

Программа учебной дисциплины «Высшая математика»

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол № от «__»____20__ г.

Автор	Э.Л. Хабина, кандидат педагогических наук, доцент
Число кредитов	4
Контактная работа (час.)	62
Самостоятельная работа (час.)	90
Курс	2
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

1. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целями освоения дисциплины «Высшая математика» являются:

- овладение основными методами математического анализа, элементами аналитической геометрии и линейной алгебры;
- развитие логического мышления и формирование навыков работы с абстрактными понятиями высшей математики;
- умение использовать методы высшей математики при постановке и решении прикладных задач, качественно интерпретировать полученные количественные результаты;
- понимание роли математических знаний в подготовке бакалавра по данному направлению.

В результате изучения дисциплины студенты:

знают:

- формулировки основных понятий и теорем высшей математики, необходимых для дальнейшего обучения по дисциплинам, предусмотренным базовым и рабочим учебными планами;

умеют:

- интерпретировать основные понятия высшей математики на простых модельных примерах, применять методы дисциплины при решении задач, возникающих в других дисциплинах;

владеют:

- навыками применения современного инструментария дисциплины при решении задач, возникающих в других дисциплинах.

Дисциплина «Высшая математика» относится к циклу дисциплин Б.ПР.БП учебного плана, вариативной его части. Курс предназначен для студентов по направлению 58.03.01 Востоковедение и африканистика, образовательная программа «Востоковедение» подготовки бакалавра, читается в третьем и четвертом модуле второго курса.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- математика в объеме средней школы.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- знаниями основных понятий и теорем математики в объеме средней школы;
- навыками решения типовых задач математики в объеме средней школы.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- экономическая теория.

2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практич. занятия	
	Раздел I. Элементы аналитической геометрии и линейной алгебры	26	6	6		14
1.	Линейные функции спроса и предложения и их графики. Уравнение прямой на плоскости как график линейной функции	9	2	2		5
2.	Матрицы и определители	9	2	2		5
3.	Системы линейных уравнений	8	2	2		4
	Раздел II. Введение в анализ	22	6	4		12
4.	Функции и графики в экономическом моделировании	13	4	2		7
5.	Предел и непрерывность функции	9	2	2		5
	Раздел III. Дифференциальное исчисление	76	12	14		50
6.	Производная функции и ее применение в экономике	24	4	4		16
7.	Приложения производной	24	4	4		16
8.	Функции нескольких переменных	28	4	6		18
	Раздел V. Интегральное исчисление	28	8	6		14
9.	Первообразная функции. Неопределенный интеграл	11	3	2		6
10.	Определенный интеграл	17	5	4		8
	Итого	152	32	30	0	90

СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

РАЗДЕЛ I. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1. Линейные функции спроса и предложения и их графики. Уравнение прямой на плоскости. ([1], гл.4)

Прямая как график линейной функции спроса и линейной функции предложения. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Точка пересечения прямых.

Тема 2. Матрицы и определители. ([1], гл.1)

Основные сведения о матрицах. Применение матриц для записи экономических зависимостей. Операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц, транспонирование матрицы. Определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков: методы вычисления и простейшие свойства.

Тема 3. Системы линейных уравнений. ([1], гл.2)

Системы линейных уравнений. Основные методы решения. Равновесная цена как решение системы линейных уравнений, задающих спрос и предложение.

РАЗДЕЛ II. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Тема 4. Функции и графики в экономическом моделировании. ([1], гл.5)

Функции и графики в экономическом моделировании: примеры функций издержек, выручки, прибыли, полезности. Способы задания функции действительного аргумента. Область определения и множество значений функции. График функции. Элементарные функции и их графики. Обратная функция. Сложная функция.

Тема 5. Предел и непрерывность функции. ([1], гл.6)

Понятие предела функции. Основные теоремы о пределах функций. Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы. Непрерывные функции. Теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Свойства непрерывных на отрезке функций: ограниченность функции; наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке.

РАЗДЕЛ III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 6. Производная функции и ее применение в экономике. ([1], гл. 7, гл.9)

Понятие производной. Экономический смысл производной. Общие, средние и предельные показатели в экономике. Эластичность функции. Дифференцируемость функции в точке и на множестве. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций. Производная сложной функции. Производные высших порядков. Дифференциал функции и его свойства.

Тема 7. Приложения производной. ([1], гл. 8)

Теорема Ферма (необходимый признак экстремума). Интервалы монотонности и точки экстремума функции. Задачи поиска экстремумов в экономическом анализе: нахождение минимальных издержек, максимума прибыли и т.д. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба графика функции. Асимптоты. Исследование функции и построение эскиза ее графика.

