Программа учебной дисциплины «Алгебра и геометрия»

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол № 12 от «26» июня 2018 г.

Автор	Широков Дмитрий Сергеевич, к.ф.-м.н., доцент Департамента математики Факультета экономических наук
Число кредитов	6 кредитов
Контактная работа (час.)	84 часа
Самостоятельная работа (час.)	144 часа
Курс	1 курс бакалавриата
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целью освоения дисциплины «Алгебра и геометрия» являются:

- ознакомление студентов с основами линейной алгебры, аналитической геометрии и общей алгебры;
- формирование у студентов навыков использования методов линейной алгебры для формализации и решения прикладных задач, в том числе экономических и геометрических.

В результате освоения дисциплины студент должен

знать:

- точные формулировки основных понятий,
- возможности координатного метода для исследования различных геометрических объектов,
- основные теоремы о структуре множества решений систем линейных уравнений,
- основные задачи векторной алгебры и аналитической геометрии,
- основные виды уравнений простейших геометрических объектов,
- основные свойства некоторых алгебраических структур (полей вещественных и комплексных чисел, линейного пространства над полем вещественных чисел),
- основы линейной алгебры, в частности, свойства числовых характеристик матриц: определитель, ранг, размерность пространства строк и столбцов,
- векторные пространства и их свойства;

уметь:

- интерпретировать основные понятия на простых модельных примерах,
- свободно использовать координатный, векторный, матричный или операторный способы записи математических соотношений,
- использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей,
- строить и изучать математические модели конкретных явлений и процессов для решения расчетных и исследовательских задач,
- определять возможности применения теоретических положений и методов математических дисциплин для постановки и решения конкретных прикладных задач,
- исследовать простейшие геометрические объекты по их уравнениям в различных системах координат,

- решать основные задачи линейной алгебры, в частности системы линейных уравнений,
- применять изучаемые методы построения решений систем линейных уравнений,
- решать типовые математические задачи курса, используемые при принятии управленческих решений;

иметь навыки:

- использования методов аналитической геометрии и векторной алгебры в смежных дисциплинах и экономике,
- формализации и решения прикладных задач линейной алгебры, в том числе экономических.

Для успешного усвоения данной дисциплины необходимо, чтобы студент владел знаниями, умениями и навыками, сформированными в процессе изучения программы общеобразовательной школы. Дисциплина основывается на знании числовых систем и функций, изученных в средней школе, а также на основных понятиях курса «Математический анализ», и широко использует умения и наглядные представления, полученные при изучении планиметрии и стереометрии.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- «Математический анализ»,
- «Дискретная математика»,
- «Теория вероятностей и математическая статистика»,
- «Теория игр»,
- «Теория полезности и принятия решений»,
- «Эконометрика»,
- «Основы информационной безопасности».

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Введение.

- Предмет курса. Принципы построения и изучения курса. Краткое содержание. Рекомендации по изучению курса, самостоятельной работе и литературе. О формах контроля и отчетности при изучении курса.

Тема 2. Некоторые сведения из теории определителей и систем линейных уравнений.

- Определители матриц второго и третьего порядка. Примеры.
- Системы линейных уравнений (2 уравнения и 2 неизвестных, 3 уравнения и 3 неизвестных).
- Метод Крамера для систем с двумя и тремя неизвестными.

Тема 3. Векторная алгебра.

- Линейные операции с векторами плоскости (пространства) и их свойства.
- Векторы. Единичные орты плоскости и пространства. Координаты векторов.
- Скалярное произведение, вычисление в координатах.
- Векторное произведение, вычисление в координатах.
- Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл.
- Свойства рассматриваемых операций над векторами.

Тема 4. Системы координат и простейшие задачи, решаемые с использованием векторной алгебры.

- Аффинная, декартова и полярная системы координат. Координаты точек плоскости (пространства).
- Деление отрезка в заданном соотношении. Вычисление площадей треугольника и параллелограмма.
- Вычисление объема параллелепипеда и тетраэдра.

