

**Программа учебной дисциплины «Современные методы принятия решений:
статистические методы и анализ сложных сетей»**

Утверждена
Академическим советом ОП¹
Протокол № от __.__.20__

Разработчик	Тамм М.В., к.ф.-м.н, доцент департамента прикладной математики Вальба О. В., к.ф.-м.н, PhD, доцент департамента прикладной математики
Число кредитов	10
Контактная работа (час.)	144 час.
Самостоятельная работа (час.)	236 час.
Курс, Образовательная программа	1 курс, магистерская программа «Математические методы моделирования и компьютерные технологии»
Формат изучения дисциплины	очная

1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

Целью освоения дисциплины является:

- знакомство с основными методами статистической механики и теории сложных сетей, а также и их приложений к проблемам физики конденсированного состояния, биофизики, вычислительной математики, социальных наук;
- практические навыки решения задач статистической механики, анализа сложных сетей и компьютерного моделирования.

В результате освоения дисциплины студент должен:

1. знать основные принципы и методы статистической механики;
2. знать основные понятия теории сложных сетей;
3. применять полученные знания для решения учебных задач и интерпретировать результаты на языке статистической механики;
4. владеть навыками применения методов анализа и моделирования сложных сетей.

2. Содержание учебной дисциплины

Формы учебных занятий:

лк – лекции в аудитории;

см - семинары/ практические занятия/ лабораторные работы в аудитории;

онл – лекции или иные виды работы студента с помощью онлайн-курса;

ср – самостоятельная работа студента.

Содержание разделов дисциплины:

Тема 1. Статистический подход к прогнозированию и принятию решений.

6 час. лк., 6 час. см., 18 час. ср

Предмет и метод статистической физики. Возникновение простого коллективного поведения в системах с большим числом частиц. Динамический и статистический подходы. Задача прогнозирования погоды. Эффекты конечного размера в малых системах. Бросание монетки. Задача перколяции. Случайные графы, модель Эрдоша-Реньи. Модели Изинга и Шеллинга. Биномиальное распределение. Сходимость к нормальному распределению. Центральная предельная теорема. Флуктуации. Случайные блуждания, броуновское движение, диффузия, уравнение диффузии. Универсальность, скейлинговое поведение, анализ размерностей. Распределение Пуассона. Понятие о микроканоническом ансамбле.

Тема 2. Эргодичность и динамический хаос.

4 час. лк., 4 час. см., 12 час. ср

Устойчивость решения дифференциальных уравнений. Критерии устойчивости. Экспоненты Ляпунова. Примеры устойчивых и неустойчивых отображений. Динамический хаос. Аттракторы. Удвоение периода. Понятие об эргодичности. Гамильтонова формулировка механики. Теорема Лиувилля.

Тема 3. Температура, энтропия и статистические ансамбли.

8 час. лк., 8 час. см., 30 час. ср.

Микроканонический ансамбль и законы сохранения. Энтропия. Возрастание энтропии в микроканоническом ансамбле. Понятие о мягких и жестких ограничениях. Канонический ансамбль. Температура. Тепловое равновесие. Распределение Гиббса. Статистическая сумма. Термодинамические потенциалы и их использование для исследования систем. Большой канонический ансамбль. Химический потенциал. Связь статистической суммы и преобразования Лапласа. Тауберовы теоремы. Статистическая

сумма и термодинамические потенциалы идеального газа. Квантовая статистика. Бозоны и фермионы. Идеальные Ферми- и Бозе-газы. Распределения Ферми и Бозе. Излучение абсолютно черного тела.

Тема 4. Статистическая физика конденсированного состояния.

4 час. лк., 6 час см., 18 час. ср.

Физика реальных газов и жидкостей. Конфигурационный интеграл. Высокотемпературная (майеровская) диаграммная техника. Парные корреляционные функции. Уравнение Орнштейна-Цернике. Задача классификации конденсированных фаз. Спонтанное нарушение симметрии. Параметры порядка. Пространство параметра порядка. Топологическая классификация дефектов. Возмущения в конденсированных средах. Голдстоуновские моды. Примеры: магнетики, кристаллы, жидкие кристаллы, сверхтекучесть.