Тема 8. Функции нескольких переменных. ([1], гл. 15)

Понятие о функции нескольких переменных и ее линиях уровня. Функция полезности и производственная функция как примеры функций нескольких переменных. Изокванты и изокосты как линии уровня производственной функции и функции издержек соответственно. Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных. Градиент, его свойства. Задачи поиска экстремумов функций двух переменных в экономическом анализе: нахождение максимальной полезности, максимума прибыли и т.д. Необходимое условие экстремума. Производные высших порядков. Достаточные условия локального экстремума. Наибольшее и наименьшее значения на замкнутом ограниченном множестве. Понятие условного экстремума.

РАЗДЕЛ IV. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 9. Первообразная функции. Неопределенный интеграл. ([1], гл. 10)

Нахождение функции издержек по известной функции предельных издержек. Понятие первообразной функции. Теорема об общем виде всех первообразных данной функции. Неопределенный интеграл и его свойства. Интегрирование некоторых классов элементарных функций.

Тема 10. Определенный интеграл. ([1], гл. 11)

Понятие определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла, площадь криволинейной трапеции. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление площадей плоских фигур. Понятие несобственного интеграла.

3. ОЦЕНИВАНИЕ

Формы контроля знаний студентов:

Тип контроля	Форма контроля	2 год				Параметры
		1	2	3	4	
Текущий	Самостоятельные работы			*	*	Проведение самостоятельных работ для контроля усвоения текущего учебного материала, 20 минут
	Контрольная работа			*		Письменная аудиторная контрольная работа, 80 минут
	Экзамен				*	Письменная экзаменационная работа, 80 минут

Контроль знаний осуществляется в следующих формах текущего контроля: самостоятельные работы в третьем и четвертом модуле, письменная аудиторная контрольная работа в третьем модуле, письменная экзаменационная работа продолжительностью 80 минут.

Для прохождения контроля студент должен продемонстрировать знания основных определений и формулировок теорем; умение решать стандартные задачи, аналогичные решаемым на семинарских занятиях. Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Итоговая оценка за курс выставляется по следующей формуле:

$$O_{итог.} = 0,05 \cdot O_{акт.} + 0,1 \cdot O_{ср1} + 0,1 \cdot O_{ср2} + 0,1 \cdot O_{ср3} + 0,25 \cdot O_{кр} + 0,4 \cdot O_{экз.}$$

Здесь $O_{акт.}$ – оценка активности студентов на семинарских занятиях (активность при решении задач на семинарах, разборе задач домашнего задания и т.д.); $O_{ср1}$, $O_{ср2}$, $O_{ср3}$ – оценки, полученные студентом по результатам аудиторных письменных самостоятельных работ, округленных по арифметическим правилам; $O_{кр}$ – оценка, полученная студентом за аудиторную письменную контрольную работу, округленная по арифметическим правилам; $O_{экз.}$ – оценка, полученная студентом за экзаменационную письменную работу, округленная по арифметическим правилам. Округление итоговой оценки также производится по арифметическим правилам.

Перевод в 5-балльную шкалу осуществляется по правилу:

Оценка по 10-балльной шкале	Оценка по 5-балльной шкале
0	неудовлетворительно
1	
2	
3	
4	удовлетворительно
5	
6	хорошо
7	
8	отлично
9	
10	

Блокирующие элементы контроля программой курса не предусмотрены, передача всех элементов контроля, кроме экзамена, не предусмотрена. Первая и вторая передача экзамена проходят по вариантам, аналогичным экзаменационным.

Студенты, пропустившие самостоятельные работы и/или контрольную работу по уважительной причине, имеют возможность их написания по окончании изучения дисциплины в 4-м модуле до начала экзаменационной сессии в специально назначенное время.

В диплом выставляется итоговая оценка по учебной дисциплине.

4. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Примеры заданий текущего и итогового контроля

- Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(-4, 2)$ и $B(3, -1)$.
- Среди прямых $3x - 2y + 7 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 5 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ укажите параллельные и перпендикулярные.
- Заданы прямая l и точка M .
Напишите уравнение прямой l' , проходящей через точку M параллельно прямой l .
а) $l: -2x + y - 1 = 0$, $M(-1, 2)$; б) $l: 2y + 1 = 0$, $M(1, 0)$; в) $l: x + y + 1 = 0$, $M(0, -1)$.
- Функции спроса и предложения имеют вид $Q_D = 75 - 3P$ и $Q_S = 10 + 0,5P$, соответственно.
а) Постройте кривую спроса и кривую предложения? Что можно сказать о их взаимном расположении?
б) Используя построенные кривые, найдите равновесную цену.
- Общие издержки производства x единиц некоторого товара описываются линейной функцией. Наблюдения показали, что в одном случае 100 единиц товара были произведены с затратами в \$200, а в другом случае издержки производства 150 единиц продукции составили \$275. Найдите функцию общих издержек этого производства и постройте ее график.
- Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.
Найдите:
а) $D = A + B$; б) $F = B + C$; в) $H = A \cdot B$; г) $M = A \cdot B \cdot C$; д) $K = 3A + B + C$;
е) $\det(D)$; ж) $\det(K)$.
- Найдите D^T , если:
$$D = A + C - 2B, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -5 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 8 \\ -3 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
- Вычислите произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
- Вычислите определители следующих матриц:
а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Решите следующие системы линейных уравнений графически и аналитически:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y = 2, \\ x - 2y = 2, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ 6x + 8y = 6. \end{cases}$$

11. Пусть функция предложения зерна на рынке имеет вид $Q = P - 125$, а функция спроса - $Q = 675 - P$. P – цена в рублях за 1 тонну, а Q – объем зерна в тоннах. Вычислите равновесную цену и равновесный объем. При цене 500 руб. за тонну на рынке будет дефицит зерна или его избыток? А при цене 200 руб. за тонну?

12. Функция спроса на хлеб имеет вид:

$$Q = 100 + 0,5I - 30P_1 + 20P_2, \text{ где } Q - \text{годовая величина спроса; } I - \text{доход; } P_1 - \text{цена хлеба; } P_2 - \text{цена макарон.}$$

Найдите:

а) функцию годового спроса на хлеб при доходе 10 тыс. руб. в месяц и цене макарон 250 руб. за 1 кг;

б) цену, при которой спрос на хлеб будет равен нулю.

Постройте кривую спроса на хлеб при заданных условиях.

13. Найдите область определения и множество значений функции:

1) Фирма «Прогресс», выпускающая компьютерную технику, провела опрос ведущих продавцов своей продукции и получила следующие сведения о спросе Q на свою продукцию в зависимости от цены P :

P , тыс. руб.	57	58	59	60	61
Q , тыс. шт.	26	24	19	14	7

2) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; 3) $f(x) = \sqrt{x - 5} + \sqrt{2 - x}$; 4) $f(x) = 5 + 4x - x^2$;

5) $f(x) = \log_{0,5}(x - 2)$; 6) $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ если } 0 \leq x < 3 \\ x^2 + 10x - 16, \text{ если } 3 \leq x \leq 8 \end{cases}$.

14. Найдите композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ следующих функций:

1) $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2$; 2) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$.

15. Постройте графики функций:

1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = (x - 5)^2 - 5(x - 5) + 6$; 3) $y = \sqrt{x - 2}$; 4) $y = 3^{x+2}$; 5) $y = \log_2(x - 1)$.

16. Постройте график таблично заданной функции:

Цена номера журнала, руб.	10	12,5	15	20	25	30	45	60
Кол-во проданных за день номеров журнала, тыс. шт.	7	6,5	6	5,5	4	2,5	1,5	0,5

17. Найдите пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x^2$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^5}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;

- 8) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$, если: а) $x_0 = -1$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \infty$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{5x} - x}$; 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-3} - \sqrt{x})$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{8x}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

18. Найдите производные функций:

- а) $y = 2x^7 - 5x^2 + 2\sqrt{x} + 1$; б) $y = 3x^4 - \frac{2}{x}$; в) $y = 3x^4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$;
- г) $y = (x^2 - 3x + 1) \cdot 2^x$; д) $y = x^2 \ln x$; е) $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+9}}$; ж) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$;
- з) $y = 3^{2x} \cdot \ln x$; и) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 3})$; к) $y = \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5\right)^4$; л) $y = x^2 \sin x$;
- м) $y = \sin 2x - \cos^2 x$.

19. Найдите y' и y'' для функций:

- а) $y = 5x^4 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 7^x$; б) $y = \frac{3x-11}{\ln x}$; в) $y = \operatorname{tg} x$.

20. Определите знак y' и знак y'' для функции $y=f(x)$ в точках x_1 и x_2 , если:

- а) $y = x^2 + 13x$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$; б) $y = \ln(\ln x)$, $x_1 = 2$, $x_2 = e$.

