

**Программа учебной дисциплины
Анализ временных рядов**

Утверждена
Академическим советом ООП
Протокол № от «__» _____ 20__ г.

Автор	Канторович Г.Г., к.ф-м.н, доцент, gkantorovich@hse.ru
Число кредитов	6
Контактная работа (час.)	76
Самостоятельная работа (час.)	152
Курс	Магистратура, 1-й год. Модули 3 - 4
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Область применения и нормативные ссылки. Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента, и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов, обучающихся по магистерской программе " Прикладная экономика". Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”» для направления 38.04.01 Экономика подготовки магистра;
- Образовательной программой 38.04.01 «Экономика» подготовки магистра;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 38.04.01 Экономика» подготовки магистра утвержденным в 2019 г.

Курс "Анализ временных рядов" является курсом по выбору, и рассчитан, в первую очередь, на студентов 1-го курса магистерской программы «Прикладная экономика», а также студентов иных магистерских программ.

Материал курса предназначен для использования в курсах, связанных с количественным анализом динамики реальных экономических явлений, таких как, например, макроэкономика, прикладная макроэкономика, теория финансов и других. Он может быть использован в спецкурсах по теории случайных процессов, математическим моделям в экономике, оптимальному управлению, статистическому прогнозированию, применению методов теории вероятностей в финансовой математике, принятию решений в условиях неопределенности.

Требования к студентам: курс "Анализ временных рядов" рассчитан на студентов, прослушавших курс математического анализа (включающий дифференциальное и интегральное исчисление), курс разностных уравнений, а также курсы линейной алгебры, методов оптимальных решений, экономической статистики, теории вероятностей и математической статистики, эконометрики.

В результате освоения дисциплины студент:

1. СК-1, СК-М1. Способен оценивать и перерабатывать освоенные научные методы и способы деятельности;
2. СК-2, СК-М2. Способен предлагать концепции, модели, изобретать и апробировать способы и инструменты профессиональной деятельности;
3. СК-6, СК-М6. Способен анализировать, верифицировать, оценивать полноту информации в ходе профессиональной деятельности, при необходимости восполнять и синтезировать недостающую информацию и работать в условиях неопределенности;
4. СК-8, СК-М8. Способен вести профессиональную, в том числе научно-исследовательскую деятельность в международной среде;
5. ПК-5, ИК-М.6.2ПД_5.4 СЛК-М3; СЛК-М9, способен ставить задачу и принимать

решение с учетом возможных рисков и последствий, разрабатывать соответствующие методические и нормативные документы, а также предложения и мероприятия по реализации разработанных проектов и программ;

6. ПК-8, ИК-М3.1АД_5.4, способен готовить аналитические материалы для оценки мероприятий в области экономической политики и принятия стратегических решений на микро- и макроуровне;

7. ПК-9, ИК-М4.1_4.4_4.6_АД_5.4, способен находить данные, необходимые для анализа и проведения экономических расчетов, используя различные источники информации;

8. ПК-10, ИК-М4.4АД_5.4, способен работать с большими массивами разнообразной информации, составлять прогноз основных социально-экономических показателей деятельности предприятия, отрасли, региона и экономики в целом, в т. ч. используя современные информационно-компьютерные технологии;

