

Программа учебной дисциплины
«Введение в алгебраические группы и их инварианты»

Утверждена Ученым Советом
факультета математики

Разработчик	В.С.Жгун, доцент, факультет математики
Число кредитов	6
Контактная работа (час.)	72
Самостоятельная работа (час.)	156
Курс, Образовательная программа	Для студентов образовательных программ, реализуемых факультетом математики
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

ОПИСАНИЕ: Геометрическая теория и классическая теория инвариантов алгебраических групп—очень важный раздел современной математики. С первыми примерами инвариантов линейных преобразований, такими как определитель, след, характеристический многочлен каждый встречается уже на первом курсе линейной алгебры. Классическая теория инвариантов посвящена описанию алгебры инвариантов классических групп, таких как полная линейная группа, ортогональная и симплектическая группа.

В свою очередь, геометрическая теория инвариантов, которая берет свое начало в работах Гильберта и Мамфорда, посвящена исследованию геометрических свойств инвариантов, например, построению и исследованию геометрии различных фактор-пространств, и является основным инструментом для построения пространств модулей (кривых, векторных расслоений и проч.). В курсе мы затронем как классическую теорию инвариантов так и геометрическую. Также мы изучим эквивариантные вложения однородных пространств.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА: требуется знание линейной алгебры и теории представлений конечных групп (последнее — главным образом для того, чтобы используемые конструкции не вызывали удивления); весьма полезно знание групп Ли и основ алгебраической геометрии.

2. Содержание учебной дисциплины

1. Алгебраические группы и их алгебры Ли. (4 часа)
2. Действия алгебраических групп. Орбиты стабилизаторы однородные пространства. Теорема Шевалле. (4 часа)
3. Многообразия флагов. Действие разрешимых групп на полных многообразиях. Теорема Бореля (Ли–Колчина) о неподвижной точке. (4 часа)
4. Сопряженность борелевских подгрупп, максимальных торов, картановских подгрупп. (4 часа)
5. Структурная теория полупростых алгебраических групп. (4 часа)
6. Действие редутивных групп на аффинных многообразиях. Конечная порожденность алгебры инвариантов (теорема Гильберта). (4 часа)
7. Категорный фактор. Геометрический фактор. Существование категорного фактора для действия редутивных групп на аффинных многообразиях. (4 часа)
8. Теорема Нётер о степенях образующих алгебры инвариантов.
9. Теория инвариантов классических групп. (4 часа)
10. Действие редутивных групп. Линеаризация обратимого пучка. Группа - линеаризованных линейных расслоений $\text{Pic}_G(X)$. (3 часа)
11. Полуустойчивые и устойчивые точки. Фактор Мамфорда. (3 часа)
12. Численный критерий устойчивости. (3 часа)
13. Критерий Гильберта–Мамфорда. (3 часа)
14. Критерий Попова устойчивости действия на аффинном многообразии. (3 часа)
15. Теорема Луны о слайсе. Стратификация и разрешение особенностей нуля-конуса. (3 часа)
16. Отображение моментов. Замкнутость орбит, критерий Кемпфа–Несс. (3 часа)
17. Стратификация Хесселинка множества неустойчивых точек. (4 часа)
18. Пространства модулей кривых. (5 часов)
19. Вариация фактора Мамфорда при изменении обильного обратимого пучка. (3 часа)
20. Свойства U -инвариантов, деформация к орисферическому многообразию. (4 часа)

3. Оценивание

$\frac{1}{3} \times (\text{решение задач из листков}) + \frac{2}{3} \times (\text{итоговый устный экзамен})$

4. Примеры оценочных средств

Блокирующие элементы не предусмотрены.

5. Ресурсы

5.1. Рекомендуемая основная литература

п/п	Наименование
	<p>Крафт, Х. Геометрические методы в теории инвариантов / Х. Крафт; Пер. с нем. Д. И. Панюшева; Под ред. В. Л. Попова. – М.: Мир, 1987. – 312 с.</p> <p>Хамфри, Дж. Линейные алгебраические группы / Дж. Хамфри; Пер. с англ. А. Е. Залесского; Под ред. В. П. Платонова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 400 с.</p>

5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

п/п	Наименование
	<p>Хамфрис, Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений / Дж. Хамфрис; Пер. с англ. Б. Р. Френкина; Под ред. Э. Б. Винберга. – М.: МЦНМО, 2003. – 213 с. - ISBN 5-900916-79-0.</p>

5.3. Программное обеспечение

п/п	Наименование	Условия доступа/скачивания
1.	<p>Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS</p>	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
3.	LaTeX пакет верстки научных текстов	<i>Свободно распространяемый программный продукт</i>

5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

п/п	Наименование	Условия доступа/скачивания
1.	База препринтов Cornell University	https://arxiv.org/
2.	База данных зарубежной периодики MathSciNet	<i>Онлайн доступ из локальной сети НИУ ВШЭ</i>
<i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i>		
1.	Открытое образование	https://openedu.ru
2.	Coursera	http://www.coursera.org
3.	edX	https://www.edx.org/course
4.	MITOPENCOURSE	https://ocw.mit.edu/index.htm

	WARE	
--	------	--

5.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для самостоятельных занятий по дисциплине оснащены персональными компьютерами, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.

6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1.1. *для лиц с нарушениями зрения:* в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.2. *для лиц с нарушениями слуха:* в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.3. *для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:* в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

7. Дополнительные сведения

По желанию разработчика в ПУД могут быть включены другие содержательные элементы, например, методические рекомендации для студента и преподавателя, описание применяемых образовательных технологий

8. Литература для углубленного изучения материала

D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, Geometric invariant theory, 3rd. edition, Ergebnisse Math. 34, Springer-Verlag, Berlin, 19942.

I.V.Dolgachev, Introduction to Geometric Invariant Theory, Lect. Notes Series, 25, Seoul Nat. Univ., 1994.3.

Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, Итоги науки и техн. ВИНТИ, Совр. пробл. мат., Фунд. направл., т. 55, 1989, с.137–309.

F. Knop, H. Kraft, T. Vust, The Picard group of a G -variety. Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie (H. Kraft, P. Slodowy, T. Springer eds.) DMV-Seminar 13, Birkhauser Verlag (Basel–Boston) (1989), 77–88.

D.A. Timashev, Homogeneous spaces and equivariant embeddings, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups VIII (R. V. Gamkrelidze, V. L. Popov, eds.), Encyclopædia Math. Sci., vol. 138, Springer-Verlag, Heidelberg–Dordrecht–London–New York, 2011.