21. Средние издержки имеют вид $AC(Q) = Q^2 + 4Q + 1$. Найдите функцию издержек и предельные издержки при $Q = 1$.

22. Объем выпущенной заводом продукции Q и выручка R , полученная от ее реализации, связаны следующей зависимостью:

$$R(Q) = 10Q + \frac{3}{2}Q^2 - \frac{1}{15}Q^3.$$

Найдите предельную выручку и постройте ее график. Пользуясь этим графиком, определите, при каком объеме производства выручка максимальна (минимальна). Чему равна при этом предельная выручка?

23. Спрос D и предложение S изменяются по следующим законам:

$$D = \frac{100}{2P+1}, \quad S = \frac{P^2}{2P+1}.$$

Найдите цену, при которой спрос совпадает с предложением (цену равновесия). Рассчитайте эластичность спроса при этой цене.

24. Найдите пределы, применяя для раскрытия неопределенностей правило Лопиталья:

- а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 - 4x^2 + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 9x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$;
- е) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x^2}$; ж) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$; и) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x})$; к) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

25. Исследуйте функции и постройте их графики:

- а) $y = x^3 - 2x + 1$; б) $y = \frac{x^2 - 4}{2x}$; в) $y = x\sqrt{1-x}$; г) $y = \frac{2x}{\ln x}$; д) $y = e^{2x-x^2}$.

26. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x + 2\sqrt{-x}$ на отрезке $[-4; 0]$.

27. Функция суточного спроса Q на газету «Звезда Востока» (дес. тыс. шт.) в зависимости от цены P за один экземпляр (руб.) имеет вид $Q = 3 - \sqrt{P}$. При какой цене за экземпляр газеты совокупная выручка будет максимальной?

Указание: совокупная выручка TR (total revenue) определяется из соотношения $TR = Q \cdot P$, где Q (quantity) – количество реализованных экземпляров газеты (дес. тыс. шт.), P (price) – цена за один экземпляр (руб.).

28. ОАО «Новости» работает на конкурентном рынке газетно-журнальной продукции и занимается выпуском общественно-политического еженедельника «Новости Юго-Восточной Азии». Функция издержек выпуска еженедельника имеет вид

$$C(Q) = \frac{5}{3}Q^3 - \frac{5}{2}Q^2 \text{ (млн. руб.)}, \text{ где } Q \text{ – количество экземпляров (млн. шт.)}. \text{ Известно, что}$$

рыночная цена на данный вид печатной продукции установилась на уровне 10 руб. за один экземпляр, а также, что производственные мощности акционерного общества позволяют выпускать не более 2,5 млн. экземпляров еженедельно. Какой тираж еженедельника позволит открытому акционерному обществу «Новости» получать максимальную прибыль?

Указание: прибыль Π (profit) определяется как разность между совокупной выручкой TR , полученной от реализации Q единиц продукции и общими издержками C (costs), связанными с затратами на ее производство и реализацию. Таким образом, $\Pi(Q) = TR(Q) - C(Q) = P \cdot Q - C(Q)$.

29. Вычислите частные производные первого порядка и второго порядка в точке $(x_0; y_0)$:

а) $z = x + y$, $(x_0; y_0) = (1; -2)$;

б) $z = \frac{2}{13}x^{13} + 4xy^3$, $(x_0; y_0) = (-1; 0)$;

в) $z = 3x^2y^3 - \frac{1}{6}y^6$, $(x_0; y_0) = (4; 1)$;

г) $z = \sqrt{xy}$, $(x_0; y_0) = (4; 4)$;

д) $z = y\sqrt{x}$, $(x_0; y_0) = (9; 0)$;

е) $z = \frac{xy}{2x + y}$, $(x_0; y_0) = (-1; 3)$.

30. Постройте линии уровня функции $z = 1 + x_1 - x_2$.

31. Найдите все точки возможного экстремума функций и проверьте выполнение достаточных условий:

а) $z = x^3 - 8y^3 - 6xy + 1$; б) $f(x, y) = x^3 + y^6 - 3xy^2$.

32. Как финансовому консультанту The Journal of Important Stuff, Вам необходимо определить влияние на сбыт журнала количества страниц в номере, посвященных материалам об экономике (E), и количества страниц, посвященных материалам на другие темы (U). После детального анализа сбыта, Вы установили, что функция, описывающая зависимость между объемом продаж (S) и количеством страниц, посвященным экономике, а также другим интересным темам есть $S = 100U + 310E - \frac{1}{2}U^2 - 2E^2 - UE$.