II. Содержание УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Понятие случайного (стохастического) процесса. Временной ряд, как дискретный случайный процесс. Слабо и сильно стационарные случайные процессы. Характеристики случайных процессов (математическое ожидание, дисперсия, автоковариационная и автокорреляционная функции). Теорема (декомпозиция) Вольда. Оператор лага.
2. Модели скользящего среднего $MA(q)$. Условие обратимости. Модели авторегрессии $AR(p)$. Уравнения Юла-Уокера. Разностные уравнения. Условие стационарности. Модели авторегрессии-скользящего среднего $ARMA(p, q)$. Автокорреляционная и частная автокорреляционная функции.
3. Оценивание коэффициентов авторегрессионных моделей. Оценивание коэффициентов моделей скользящего среднего методами наибольшего правдоподобия и поиска на сетке. Оценивание коэффициентов процессов $ARMA(p)$. Качество подгонки моделей временных рядов. Информационные критерии Акаике (AIC) и Шварца (BIC). "Портмонта"-статистика. Подход Бокса-Дженкинса к идентификации моделей стационарных временных рядов.
4. Прогнозирование в модели Бокса-Дженкинса. Тренд и сезонность в модели Бокса-Дженкинса. Коэффициент множественной детерминации в моделях временных рядов.
5. Нестационарные временные ряды. Случайное блуждание. Ряды с нестационарной дисперсией. Нестационарное среднее. Процессы, приводимые к стационарным, выделением тренда (TSP) и взятием последовательных разностей (DSP). Модели $ARIMA(p, 1, q)$. Подход Бокса-Дженкинса к определению степени интеграции временного ряда. Тест Дикки-Фуллера на наличие единичного корня.
6. Кажущиеся тренды и регрессионные зависимости. Распределение тестовой статистики Дикки-Фуллера. Теорема Донскера. Мощность теста Дикки-Фуллера и выбор альтернативной гипотезы. ADF тест и выбор числа лагов. Непараметрический тест Филлипса и Перрона. Альтернативные тесты на единичные корни. Тест КПСС.
7. Тесты на единичные корни со структурными сдвигами. Тест Перрона (с экзогенным структурным сдвигом). Тест Эндрюса-Живота (с эндогенным структурным сдвигом). Тесты на единичные корни с множественными структурными сдвигами.
8. Методика исследования типа нестационарности временного ряда TS или DS . Другие типы нестационарных процессов. Использование специализированного компьютерного пакета *Eviews*. Сегментированные тренды и структурные изменения.
9. Регрессионные динамические модели. Авторегрессионные модели с распределенными лагами (ADL). Понятие экзогенности. Слабая, сильная и супер-экзогенность переменных. Причинность по Грэнджеру (*Granger causality*).
10. Коинтеграция временных рядов. Коинтеграция и модель коррекции ошибками (*Error Correction Model*).
11. Многомерные временные ряды. Структурная и приведенная формы многомерных моделей. Модели векторной авторегрессии (VAR). Стационарность VAR -моделей. Оценивание коэффициентов VAR моделей. Тестирование VAR моделей.
12. Структурные модели векторной авторегрессии ($SVAR$). Методы введения ограничений. Функции импульсных откликов. Интерпретация результатов. Декомпозиция дисперсии ошибок прогноза.

13. Коинтеграция временных рядов. Коинтеграционная регрессия. Тестирование коинтеграции. Тест Йохансена. Модели векторных коррекций ошибками (VECM). Структурные модели векторных коррекций ошибками (SVECM). Теорема Гренджера о представлении.
14. Проверка гипотезы о рациональных ожиданиях. Проверка гипотезы об эффективности рынка. Общие множители и общие тренды.
15. Модели с условной гетероскедастичностью. Тестирование на наличие условной гетероскедастичности. ARCH, GARCH, EGARCH модели.
16. Многомерные модели условной гетероскедастичности.

Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов по дисциплине	Контактная работа	Самостоятельная работа
1	Временной ряд, как дискретный случайный процесс. Стационарность случайных процессов	21	8	13
2	Модели авторегрессии-скользящего среднего ARMA (p, q). Автокорреляционные и частные автокорреляционные функции.	21	8	13
3	Оценивание коэффициентов процессов ARMA (p, q). Информационные критерии.	21	8	13
4	Прогнозирование в модели Бокса-Дженкинса	21	8	13
5	Нестационарные временные ряды. Кажущаяся регрессия. Подход Бокса-Дженкинса к определению степени интеграции временного ряда.	21	8	13
7	Тесты на единичные корни: тесты Дикки-Фуллера, Филлипса-Перрона, KPSS и др.	13	4	9
8	Единичные корни и структурные сдвиги: Тесты Перрона и Зивота-Эндрюса.	10	4	6
9	Методика исследования типа нестационарности временного ряда TSP или DSP. Другие типы нестационарных процессов.	10	4	6
10	Авторегрессионные модели с распределенными лагами. Понятие экзогенности (слабой, сильной, супер-). Причинность по Грэнджеру	7	2	5
11	Коинтеграция временных рядов. Коинтеграционная регрессия. Общие множители и тренды. Модели коррекции ошибками.	13	4	9

12	Многомерные временные ряды. Структурная и приведенная формы многомерных моделей. Модели векторной авторегрессии (VAR). Стационарность VAR-моделей. Оценивание коэффициентов VAR моделей. Тестирование VAR моделей.	28	10	18
13	Структурные модели векторной авторегрессии (SVAR). Функции импульсных откликов. Декомпозиция дисперсий ошибок прогноза. Векторные модели коррекции ошибками (VECM). Структурные векторные модели коррекции ошибками (SVECM). Теорема Гренджера о представлении.	18	8	10
14	Нелинейные модели временных рядов: ARCH, GARCH и др.	9	4	5
	Итого:	216	80	136

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Предусмотрена сдача одного домашнего задания в каждом из модулей. В конце 3-го модуля проводится контрольная работа. Форма финального контроля – письменный экзамен. Итоговая оценка проставляется по 10 бальной системе.

