

**Программа учебной дисциплины «Асимптотические методы в дискретных задачах»**

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол №3 от «20» июня 2019 г.

Автор	Е. В. Выборный, к.ф.-м.н., доцент
Число кредитов	4
Контактная работа (час.)	60
Самостоятельная работа (час.)	92
Курс	1
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

**1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты**

Целями освоения дисциплины «Асимптотические методы в дискретных задачах» являются освоение основных методов построения асимптотик в задачах дискретной математики; получение навыков по применению методов дисциплины в различных задачах комбинаторики; знакомство с новейшими результатами и актуальными задачами данной дисциплины.

В результате освоения дисциплины студент должен:

**знать:**

- основные методы построения асимптотик в задачах дискретной математики;

**уметь:**

-проводить детальное исследование и строить асимптотические оценки для последовательностей, рекуррентностей, сумм, произведений и других объектов дискретной математики;

**владеть:**

-навыками применения методов дисциплины при исследовании конкретных задач комбинаторики.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- Математический анализ;
- Дискретная математика;
- Теория функций комплексной переменной.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Современные методы анализа данных: анализ нелинейных и многофазных процессов

## 2. Содержание учебной дисциплины

Тема (раздел дисциплины)	Объем в часах	Планируемые результаты обучения (ПРО), подлежащие контролю	Формы контроля
	лк		
	см		
	онл/ср		
Тема 1. Введение в асимптотические методы	6	Знание теории и умение решать задачи по данной теме.	Текущий контроль и итоговый экзамен
	8		
	18		
Тема 2. Элементарные асимптотики в комбинаторных задачах	6	Знание теории и умение решать задачи по данной теме.	Текущий контроль и итоговый экзамен
	8		
	18		
Тема 3. Методы построения асимптотических оценок для сумм	4	Знание теории и умение решать задачи по данной теме.	Текущий контроль и итоговый экзамен
	8		
	18		
Тема 4. Методы оценок рекуррентных последовательностей	4	Знание теории и умение решать задачи по данной теме.	Текущий контроль и итоговый экзамен
	6		
	18		
Тема 5. Производящие функции	4	Знание теории и умение решать задачи по данной теме.	Текущий контроль и итоговый экзамен
	6		
	20		
<b>Часов по видам учебных занятий:</b>	24		
	36		
	92		
<b>Итого часов:</b>	152		

### *Тема 1. Введение в асимптотические методы*

Асимптотические оценки. Асимптотическое разложение по Пуанкаре. Различные асимптотические шкалы. Элементарные действия над асимптотиками. Простейшие примеры построения асимптотических формул, для явно заданных функций. Итерационный метод получения асимптотических оценок. Асимптотика корней трансцендентных уравнений.

### *Тема 2. Элементарные асимптотики в комбинаторных задачах*

Построение оценок для факториала и биномиальных коэффициентов, формула Стирлинга. Асимптотики решений комбинаторных задач о сочетаниях и размещениях. Асимптотические методы в задачах на графах.

### *Тема 3. Методы построения асимптотических оценок для сумм*

Оценки знакопостоянных сумм, случаи равномерного и доминирующего вклада. Сведение суммирования к интегрированию, формулы суммирования Эйлера-Маклорена, Абеля, Пуассона. Аналоги методов Лапласа, стационарной фазы и метода перевала для оценки сумм. Оценки знакопеременных сумм. Формула включения исключения. Теорема обращения Мебиуса. Асимптотика числа циклических слов. Оценки чисел Белла различных разбиений множества.

#### Тема 4. Методы оценок рекуррентных последовательностей

Суммирование разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Различные методы сведения разностных уравнений к дифференциальным уравнениям. Квазилинейные и нелинейные рекуррентности. Аналоги методов пограничного слоя и ВКБ для разностных уравнений. Асимптотика спектра трехдиагональных матриц, уравнение Матье.

#### Тема 5. Производящие функции

Различные виды производящих функций. Аналитическое исследование производящих функций. Тауберовы и Абелевы теоремы. Полюсы, существенные особые точки и точки ветвления производящих функций. Метод перевала для производящих функций.

### 3. Оценивание

Текущий контроль знаний и навыков студентов осуществляется преподавателем в ходе оценивания работы студентов на семинарских занятиях: правильность решения задач на семинаре у доски и устные ответы. Преподаватель также оценивает самостоятельную работу студентов: правильность выполнения домашних работ, задания для которых выдаются на семинарских занятиях. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале определяется перед итоговым контролем -  $O_{\text{накопл}}$ .

Итоговый контроль знаний и навыков студентов проводится в виде экзамена (оценка  $O_{\text{экз}}$ ). Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

$$O_{\text{результ}} = 0.5 * O_{\text{накопл}} + 0.5 * O_{\text{экз}}$$

Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине: арифметический. Блокирующих элементов контроля не предусмотрено.

### 4. Примеры оценочных средств

#### Тематика заданий текущего контроля

- 1) Найдите асимптотику корня  $x_n$  уравнения  $x = tg(x)$ , при  $\pi(n-1/2) < x_n < \pi(n+1/2)$ ,  $n \rightarrow +\infty$ .
- 2) Найти главный член асимптотики для  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .
- 3) Найти главный член асимптотики для  $R_n = R_{n-1} + \frac{n}{n+1} R_{n-2}$ ,  $R_0 = R_1 = 1$ .

#### Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Дайте определение символа эквивалентности  $\square$ , символов  $o$  и  $O$ . Расскажите об алгебраических действиях с ними. Докажите, что соотношения  $f(x) \square g(x)$  и  $f(x) \square g(x) + o(g(x))$ ,  $x \rightarrow a$ , означают одно и то же. Какое слагаемое в сумме называется главным (или старшим)?
2. Приведите пример асимптотической шкалы. Что такое асимптотическая последовательность? Что такое асимптотический ряд по Пуанкаре? Расскажите об алгебраических операциях с асимптотическими рядами.

3. Что такое равномерные асимптотические формулы и главный член асимптотического разложения. Постройте равномерную асимптотическую формулу для  $\sin(x + \varepsilon)$  и  $\cos(x + \varepsilon)$ , при  $x \in [-\pi/4, \pi/4]$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
4. Расскажите о суперпозиции асимптотических формул (о замене переменной в асимптотических формулах). Получите асимптотическую формулу для  $x^x$  при  $x \rightarrow 0$ , сохраняя два ненулевых члена асимптотики, не считая остатка.
5. Расскажите о применении асимптотик функций к построению асимптотик последовательностей. Выпишите три ненулевых члена (не считая остатка) для  $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \ln(n + \sqrt{n})$ .
6. Как при помощи формулы Тейлора получить асимптотику функции заданной неявно? При  $x \rightarrow 0$  найдите два слагаемых и укажите остаток для  $y = y(x)$ , если  $xy + y^6 - 1 = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
7. На примере уравнения  $\sin x - x/(x+1) = 0$  продемонстрируйте, как ищутся асимптотики корней уравнения  $f(x) = 0$ , в случае, когда они образуют последовательность, занумерованную в порядке возрастания (или убывания).
8. Элементарное доказательство формулы Стирлинга.
9. Докажите асимптотические оценки для биномиальных коэффициентов. Рассмотрите  $C_n^k$  для маленьких  $k = o(\sqrt{n})$  и для  $k = [an]$  при  $0 < a < 1$ .
10. Найдите асимптотику количества унциклических связных графов.
11. Докажите теорему об оценке сумм с помощью интегралов в случае монотонных членов. При помощи теоремы об оценке сумм с помощью интегралов в случае монотонных членов найдите главный член и остаток асимптотики для  $\sum_{k=1}^n k^2 \ln k$ .
12. Докажите теорему об оценке сумм с помощью интегралов посредством метода центральных прямоугольников. При помощи метода центральных прямоугольников найдите два слагаемых и остаток для  $\sum_{k=1}^n k \ln k$ .
13. Формула суммирования Эйлера-Маклорена. Доказательство формулы Стирлинга.
14. Формула суммирования Пуассона. Приведите пример.
15. Расскажите о методе Лапласа. Получите главный член асимптотики в случае внутренней критической точки.
16. Пользуясь методом Лапласа получите главный член асимптотики для  $n!$  (формулу Стирлинга).
17. Изложите метод стационарной фазы и метод перевала.
18. Формула включения исключения. Теорема обращения Мебиуса. Асимптотика числа циклических слов.
19. Суммирование разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
20. Квазилинейные и нелинейные рекуррентности. Аналоги методов пограничного слоя и ВКБ для разностных уравнений.

21. Две теоремы об асимптотике спектра трехдиагональных матриц. Рассмотрите пример уравнения Матъе.

## 5. Ресурсы

### 1. Основная литература

1. Грэхем, Р. Л. *Конкретная математика: Основание информатики* / Р. Л. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. – М.: Мир, 1998 (или более поздние издания). – 703 с.
2. Flajolet, Philippe. *Analytic combinatorics* / Philippe Flajolet, Robert Sedgewick. – Cambridge University Press, 2009 (или более поздние издания). – URL: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/hselibrary-ebooks/detail.action?docID=412737> – ЭБС ProQuest Ebook Central - Academic Complete

### 2. Дополнительная литература

Дополнительная литература доступна студентам в читальном зале библиотек ВШЭ, и/или других библиотек Москвы, и/или в электронной-библиотечной системе (ЭБС).

1. Ильин, А. М. *Асимптотические методы в анализе* / А. М. Ильин, А. Р. Данилин. – М.: Физматлит, 2009 (или более поздние издания). – 248 с.
2. Федорюк, М. В. *Метод перевала* / М. В. Федорюк. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977 (или более поздние издания). – 368 с.
3. Олвер, Ф. *Введение в асимптотические методы и специальные функции* / Ф. Олвер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978 (или более поздние издания). – 375 с.

### 3. Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	Из внутренней сети университета (договор)
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	Из внутренней сети университета (договор)

### 4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
	<b>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</b>	
1.	EqWorld Мир математических уравнений	URL: <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm">http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm</a>

2.	Электронно-библиотечная система Юрайт	URL: <a href="https://biblio-online.ru/">https://biblio-online.ru/</a>
<b><i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i></b>		
1.	Открытое образование	URL: <a href="https://openedu.ru/">https://openedu.ru/</a>

## 5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для самостоятельных занятий по дисциплине оснащены ПЭВМ, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.

## 6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1.1. *для лиц с нарушениями зрения:* в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.2. *для лиц с нарушениями слуха:* в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.3. *для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:* в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.