Тема 5. Прямая линия на плоскости.

- Различные виды уравнений прямой.
- Простейшие приложения: вычисление угла между прямыми, определение взаимного расположения двух прямых, условия параллельности и перпендикулярности, определение взаимного расположения точек относительно прямой, вычисление расстояния от точки до прямой, вывод уравнений биссектрис угла.

Тема 6. Прямая и плоскость в пространстве.
- Различные виды уравнений плоскости.
- Простейшие приложения: вычисление расстояния от точки до плоскости, нахождение угла между плоскостями, исследование взаимного расположения плоскостей, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
- Различные уравнения прямой в пространстве.
- Простейшие приложения: вычисление угла между прямыми, нахождение угла между прямой и плоскостью, исследование взаимного расположения прямой и плоскости.

Тема 7. Кривые второго порядка.
- Эллипс, гипербола, парабола. Вывод их уравнений и описание простейших свойств. Упрощение уравнений кривых второго порядка.

Тема 8. Алгебра матриц.
- Определение матрицы. Частные виды матриц.
- Операции с матрицами и их свойства.
- Элементарные преобразования матриц.
- Ступенчатый вид матрицы. Вид Гаусса.

Тема 9. Определители матриц. Обратимые матрицы.
- Перестановки элементов конечного множества. Инверсии в перестановках. Четность перестановок. Подстановки. Порядок подстановки. Разложение подстановки в произведение независимых циклов. Умножение подстановок.
- Определитель матрицы. Свойства определителей.
- Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по элементам строки и столбца.
- Определитель с углом нулей. Определитель произведения двух матриц.
- Обратимые матрицы. Критерий обратимости матриц. Формула для вычисления обратной матрицы.
- Вычисление определителя матрицы и нахождение обратной матрицы с использованием элементарных преобразований.

Тема 10. Матрицы и системы линейных уравнений.
- Ранг матрицы. Теорема о ранге матриц. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц.
- Элементарные преобразования систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Критерии совместности и определенности систем линейных уравнений.
- Метод Гаусса. Главные и свободные неизвестные.
- Метод Крамера для решения квадратных систем линейных уравнений. Матричные уравнения.

Тема 11. Линейные пространства.
- Линейные (векторные) пространства. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Свойства, связанные с линейной зависимостью. Линейная оболочка системы векторов. Нахождение ее базиса с использованием ступенчатой матрицы.
- Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора относительно базиса, запись операций над векторами в координатах.
- Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода от «старого» базиса к «новому».
- Подпространства линейных пространств и их базисы. Свойства линейно независимых систем векторов в подпространстве. Размерность линейной оболочки конечной системы векторов.

- Подпространство решений однородной системы линейных уравнений, его базис и размерность. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Векторная форма записи решений.

Тема 12. Поле комплексных чисел.

- Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексного числа. Модуль и аргумент. Операции над комплексными числами. Формула Муавра. Формула Эйлера. Показательная форма записи. Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа. Геометрические свойства корней из комплексного числа. Решение квадратных уравнений.

Тема 13. Линейные преобразования (операторы) линейных пространств. Билинейные и квадратичные формы.

- Линейные операторы и их матрицы. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса. Подобие матриц.
- Образ и ядро линейного отображения. Операции над линейными операторами.
- Собственные значения, собственные векторы линейных операторов. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.
- Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен квадратной матрицы.
- Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
- Билинейные и квадратичные формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм.
- Положительно определенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

Тема 14. Евклидовы пространства.

- Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, длины векторов и углы между векторами.
- Матрица Грама. Ортонормированный базис, процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
- Ортогональные матрицы. Переход от одного ортонормированного базиса к другому.
- Ортогональное дополнение линейного подпространства в евклидовом пространстве. Ортогональная проекция вектора на подпространство (задача наилучшего приближения).

Тема 15. Линейные преобразования евклидовых пространств.

- Самосопряженные преобразования евклидовых пространств.
- Свойства собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования в евклидовом пространстве.
- Ортогональные преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям с помощью ортогональной замены переменных.