Необходимым условием отличной оценки на экзамене является отлично выполненные домашние задания (по 10% итоговой оценки каждое), полное владение теоретическим материалом, отлично выполненная контрольная работа (20% итоговой оценки), отлично выполненная экзаменационная работа (60% итоговой оценки). Необходимым условием хорошей оценки на экзамене является твердое знание основ курса, сдача домашнего задания, хорошо написанная экзаменационная работа.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Тематика заданий по различным формам текущего контроля:

Задание № 1.

- А). Дайте определения слабо и строго стационарного дискретного стохастического процесса.
 Б). Является ли процесс $y_t = 1 + y_{t-1} - 0,5y_{t-2} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \approx WN(0, \sigma^2)$ стационарным в широком смысле? Почему?
 В). Является ли процесс $y_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$, $\varepsilon_t \approx WN(0, \sigma^2)$ стационарным второго порядка? Почему?

Задание № 2.

- А). Выведите автокорреляционную функцию и посчитайте первые пять автокорреляций и частных автокорреляций процесса
- $$y_t = 0,6y_{t-1} - 0,2y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \approx WN(0, \sigma^2), \quad E(\varepsilon_{t-i}y_{t-s}) = 0 \quad (\forall s \geq 1, \forall i < s).$$
- Б). Опишите основные свойства автокорреляционной и частной автокорреляционной функций процессов AR(p) и MA(q).
 В). Два первых значения выборочной автокорреляционной функции ряда из 226 наблюдений составили 0,7 и 0,5 соответственно. Рассчитайте первые два значения выборочной частной

автокорреляционной функции.

Напоминание: k -е значение выборочной частной автокорреляционной функции – это МНК-оценка ϕ_{kk} и регрессии $y_t = \phi_{k1}y_{t-1} + K + \phi_{kk}y_{t-k} + e_t$.

Задание № 3.

Для процессов

А). MA(1): $y_t = 1 + \varepsilon_t + 0,5\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \approx WN(0, \sigma^2)$, $y_T = 2,6$, $\varepsilon_t = 1,2$;

Б). ARMA(1, 1): $y_t = 1 + 0,6y_{t-1} + \varepsilon_t + 0,6\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \approx WN(0, \sigma^2)$, $y_T = 2$, $\varepsilon_t = 0,5$

постройте прогноз на h ($h=1, 2, 3, \dots$) шагов вперед. Вычислите дисперсию ошибки прогнозирования.

Задание № 4.

В таблице 1 приведены значения выборочных автокорреляционной и частной автокорреляционной функций темпа роста ИПЦ РФ за период с сентября 1992 по декабрь 2000 года включительно.

- А). Какой вывод можно сделать о типе процесса (в терминах ARIMA(p, d, q)), описывающего ряд темпа роста ИПЦ? Поясните ответ.
 Б). Какие выводы можно сделать, основываясь на значениях Q-статистики? Дайте развернутый ответ.

В таблице 2 приведены значения информационных критериев Акаике и Шварца для моделей ARMA(p, q) ($p \leq 2, q \leq 2$).

В). Выберите модель, наилучшим образом оценивающую темп роста ИПЦ, с точки зрения информационных критериев. Поясните Ваш выбор.

Таблица 1

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.299	-0.299	9.2340	0.002
2	-0.099	-0.208	10.261	0.006
3	0.120	0.025	11.776	0.008
4	-0.010	0.024	11.787	0.019
5	-0.082	-0.059	12.508	0.028
6	-0.044	-0.110	12.721	0.048
7	-0.011	-0.097	12.735	0.079
8	0.000	-0.048	12.735	0.121
9	0.014	0.003	12.757	0.174
10	0.023	0.031	12.816	0.234
11	-0.033	-0.029	12.941	0.297
12	0.008	-0.031	12.949	0.373
13	-0.044	-0.087	13.181	0.434
14	0.006	-0.042	13.185	0.512
15	0.023	0.008	13.251	0.583
16	0.010	0.035	13.264	0.653
17	-0.026	-0.014	13.349	0.713
18	-0.014	-0.055	13.372	0.769
19	-0.044	-0.111	13.613	0.806
20	0.006	-0.063	13.617	0.849
21	0.006	-0.015	13.621	0.885
22	0.017	0.032	13.658	0.913
23	0.017	0.033	13.697	0.935
24	0.041	0.038	13.927	0.948
25	0.012	0.013	13.945	0.963

