Таблицы смежности и таблицы инцидентности.
2. Связные графы. Порождающее дерево. Эйлеровы пути и гамильтоновы циклы. Мосты Кенигсберга.
3. Классификация, инварианты и перечисление графов.
4. Плоские графы, препятствия к планарности, инварианты пространственных графов.
5. Двудольные графы. Теорема Холла.
6. Большие и бесконечные графы, их асимптотические свойства.
7. Метрические пространства: примеры и свойства. Гомеоморфизм. Теоремы об экстремальных и промежуточных значениях.
8. Фундаментальная группа, классификация двумерных поверхностей, гомологии. Эйлерова характеристика.
9. Индекс зацепления замкнутых кривых.
10. Теоремы о неподвижных точках. Теорема о причисывании ежа. Основная теорема алгебры.

## III. ОЦЕНИВАНИЕ

### Критерии оценки знаний, навыков

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

### Порядок формирования оценок по дисциплине

Две промежуточные контрольные: в середине с весом 0.3 и в конце с весом 0.7; четыре домашних задания с весом 1.75, округление суммы до ближайшего целого (ровно  $n.5$  округляется вниз до  $n$ ), после всего берется минимум из полученного результата и 10.

## IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Совокупность задач текущего контроля формируется по мере чтения курса. См. [https://electives.hse.ru/2016/minor\\_maths\\_structures/graphs\\_topology](https://electives.hse.ru/2016/minor_maths_structures/graphs_topology)

Задача 1. Рассуждая по индукции, найдите  $\chi_{\text{Sp}}(c)$  для произвольного цикла длины  $n$

Задача 2. Пусть  $G$  - граф. Докажите, что хроматический многочлен графа, полученного из  $G$  добавлением одной вершины, соединенной с одной из его вершин, получается из хроматического многочлена графа  $G$  умножением на  $s-1$ .

Задача 3. Пользуясь теоремой 5.1.1, подсчитайте хроматический многочлен для а) деревьев на  $n$  вершинах; б) триангуляций (т.е. циклов, в которых проведены "попарно непересекающиеся диагонали", разбивающие их на треугольники, см. рис. 5.3. Покажите, в частности, что хроматическая функция одинакова для всех деревьев и для всех триангуляций на данном числе вершин, а значит, не различает попарно неизоморфные графы этих типов.

## V. РЕСУРСЫ

### 5.1 Рекомендуемая литература :

#### Обязательная:

1. Оре О. [Теория графов](#). — 2-е изд. — М.: [Наука](#), 1980.
2. Виро О. Я., Иванов О. А., Харламов В. М., Нецветаев Н. Ю. Элементарная топология. — М: МЦНМО, 2007
3. Р.Грэхем, Д.Кнут, О.Паташник, Конкретная математика: основания математики, М., Мир, 1998
4. С.К.Ландо Введение в дискретную математику, М., МЦНМО, 2012

#### Дополнительная:

5. У.Татт, Теория графов, М., Мир, 1988
6. Ф.Харари, Э.Палмер, Перечисление графов, М., Мир, 1986

### 5.2 Программное обеспечение

| № п/п | Наименование   | Условия доступа                                      |
|-------|--|--|
| 1.    | Microsoft Windows 7 Professional RUS<br>Microsoft Windows 10<br>Microsoft Windows 8.1 Professional RUS | <i>Из внутренней сети университета (договор)</i>     |
| 2.    | Microsoft Office Professional Plus 2010  | <i>Из внутренней сети университета (договор)</i>     |
| 3.    | LaTeX пакет верстки научных текстов  | <i>Свободно распространяемый программный продукт</i> |

### 5.3 Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

| № п/п | Наименование  | Условия доступа  |
|-------|---|--|
|       | <i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i> |  |
| 1.    | База препринтов Cornell University                                    | <i><a href="https://arxiv.org/">https://arxiv.org/</a></i> |
| 2.    | База данных зарубежной периодики MathSciNet                           | <i>Онлайн доступ из локальной сети НИУ ВШЭ</i>             |
|       | <i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i>         |  |
| 1.    | Открытое образование  | URL: <a href="https://openedu.ru/">https://openedu.ru/</a> |

#### **5.4 Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для самостоятельных занятий по дисциплине оснащены персональными компьютерами, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.