III. ОЦЕНИВАНИЕ

В течение двух модулей предусматривается проведение 2-х контрольных работ и проверка 1 обязательного домашнего задания. Повторная сдача работ не допускается. На семинарских занятиях возможны опросы или самостоятельные работы (по усмотрению преподавателя), проверка текущих домашних заданий. В конце второго модуля проводится письменная экзаменационная работа.

В контрольных работах, обязательном домашнем задании и экзаменационной работе каждое задание оценивается в определенное (указанное в работе) количество баллов, в сумме дающих 10 баллов. Во всех работах могут присутствовать как практические задания, так и задания теоретического характера (сформулировать определение, сформулировать теорему, привести примеры, доказать некоторое утверждение). Решения практических задач засчитываются, если дан не только ответ, но и подробное и обоснованное решение.

Итоговая оценка по курсу $О_{итог..}$ вычисляется по формуле:

$$О_{итог.} = 0{,}6 \cdot О_{экз} + 0{,}14 \cdot О_{контр.раб.1.} + 0{,}14 \cdot О_{контр.раб.2} + 0{,}08 \cdot О_{дом.зад.} + 0{,}04 \cdot О_{ауд.}$$

где $О_{экз}$ – оценка письменной экзаменационной работы, $О_{контр.раб.1}$, $О_{контр.раб.2}$ – оценки контрольных работ, $О_{ауд.}$ – оценка активности на семинарских занятиях, $О_{дом.зад}$ – оценка обязательного домашнего задания. Все формы контроля оцениваются по 10-балльной шкале, результаты арифметически округляются до целых единиц. Итоговая оценка проставляется в ведомость.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Приведены примеры задач из различных форм контроля.

Контрольная работа №1

1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$$

2. Даны вершины треугольника $A(-1;1), B(5;3), C(1;-1)$. Составить уравнения медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины *C*.

3. Найти точку M' , симметричную точке $M(0;-3;-2)$ относительно прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z}{1}$.

4. Даны точки $A(1;0;2), B(2;1;0), C(0;-2;1), D(1;2;0)$. Найти:

(а) объем пирамиды *ABCD*;

(б) расстояние между прямыми (*AC*) и (*BD*).

5. Определить тип кривой, приведя данное уравнение к каноническому виду, и построить ее

(a) $2x^2+2y^2+4x+4y-1=0$;

(b) $y^2-3x-2y+7=0$.

6. Составить уравнение множества точек, расстояние каждой из которых от точки $A(3;0)$ вдвое меньше расстояния от точки $B(26;0)$. Сделать чертеж.

7. Составить уравнение множества точек, сумма расстояний от которых до двух заданных $F_1(0;-3)$ и $F_2(0;2)$ есть величина постоянная, равная 6. Сделать чертеж.

8. Выполнить умножение матриц AB, AB^T, A^TB, A^TB^T, BA^T, B^TA^T, BA, B^TA, а в тех случаях, когда оно не определено, пояснить почему.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

9. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix}3 & -3 & -5 & 8\\ -3 & 2 & 4 & -6\\ 2 & -5 & -7 & 5\\ -4 & 3 & 5 & -6\end{vmatrix}.$$

10. Решить матричное уравнение $A\cdot X\cdot B-4\cdot D=C^T$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

11. Найти ранг матрицы в зависимости от параметра λ

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 6 & -3 & -1 & 1\\ 1 & 3+\lambda & 1 & 2\\ 6 & 0 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

12**.** Используя метод Гаусса исследовать систему на совместность; в случае совместности решение записать в виде суммы какого-либо частного решения и общего решения соответствующей однородной системы (выписать векторы, образующие ФСР)

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-2x_4=1\\ -2x_1-3x_2+x_3+3x_4=3\\ 5x_1+9x_2-10x_3-9x_4=0\end{cases}$$