Таблица 2

Критерий	p\q	0	1	2
	0		-3,4040	-3,4164

<i>AIC</i>	1	-3,2774	-3,4312	-3,3848
	2	-3,4083	-3,3884	-3,3939
<i>BIC</i>	0		-3,3519	-3,3904
	1	-3,3513	-3,3791	-3,3066
	2	-3,3562	-3,3103	-3,2897

Задание № 5.

В таблицах 3, 6 приведены оценки моделей (1 и 2) $ARMA(p, q)$ для темпа роста ИПЦ РФ за период 09:1992–12:2000.

А). Запишите уравнения, соответствующие каждой модели.

В таблицах 4, 5, 7, 8 и на графиках 1, 2 приведены результаты различных тестов для остатков в моделях 1 и 2.

Б). Какие гипотезы проверяются при помощи каждого из этих тестов?

В). Что Вы можете сказать об остатках каждой модели, опираясь на результаты тестов? Можно ли сказать, что остатки являются «белым шумом»?

Г). Исходя из выводов, сделанных в пункте В, что можно сказать об адекватности построенных моделей?

Таблица 3: Модель 1

Dependent Variable: CPIGR				
Method: Least Squares				
Included observations: 100				
Convergence achieved after 7 iterations				
Backcast: 1992:08				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.425843	0.157574	2.702501	0.0081
MA(1)	-0.787388	0.106920	-7.364257	0.0000
R-squared	0.155539	Mean dependent var		0.000332
Adjusted R-squared	0.146922	S.D. dependent var		0.046654
S.E. of regression	0.043091	Akaike info criterion		-3.431218
Sum squared resid	0.181968	Schwarz criterion		-3.379115
Log likelihood	173.5609	Durbin-Watson stat		2.097771
Inverted AR Roots				.43
Inverted MA Roots				.79

Таблица 4: ACF, PACF и Q-статистики для остатков модели 1

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.050	-0.050	0.2564	
2	0.031	0.028	0.3545	
3	0.170	0.174	3.3970	0.065
4	0.031	0.049	3.4998	0.174
5	-0.061	-0.070	3.8974	0.273
6	-0.048	-0.092	4.1502	0.386
7	-0.029	-0.049	4.2454	0.515
8	-0.018	0.005	4.2826	0.638
9	-0.008	0.027	4.2890	0.746
10	-0.002	0.017	4.2893	0.830
11	-0.046	-0.052	4.5305	0.873
12	-0.007	-0.028	4.5361	0.920
13	-0.043	-0.052	4.7500	0.943
14	0.003	0.016	4.7513	0.966
15	0.019	0.040	4.7958	0.979
16	0.002	0.020	4.7962	0.988

17	-0.020	-0.032	4.8468	0.993
18	-0.020	-0.053	4.8985	0.996
19	-0.045	-0.066	5.1584	0.997
20	0.006	0.015	5.1636	0.999
21	0.020	0.055	5.2141	0.999
22	0.038	0.072	5.3993	0.999
23	0.041	0.039	5.6167	1.000
24	0.053	0.018	5.9980	1.000
25	0.021	-0.016	6.0607	1.000