Каковы Ваши рекомендации для оптимального сочетания количества страниц, посвященных экономике и другим темам?

33. Вы распределяете \$24 в неделю на покупку булочек и яблок в Вашем университетском кафетерии. Польза от потребления булочек и яблок описывается функцией $U(C, A) = 2C^{1/2} + A^{1/2}$. Булочка стоит \$1, а яблоко – \$0,5. Найдите оптимальное сочетание покупаемых булочек и яблок, чтобы Вы получали максимальную пользу.
34. Используя тождественные преобразования и таблицу основных интегралов, найдите следующие неопределенные интегралы:

а) $\int \left(3x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx;$

б) $\int \frac{2x+3}{x^4} dx;$

в) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^4} dx;$

г) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx;$

д) $\int \frac{2 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx;$

е) $\int 2^x (1 + 3x^2 \cdot 2^{-x}) dx.$

35. Предельные издержки производства x единиц некоторого товара описываются функцией $C'(x)$, которая имеет вид $C'(x) = 3x + 4$. Найдите функцию полных издержек, если фиксированные издержки составляют 40 единиц.

36. Найдите неопределенные интегралы с помощью метода подстановки (замены переменной):

а) $\int \frac{2x}{x^2+7} dx;$

б) $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx;$

в) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx;$

г) $\int \frac{e^x}{e^x-15} dx.$

37. Применяя формулу интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$, найдите следующие неопределенные интегралы:

а) $\int x e^{5x} dx;$

б) $\int x \ln(x+3) dx.$

38. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx;$

б) $\int_1^4 \sqrt{x} dx;$

$$в) \int_{-7}^{17} dx;$$

$$г) \int_2^5 \frac{dx}{x};$$

$$д) \int_0^3 2^x dx;$$

$$е) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx;$$

$$ж) \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

39. Вычислите определенный интеграл с помощью замены переменной:

$$а) \int_1^2 \frac{x dx}{1+x^2};$$

$$в) \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}};$$

$$б) \int_0^1 \frac{x^3+1}{(x^4+4x+2)^2} dx;$$

$$г) \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$$

40. Вычислите определенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$а) \int_1^e x \ln x dx; \quad б) \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

41. Найдите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$а) y = -2 + 3x - x^2, y=0; \quad б) y = 4x - x^2, y=0; \quad в) y = 32 - x^2, y = -4x;$$

$$г) y = \frac{x^2}{4}, y = 2\sqrt{x}.$$

42. Вычислите несобственный интеграл 1-го рода или установите его расходимость:

$$а) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}; \quad б) \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2}; \quad в) \int_0^{+\infty} \frac{3x^2}{x^3+1} dx; \quad г) \int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx; \quad д) \int_0^{+\infty} 2xe^{x^2} dx.$$

Демонстрационные варианты самостоятельных работ

Самостоятельная работа №1

1. Функция спроса на некоторый товар является линейной функцией. Кривая спроса отсекает от координатных осей P и Q отрезки длиной 2 и 3, соответственно.

а) (2 балла) Найдите функцию спроса.

б) (1 балл) Найдите угловой коэффициент в уравнении кривой спроса.

в) (2 балла) Постройте кривую спроса.

2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Вычислите:

а) (1 балл) $C = -2A + B$; б) (2 балла) $D = A^T \cdot C$; в) (2 балла) $\det D$.

Самостоятельная работа №2

1. (4 балла) Решите систему уравнений, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 8, \\ -x_1 + 4x_2 = -9. \end{cases}$$

2. (2 балла) Суммарные издержки имеют вид $C(Q) = 3Q - 4Q^2 + Q^3$. Найдите все такие значения Q , при которых средние издержки равны нулю.
3. (4 балла) Вычислите $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2 - 5}{3x^3 - x + 15}$.

Самостоятельная работа №3

1. (5 баллов) Найдите максимум функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x + \ln 5$.
2. (5 баллов) Является ли функция $y = (x + 4) \ln x$ выпуклой вверх на промежутке $(5; +\infty)$? Ответ обоснуйте.

Демонстрационный вариант контрольной работы

1. Функция предложения на некоторый товар имеет вид $Q_S = 2P + 15$, а функция спроса - $Q_D = -P + 17$.
- а) (0,5 балла) Найдите диапазон изменения цен.
- б) (0,5 балла) Найдите рыночное равновесие.
- в) (0,5 балла) Изобразите кривые спроса и предложения, укажите на построенном рисунке точку рыночного равновесия.
- г) (0,5 балла) Дефицит или избыток товара будет наблюдаться на рынке при цене $P = 10$ усл.ед? Вычислите его величину.
2. (1,5 балла) Решите систему линейных уравнений, применяя формулы Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

3. (1,5 балла) Найдите область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 9} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$.