Контрольная работа №2

1. Дайте определение линейного подпространства. Докажите, что множество кососимметричных матриц ($A^T = -A$) порядка 2 образует линейное подпространство всех квадратных матриц порядка 2. Найдите его размерность и какой-нибудь базис. Найдите координаты матрицы $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ относительно этого базиса.
2. Выделите среди векторов
   $$1.1. a_1(2,-3,1),\ \ a_2(-2,13,-15),\ \ a_3(-4,11,-9)$$
   какой-нибудь базис порожденной ими линейной оболочки, а затем найдите координаты остальных векторов относительного этого базиса.
3. Векторы
   $$1.2. e_1(1,1,1),\ \ e_2(-1,2,2), e_3(1,3,4) \text{ и } e_1'(-1,2,2),\ \ e_2'(2,3,-1),\ \ e_3'(3,1,2)$$
   заданы координатами относительно некоторого базиса в $\square^{\mathbf{3}}$. Докажите, что эти системы векторов являются базисами. Найдите матрицу перехода от первого базиса ко второму.
4. (a) Вычислить $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$; $\dfrac{5+i}{3+i}$;

   (b) найти тригонометрическую и показательную формы числа $(1+i\sqrt{3})$;

   (c) используя тригонометрическую форму комплексного числа, вычислить $\sqrt[5]{32}$.
5. Используя критерий Сильвестра, исследовать квадратичную форму
   $$A(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-3x_2^2+\lambda x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$$

на положительную или отрицательную определенность в зависимости от параметра λ.

6. (a) Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$. Указать базис, в котором матрица оператора является диагональной, и записать эту диагональную матрицу. (b) Вычислить матрицу A^n, $n\in\mathbb{Z}$.
7. Подпространство L_1 в $\mathbb{R}^4$ порождено векторами $(1;-1;4;0)$ и $(1;1;-1;2)$, а подпространство L_2 – векторами $(0;1;-2;3)$ и $(1;-1;5;-1)$. Построить базисы следующих подпространств: пересечения $L_1\cap L_2$ и ортогонального дополнения к сумме $(L_1+L_2)^{\perp}$.

Домашнее контрольное задание

1. Найти значение выражения $(1;0;-1)\cdot\left(\det(B^T B)E_3 - BB^T\right)\cdot(1;0;-1)^T$, где матрица B имеет вид
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.
3. В перестановке $\{1,4,7,...,3n-2,2,5,8,...,3n-1,3,6,9,...,3n\}$ определить число инверсий и указать общий признак тех чисел n, для которых эта перестановка четна, и тех, для которых она нечетна.
4. Определить четность подстановки $\Omega = s \circ t^2 \circ s$, где $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и

$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Разложить полученную подстановку Ω в произведение независимых циклов.

5. Найти матрицу C^{-1}, обратную к матрице $C = A\cdot B^T + 3E$, где
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислить определитель
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 \end{pmatrix}$$

7. (a) Решить систему уравнений с помощью метода Крамера:
$$\begin{cases} 4y_1 + 14y_2 + 21y_3 + 4y_4 = 7 \\ 21y_1 + 23y_2 + 4y_3 + 26y_4 = 14 \\ 26y_1 + 24y_2 + 14y_3 + 18y_4 = 21 \\ 7y_2 + 26y_3 + 2y_4 = 25 \end{cases},$$

(b) Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений:
$$\begin{cases} 25y_1 - 19y_2 - 107y_3 + 120y_4 = 0 \\ -73y_1 - 9y_2 + 74y_3 - 143y_4 = 0 \\ -26y_1 - 9y_2 + 6y_3 - 31y_4 = 0 \\ 26y_1 + 2y_2 - 44y_3 + 64y_4 = 0 \end{cases}.$$

8. Найти все комплексные корни уравнения $z^2+(1+5i)z-6+43i=0$. Для найденных корней представить число $z_0=\dfrac{z_1\cdot\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_1}{\overline{z_1+z_2}}$ в алгебраической форме.
9. Найти все комплексные корни уравнения $z^4+\dfrac{1-i\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot(1+i)}=0$.