Таблица 5: Тест Бройша-Годфри для остатков модели 1

F-statistic	0.503982	Probability	0.916389	
Obs*R-squared	7.104042	Probability	0.896710	
Test Equation:				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.356824	0.671489	0.531392	0.5965
MA(1)	-0.309720	0.281625	-1.099761	0.2745
RESID(-1)	-0.132986	0.669012	-0.198780	0.8429
RESID(-2)	0.127342	0.331528	0.384107	0.7019
RESID(-3)	0.320325	0.211240	1.516402	0.1331
RESID(-4)	0.180434	0.170596	1.057671	0.2932
RESID(-5)	0.024304	0.150351	0.161648	0.8720
RESID(-6)	-0.025914	0.136706	-0.189563	0.8501
RESID(-7)	0.009773	0.127160	0.076856	0.9389
RESID(-8)	0.066268	0.120190	0.551363	0.5828
RESID(-9)	0.080387	0.116076	0.692533	0.4905
RESID(-10)	0.058295	0.114098	0.510917	0.6107
RESID(-11)	-0.022076	0.111056	-0.198787	0.8429
RESID(-12)	-0.008309	0.109898	-0.075605	0.9399
RESID(-13)	-0.034726	0.108771	-0.319258	0.7503
R-squared	0.071040	Mean dependent var	-0.001012	
Adjusted R-squared	-0.081965	S.D. dependent var	0.042861	
S.E. of regression	0.044582	Akaike info criterion	-3.245472	
Sum squared resid	0.168946	Schwarz criterion	-2.854696	
Log likelihood	177.2736	Durbin-Watson stat	1.985118	

График 1: Тест Харке-Бера для остатков модели

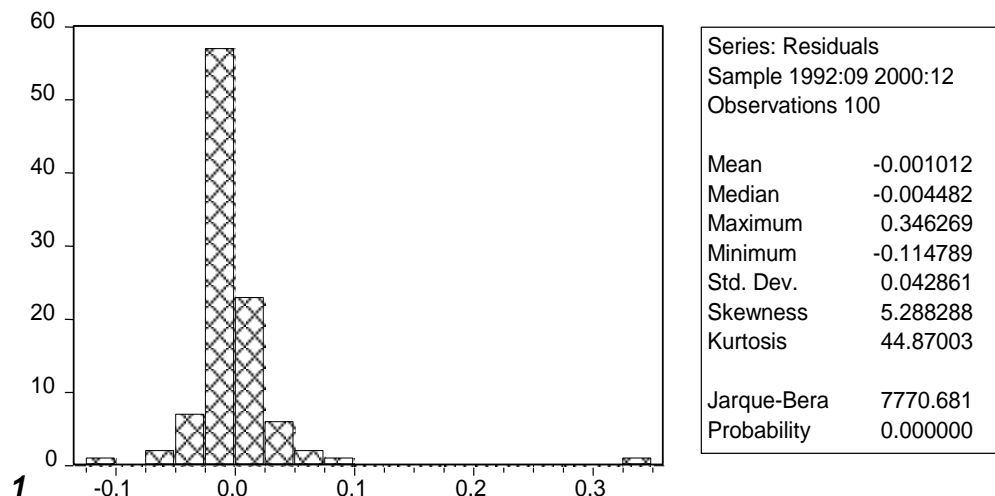


Таблица 6: Модель 2

Dependent Variable: CPIGR				
Method: Least Squares				
Included observations: 100				
Convergence achieved after 7 iterations				
Backcast: 1992:08				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.421104	0.089630	-4.698255	0.0000
R-squared	0.125637	Mean dependent var		0.000332
Adjusted R-squared	0.125637	S.D. dependent var		0.046654
S.E. of regression	0.043625	Akaike info criterion		-3.416420
Sum squared resid	0.188411	Schwarz criterion		-3.390369
Log likelihood	171.8210	Durbin-Watson stat		1.912277
Inverted MA Roots	.42			