Является ли эта функция четной или нечетной? Ответ обоснуйте.

4. (1,5 балла) Вычислите $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{x^2 - 16}$.

5. Пусть $f(x) = (x^2 + x) \cdot e^{x^2}$. Вычислите:

- а) (1 балл) $f'(0)$ и $df(0)$ при $\Delta x = 0,1$;
- б) (1 балл) приближенное значение $f(0,1)$, используя результат, полученный в пункте а);
- в) (0,5 балла) эластичность $E_x(f)$ функции f по переменной x при $x = 1$.
6. (1 балл) Средняя прибыль описывается функцией $A\pi(Q) = 4Q^2 - Q + 5$. Найдите функцию прибыли и предельную прибыль при $Q = 2$. Сравните среднюю прибыль и маржинальную (предельную) прибыль при $Q = 2$.

Демонстрационный вариант экзаменационной работы

1. а) (1 балл) Спрос D и предложение S изменяются по следующим законам:

$$D = \frac{14}{P+1}, \quad S = P + 6.$$

Найдите цену, при которой спрос совпадает с предложением (равновесную цену).

- б) (1 балл) Вычислите эластичность спроса при равновесной цене.

Каким является при этом спрос: эластичным, неэластичным или нейтральным? (Ответ обоснуйте).

2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- а) (1 балл) Найдите $C = A - 2B$.

- б) (1 балл) Вычислите $\det C$.

3. (1,5 балла) Найдите точки перегиба функции

$$y = (x + 2)^2(x - 1) + 2019.$$

4. а) (1,5 балла) Докажите, что точка $(1; -1)$ является критической точкой функции

$$z = -2x^3 + 3x^2 - 3y^2 - 6y.$$

- б) (1,5 балла) Проверьте, является ли она точкой локального экстремума.

Если является, то какого именно: максимума или минимума? Ответ обоснуйте.

5. а) (1 балл) Известно, что предельные издержки описываются функцией

$$MC(Q) = 16Q - 6Q^2 + 8Q^3 \text{ и } C(1) = 17.$$

Найдите функцию издержек $C(Q)$.

- б) (0,5 балла) Чему равны средние издержки $AC(Q)$ при $Q = 2$?

5. РЕСУРСЫ

5.1 Основная литература

1. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер [и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - 3-е изд. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 479 с. — (Серия «Золотой фонд российских учебников») - ISBN 978-5-238-00991-9. - URL: <http://proxylibrary.hse.ru:2133/catalog/product/1028709> - ЭБС znanium.com
2. Сборник задач по математике для ВТУЗов: в 4 ч.: учеб. пособие для ВТУЗов. Ч.1: Линейная алгебра и основы математического анализа / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов, и др.. – 1993 (или более поздние издания). – 479 с.

5.2. Дополнительная литература

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х ч.: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: Оникс: Мир и Образование, 2005 (или более поздние издания).
2. Ключин, В. Л. Высшая математика для экономистов: учебное пособие для бакалавриата и специалитета / В. Л. Ключин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва:

Издательство Юрайт, 2019. — 412 с. — URL:

<https://proxylibrary.hse.ru:2180/bcode/426126> - ЭБС Юрайт.

3. Ключин, В. Л. Высшая математика для экономистов. Задачи, тесты, упражнения : учебник и практикум / В. Л. Ключин. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 165 с. — (Серия : Бакалавр и специалист). — URL: <https://proxylibrary.hse.ru:2180/bcode/431841> - ЭБС Юрайт.
4. Красс, М. С. Математика в экономике. Базовый курс : учебник для бакалавров / М. С. Красс. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 470 с. — URL: <https://proxylibrary.hse.ru:2180/bcode/426158> - ЭБС Юрайт.

5.3. Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>

5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
	<i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i>	
1.	Консультант Плюс	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Электронно-библиотечная система Юрайт	URL: https://biblio-online.ru/
3.	Электронно-библиотечная система Znanium.com	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i> URL: https://znanium.com/
	<i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i>	
1.	Открытое образование	URL: https://openedu.ru/

5.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

– ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);

- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося), а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1.1. *для лиц с нарушениями зрения:* в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.2. *для лиц с нарушениями слуха:* в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.3. *для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:* в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.