Тема 5. Фазовые переходы.

6 час. лк., 8 час. см., 24 час. ср.

Понятие о фазовых переходах. Скачкообразные и непрерывные фазовые переходы (переходы первого и второго рода). Фазовые переходы в задаче перколяции, в сетях Эрдоша-Реньи, в модели Изинга. Кипение, кристаллизация, ферромагнитный переход. Метастабильные состояния в скачкообразных переходах, спинополь и бинодаль. Зародышеобразование. Динамика фазового расслоения. Непрерывные фазовые переходы. Универсальность. Аномальные флуктуации. Масштабная инвариантность. Скейлинг. Среднеполевая теория Ландау. Критерий Гинзбурга. Понятие о ренорм-группе, физические причины универсальности. Скейлинговые функции, коллапс, конечномерное масштабирование. Самоорганизующаяся критичность (self-organized criticality).

Тема 6. Основные понятия, определения и методы анализа сложных сетей.

6 час. лк., 10 час. см., 30 час. ср.

Введение в теорию сложных сетей. Определения и примеры сложных сетей. Основные понятия в теории сетей. Свойства и метрики анализа сетей. Топологические свойства сетей. Распределение степеней связности, коэффициент кластеризации, ассортативность, диаметр, кратчайшие пути. Представление сети в компьютерном эксперименте. Понятие к-ядра графа, диады и триады в графах, мотивы.

Тема 7. Случайные сети и компьютерное моделирование сложных систем.

12 час. лк., 16 час. см., 44 час. ср.

Модель Эрдеша-Реньи (Erdos-Renyi). Распределение Бернулли и Пуассона. Функция распределения степеней. Фазовые переходы, возникновение связанной компоненты. Диаметр и коэффициент кластеризации. Конфигурационная модель. Модель Барабаси-Альберта (Barabasi-Albert). Предпочтительное присоединение. Уравнение в непрерывном приближении. Временная эволюция степеней узлов. Распределение степеней узлов. Средняя длина пути и коэффициент кластеризации. Модели "малого мира". Модель Watts-Strogats. Однопараметрическая модель. Переход от регулярного графа к случайному. Изменения коэффициента кластеризации и средней длины пути. Модели экспоненциальных случайных графов и их физический смысл. Методы Монте-Карло моделирования экспоненциальных-случайных графов. Фазовые переходы и нарушение симметрии.

Тема 8. Спектральные свойства сложных сетей.

4 час. лк., 8 час. см., 18 час. ср.

Матрица смежности. Матрица Лапласа. Процесс физической диффузии. Уравнение диффузии. Диффузия на сетях. Дискретный оператор Лапласа и матрица Лапласа, решение уравнения диффузии на графе. Случайные блуждания на графе. Спектр сети. Максимальное собственное значение матрицы смежности. Алгебраическая связность. Полукруговой закон.

Тема 9. Поиск сообществ в сети.

6 час. лк., 10 час. см., 24 час. ср.

Понятие сообщества в сети. Плотность связей. Метрики. Разделение графа на части. Разрезы в графе. Задача нахождения минимально разреза в графе. Агломеративные и разделяющие алгоритмы. Корреляционная матрица. Кластеризация. Понятие промежуточности ребер. Алгоритмы Гирвина-Ньюмана. Спектральные методы. Оптимизация модулярности. Классификация алгоритмов нахождения сообществ.

Тема 10. Модели распространения эпидемий в сетях.

4 час. лк., 8 час. см., 18 час. ср.

Модели распространения эпидемии в сети. Модель SI, SIS в приближении среднего поля. Degree block approximation.