Таблица 7: ACF, PACF и Q-статистики для остатков модели 2

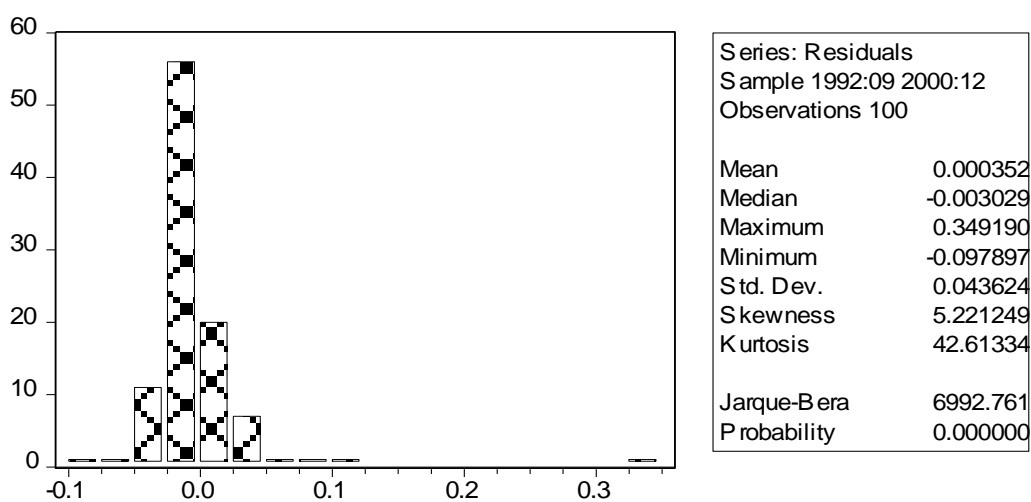
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.043	0.043	0.1928	
2	-0.050	-0.052	0.4514	0.502
3	0.091	0.096	1.3294	0.514
4	-0.022	-0.034	1.3801	0.710
5	-0.124	-0.113	3.0386	0.551
6	-0.104	-0.107	4.2153	0.519
7	-0.053	-0.053	4.5218	0.606
8	-0.014	0.000	4.5446	0.715
9	0.012	0.021	4.5596	0.803
10	0.012	0.001	4.5753	0.870
11	-0.038	-0.065	4.7402	0.908
12	-0.022	-0.047	4.7983	0.941
13	-0.050	-0.070	5.0960	0.955
14	-0.002	0.009	5.0962	0.973
15	0.025	0.028	5.1686	0.983
16	0.002	0.003	5.1694	0.991
17	-0.038	-0.061	5.3496	0.994
18	-0.047	-0.083	5.6295	0.995
19	-0.063	-0.089	6.1348	0.996
20	-0.010	-0.003	6.1466	0.998
21	0.019	0.032	6.1913	0.999
22	0.045	0.052	6.4568	0.999
23	0.060	0.032	6.9295	0.999
24	0.075	0.025	7.6897	0.999
25	0.043	0.002	7.9406	0.999

Таблица 8: Тест Бройша-Годфри для остатков модели 2

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:				
F-statistic	0.542026	Probability		0.891722
Obs*R-squared	7.566852	Probability		0.870630
Test Equation:				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.737316	0.506569	-1.455510	0.1492
RESID(-1)	0.752896	0.510854	1.473799	0.1442
RESID(-2)	0.248064	0.235433	1.053648	0.2950
RESID(-3)	0.230338	0.137823	1.671267	0.0983
RESID(-4)	0.027926	0.113141	0.246824	0.8056
RESID(-5)	-0.096674	0.107877	-0.896143	0.3727
RESID(-6)	-0.115786	0.107652	-1.075559	0.2851

RESID(-7)	-0.065404	0.108137	-0.604829	0.5469
RESID(-8)	-0.003121	0.107583	-0.029013	0.9769
RESID(-9)	0.020794	0.106805	0.194688	0.8461
RESID(-10)	0.008007	0.106808	0.074964	0.9404
RESID(-11)	-0.067815	0.106266	-0.638164	0.5251
RESID(-12)	-0.046712	0.106379	-0.439106	0.6617
RESID(-13)	-0.071467	0.106460	-0.671299	0.5038
R-squared	0.075669	Mean dependent var	0.000352	
Adjusted R-squared	-0.064056	S.D. dependent var	0.043624	
S.E. of regression	0.044999	Akaike info criterion	-3.235171	
Sum squared resid	0.174143	Schwarz criterion	-2.870447	
Log likelihood	175.7585	Durbin-Watson stat	2.060491	

График 2: Тест Харке-Бера для остатков модели 2



Задание 6.

Рассмотрим DGP:

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t, y_t = y_{t-1} + u_t, \varepsilon_t \sim iid WN(0, \sigma_\varepsilon^2), u_t \sim iid WN(0, \sigma_u^2), t = 1, \dots, 200.$$

Была оценена с помощью МНК модель: $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, t = 1, \dots, 200$. И для остатков последней модели, e_t , была оценена следующая регрессия (в скобках даны стандартные ошибки коэффициентов):

$$\Delta e_t = -0.23e_{t-1} + 0.1\Delta e_{t-1} + 0.24\Delta e_{t-2} + v_t, v_t \sim WN(0, \sigma^2), t = 1, \dots, 200. \quad (0.14) \quad (0.05) \quad (0.17)$$

На 5% уровне значимости проверьте гипотезу об отсутствии коинтеграции. Поясните подробно, как именно Вы должны провести тест Энгла-Гренджера в данной ситуации.