Примеры заданий экзаменационной работы

1. Отображение φ из множества $\mathbb{R}^2$ в себя задано формулой
$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}-(x_1-x_2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}1\\x_2\end{pmatrix}.$$
Является ли это отображение линейным? Если да, записать его матрицу в стандартном базисе.

2. В базисе $e_1^{\downarrow}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, e_2^{\downarrow}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ линейный оператор φ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}-2&3\\3&2\end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора φ в базисе $f_1^{\downarrow}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, f_2^{\downarrow}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

3. Записать матрицу линейного оператора φ – ортогонального проектирования пространства L=$\mathbb{R}^3$ на плоскость $x_1+x_2=0$, в ортонормированном базисе {(1,0,0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)}. Найти ядро, ранг и образ оператора φ.

4. Пусть V=$\mathbb{R}^3$ − евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Линейное подпространство U – линейная оболочка векторов $\begin{cases}a_1^{\downarrow}=(1;2;1)^T\\a_2^{\downarrow}=(3;4;1)^T\\a_3^{\downarrow}=(1;-3;-1)^T\end{cases}$.

С помощью процесса ортогонализации найти ортонормированный базис U.

5. Пусть V=$\mathbb{R}^4$ − евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Линейное подпространство L – линейная оболочка векторов $\begin{cases}a_1^{\downarrow}=(1;-1;\ 1;\ 1)^T\\a_2^{\downarrow}=(1;\ 4;-1;0)^T\end{cases}$.

(a) Найти базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$;

(b) Найти ортогональную проекцию на подпространство L и ортогональную составляющую

вектора $x^{\downarrow}=(2;1;1;0)^T$.

6. Пусть V=$\mathbb{R}^3$ − евклидово пространство со стандартным скалярным произведением. Самосопряженный оператор A задан в стандартном ортонормированном базисе симметрической матрицей

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -4\\ -2 & -4 & 0\end{pmatrix}.$$

Найти канонический вид оператора (диагональный вид матрицы) и ортонормированный базис пространства V, состоящий из собственных векторов оператора A.

7. Привести квадратичную форму $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2+x_3^2$

(a) к главным осям (при помощи ортогональной замены переменных),
(b) к каноническому виду (при помощи метода Лагранжа выделения полных квадратов),
(c) проверить закон инерции, определив индексы инерции.

V. РЕСУРСЫ

1. Основная литература

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра: учебник для вузов. – М.: Физматлит, 1999 (или более поздние издания).
2. *Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г.* Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии. – М.: Изд-тво ВШЭ, 1998 (или более поздние издания).
3. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие для вузов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2001 (или более поздние издания).
4. *Болгов В.А., Ефимов А.В., Демидович Б.П и др.*. Сборник задач по математике для ВТУЗов: в 4ч., Ч.1:Линейная алгебра и основы математического анализа – М.: Наука, 1993 (или более поздние издания).

2. Дополнительная литература

1. *Шафаревич, И. Р.* Линейная алгебра и геометрия [Электронный ресурс] / И. Р. Шафаревич, А. О. Ремизов. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 512 с. - ISBN 978-5-9221-1139-3. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=544772&spec=1
2. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Физматлит, 2000 (или более поздние издания).
3. *Бурмистрова, Е. Б.* Линейная алгебра: учебник и практикум для бакалавров / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. – М.: Юрайт, 2014. – 421 с. – (Сер. "Бакалавр". Базовый курс) . - ISBN 978-5-9916299-5-9 (или более поздние издания).

3. Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	*Из внутренней сети университета (договор)*
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	*Из внутренней сети университета (договор)*

4.Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
	Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы	
1.	Консультант Плюс	*Из внутренней сети университета (договор)*
2.	Электронно-библиотечная система Юрайт	URL: https://biblio-online.ru/
	Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)	
1.	Открытое образование	URL: https://openedu.ru/

5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

– ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);

– мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для лабораторных и самостоятельных занятий по дисциплине оснащены компьютерами, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.