3. Оценивание

В середине второго модуля проводится контрольная работа, оценивается правильность решения задач по десятибалльной шкале (О_{КР1}). В конце второго модуля

проводится промежуточный экзамен по материалам первого и второго модуля. Оценка за промежуточный контроль вычисляется:

$$O_{1,2} = 0.4O_{КР1} + 0.6O_{\text{экзамен1}}.$$

В третьем и четвертом модуле оценивается работа студента на практических занятиях, выполнение домашних заданий ($O_{\text{АУД}}$) и проводится контрольная работа ($O_{\text{КР2}}$). Оценка за промежуточный контроль вычисляется:

$$O_{3,4} = 0.4O_{\text{АУД}} + 0.3O_{\text{КР2}} + 0.3O_{\text{экзамен2}}.$$

Итоговая оценка за дисциплину:

$$O_{\text{итоговая}} = 0.5O_{1,2} + 0.5O_{3,4}.$$

На усмотрение преподавателя студент может быть освобожден от сдачи экзаменов с оценкой за промежуточный контроль, равной взвешенной средней по соответствующим элементам контроля. Блокирующие элементы не предусмотрены.

4. Примеры оценочных средств

Примеры задач контрольных работ:

1. Распределение вероятности найти частицу в заданной точке пространства $p(x)$ эволюционирует в соответствии с уравнением диффузии. Покажите, что соответствующая этому распределению энтропия не убывает с течением времени.
2. Рассмотрим одномерную модель Изинга с фиксированным состоянием крайнего правого спина (+1 или -1). Найдите связь между статсуммами таких моделей с N и $(N+1)$ частицами. Используя это рекуррентное соотношение, найдите явное выражение для статсуммы как функцию N .
3. Имеется две частицы, каждая из которых может с равной вероятностью находиться в одном из 6 состояний (1, 2, ..., 6). Найдите вероятность того, что А) обе частицы находятся в состоянии 3; Б) одна из частиц находится в состоянии 3, а другая – в состоянии 5 для трех случаев - частицы различимы (тогда их можно представлять себе как игральные кости); В) частицы неразличимы и подчиняются статистике Бозе; Г) частицы неразличимы и подчиняются статистике Ферми.
4. Рассмотрим связанный граф-путь на n вершинах. Определите модулярность разбиения графа на два сообщества размера g и $n-g$. Для четных n покажите, что оптимальное разбиение соответствует делению графа на два равных сообщества.

Примеры теоретических вопросов на итоговом экзамене

1. Энтропия как мера информации. Энтропия, связанная с «неплоским» распределением вероятности. Энтропия Шеннона.
2. Случайные блуждания. Броуновское движение. Распределение смещения броуновской частицы за время t . Уравнение диффузии.
3. Фазовый переход в модели Изинга в отсутствие внешнего поля. Теория среднего поля для модели Изинга.
4. Понятие о фазах, фазовых переходах и фазовых равновесиях.

Непрерывность характеристик вещества внутри фазы. Классификация фаз: спонтанное нарушение симметрии, топологический параметр порядка.

Примеры.

5. Предпочтительное присоединение. Модель Барабаши-Альберта.
6. Ассортативность сложной сети.
7. Рандомизация сети. Алгоритм Маслова-Снеппена. Алгоритм Hulvi-Brunet–Sokolov для ассортативных/дисассортативных сетей.
8. Конфигурационная модель. Число петель, мультиребер, коэффициент кластеризации.
9. Матрица смежности, матрицы Лапласа, спектры и их свойства.
10. Модели распространения эпидемии в сети. Модель SI в приближении среднего поля. Degree block approximation.
11. Сообщества в сети. Определение, свойства. Модулярность.

5. Ресурсы

5.1. Рекомендуемая основная литература

№п/п	Наименование
1	Ландау, Л. Д. Т. 5 : Статистическая физика. Ч.1. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1964 (или более позднее издание). – 567 с.
2	Vega-Redondo F. Complex social networks, Издательство: Cambridge University Press, 2007
3	Bollobas B, Random graphs, Издательство: Cambridge University Press, 2001

5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

№п/п	Наименование
1	Сетна, Дж. П. Статистическая механика: энтропия, параметры порядка, теория сложности / Дж. П. Сетна. – М.: Научный мир, 2013. – 610 сА.-Л.
2	Barabasi, "Network Science", Cambridge University Press, 2016

6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1.1. для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в

аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.2. для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.3. для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.