Задание 7.

Укажите, какие из следующих процессов являются коинтегрированными и, где это возможно, запишите коинтегрирующие соотношения:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$x_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

$$k_t = -2y_{t-1} + 3\varepsilon_t$$

$$r_t = 0.4r_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$z_t = \lambda + \gamma t + \varepsilon_t, \text{ где } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Задание 8.

Рассмотрим следующий VAR(2) процесс:

$$y_{1t} = 0.3y_{1t-1} + 0.8y_{2t-1} + \varepsilon_{1t}, \text{ где}$$

$$y_{2t} = 0.9y_{1t-1} + 0.4y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

$E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{1\tau}) = 1$ для $t = \tau$ и 0 иначе, $E(\varepsilon_{2t}\varepsilon_{2\tau}) = 2$ для $t = \tau$ и 0 иначе, и $E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2\tau}) = 0$ для любых t и τ . Ответьте на следующие вопросы:

- 1) Является ли данный процесс стационарным?
- 2) Посчитайте $\psi_s = \frac{\partial y_{t+s}}{\partial \varepsilon_t}$ для $s = 0, 1$, и 2. Чему равно ψ_s при $s \rightarrow \infty$?
- 3) Посчитайте, какая доля дисперсии ошибки прогноза переменной y_{1t} на два шага вперед, $E\left[y_{1,t+2} - E(y_{1,t+2} | y_t, y_{t-1}, \dots)\right]^2$, приходится на шоки в $\varepsilon_{1,t+1}$ и $\varepsilon_{1,t+2}$.

Задание 9.

Рассмотрим стационарный VAR(1) процесс:

$$\begin{aligned} y_t &= \varphi_{yy}y_{t-1} + \varphi_{yx}x_{t-1} + \varepsilon_{yt} \\ x_t &= \varphi_{xy}y_{t-1} + \varphi_{xx}x_{t-1} + \varepsilon_{xt} \end{aligned}$$

$\varepsilon_t \sim$ многомерный белый шум, $E(\varepsilon_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\text{Var}(\varepsilon_t) = \Omega_t$

и его VMA представление:

$$X_t = C(L)\varepsilon_t, \text{ где } C(L) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i L^i.$$

- 1) Выразите коэффициенты VMA представление через коэффициенты VAR процесса.
- 2) Предположим дополнительно, что ковариационная матрица $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & \gamma \\ \gamma & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$.
Найдите какую-нибудь нижнетреугольную матрицу H , такую что $H\varepsilon_t = u_t$, и $E(u_t u_t') = D$ где D – диагональная матрица (не единичная).

Задание 10.

Рассмотрим процесс ARIMA(0,0,0) – ARCH(1):

$$y_t = \varepsilon_t \sqrt{\sigma_t^2}, \sigma_t^2 = w + \alpha y_{t-1}^2, \varepsilon_t \sim IIDN(0,1).$$

Найдите безусловное математическое ожидание, безусловную дисперсию и автоковариацию этого процесса.

Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

1. Понятие слабо стационарного случайного процесса. Характеристики случайных процессов (математическое ожидание, дисперсия, автоковариационная и автокорреляционная функции). Теорема Вольда. Оператор лага. Примеры.
2. Модели скользящего среднего MA(q). Условие обратимости. Примеры. Влияние необратимости на результаты тестов.
3. Модели авторегрессии AR(p). Уравнения Юла-Уокера. Разностные уравнения. Условие стационарности. Примеры. Последствия нестационарности.
4. Модели авторегрессии-скользящего среднего ARMA(p,q). Автокорреляционная и частная автокорреляционная функции. Примеры.
5. Оценивание коэффициентов авторегрессионных моделей. Оценивание коэффициентов моделей скользящего среднего методами наибольшего правдоподобия и поиска на сетке. МНК оценки. Пример: AR(1) и MA(1).
6. Оценивание коэффициентов процессов ARMA(p). Пример: процесс ARMA(1, 1).
7. Качество подгонки моделей временных рядов. Информационные критерии Акаике (AIC) и Шварца (BIC). "Портмонто"-статистика. Подход Бокса-Дженкинса к идентификации моделей стационарных временных рядов.
8. Прогнозирование в модели Бокса-Дженкинса. Тренд и сезонность в модели Бокса-Дженкинса. Коэффициент множественной детерминации в моделях временных рядов.
9. Нестационарные временные ряды. Случайное блуждание. Ряды с нестационарной дисперсией. Графики и коррелограммы типичных нестационарных процессов.
10. Нестационарное среднее. Процессы, приводимые к стационарным, выделением тренда (TSP) и

- взятием последовательных разностей (*DSP*). Графики и коррелограммы типичных нестационарных процессов.
11. Модели ARIMA ($p, 1, q$). Подход Бокса-Дженкинса к определению степени интеграции временного ряда. Недостатки и аналоги подхода Бокса-Дженкинса.
 12. Кажущиеся тренды и регрессионные зависимости.
 13. Тест Дикки-Фуллера на наличие единичных корней.
 14. Мощность теста Дикки-Фуллера и выбор альтернативной гипотезы.
 15. ADF тест и выбор числа лагов. Выбор формы теста. Влияние необратимости MA части на результаты ADF теста.
 16. Проблема наличия нескольких единичных корней.
 17. Виды единичных корней.
 18. Непараметрический тест Филлипса и Перрона.
 19. Альтернативные тесты на единичные корни. Тест КПСС.
 20. Тесты на единичные корни со структурными сдвигами. Тест Перрона (с экзогенным структурным сдвигом).
 21. Тест Эндрюса-Живота (с эндогенным структурным сдвигом). Тесты на единичные корни со множественными структурными сдвигами.
 22. Методика исследования ряда со структурным сдвигом и ряда с единичным корнем.
 23. Методика исследования типа нестационарности временного ряда *TS* или *DS*. Использование специализированного компьютерного пакета *Eviews*.
 24. Регрессионные динамические модели. Авторегрессионные модели с распределенными лагами (*ADL*). Виды моделей, применение в практических исследованиях.
 25. Причинность по Грэнджеру (*Granger causality*). Корреляция и причинно-следственная взаимосвязь.
 26. Коинтеграция временных рядов. Связь корреляции и коинтеграции временных рядов.
 27. Коинтеграция и модель коррекции ошибками (*Error Correction Model*). Тестирование коинтеграции.
 28. Многомерные временные ряды. Структурная и приведенная формы многомерных моделей. Модели векторной авторегрессии (*VAR*). Проблема общих множителей для *VARIMA* моделей. Стационарность *VAR* моделей. Оценивание коэффициентов *VAR* моделей. Тестирование *VAR* моделей.
 29. Структурные модели векторных авторегрессий (*SVAR*). Методы введения ограничений. *A, B* и *AB* модели. Функции импульсных откликов. Интерпретация, применение на практике. Декомпозиции дисперсий ошибок прогноза.
 30. Тест Йохансена. Модели векторной коррекции ошибками (*VECM*).
 31. Теорема Грэнджера о представлении. Структурные модели векторной коррекции ошибками (*SVECM*).
 32. Кластеризация волатильности и условная гетероскедастичность. *GARCH* модель и ее обобщения. Применение на практике.

V. РЕСУРСЫ

Основная литература

1. Канторович Г.Г., Лекции по курсу «Анализ временных рядов», Экономический журнал ВШЭ, №№1-4, 2002, №1, 2003.

https://ej.hse.ru/data/2010/12/31/1208182144/06_01_06.pdf

https://ej.hse.ru/data/2010/12/31/1208182168/06_02_07.pdf

https://ej.hse.ru/data/2010/12/31/1208182146/06_04_06.pdf

https://ej.hse.ru/data/2010/12/31/1208182146/06_04_06.pdf

https://ej.hse.ru/data/2010/12/31/1208182172/07_01_06.pdf

2. Mills, T.C. 1999, *The Econometric Modelling of Financial Time Series*, Cambridge University Press, 1st ed. (или более поздние издания)

Дополнительная литература

3. Johnston Jack, *Econometric Methods*, New York, Mc-Grow Hill, 1997 (или более поздние издания)
4. Hamilton J.D. *Time Series Analysis*, Princeton, Princeton University Press, 1994 (или более поздние издания)

1. **Программное обеспечение**

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Microsoft Office Professional 2010	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
3.	STATA	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
4.	EViews	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>

2. **Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)**

№ п/п	Наименование	Условия доступа
<i>Информационно-справочные системы</i>		
1.	Электронно-библиотечная система ВШЭ	https://library.hse.ru/ https://library.hse.ru/e-resources

3. **Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для лабораторных и самостоятельных занятий по дисциплине оснащены компьютерами с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.