

## Программа учебной дисциплины «Алгебра дискретных систем»

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол №3 от «20» июня 2019 г.

Автор	Выборный Е.В., к.ф.-м.н.
Число кредитов	9
Контактная работа (час.)	120
Самостоятельная работа (час.)	222
Курс	1,2
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

### 1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

Целью освоения дисциплины «Алгебра дискретных систем» является изучение алгебраических алгоритмов вычисления точных и приближенных решений дискретных комплексов уравнений, состоящих из связанных (взаимодействующих) линейных колебательных систем.

В результате освоения дисциплины студент должен

**знать:**

- основные методы использования матричных алгебр для моделирования комплексов линейных динамических систем;
- общий алгебраический метод усреднения для анализа динамики динамических систем;
- базовые формулы некоммутативного анализа;

**уметь:**

- проводить алгебраические преобразования динамических систем к усредненной форме;
- анализировать усредненную систему методом редукции по алгебре симметрий;

**владеть:**

- навыками решения динамических систем с помощью алгебраического метода усреднения;
- навыками вычисления алгебр симметрий простейших комплексов колебательных систем;
- навыками вычислений с использованием некоммутативных алгебр матриц.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- «Линейная алгебра»
- «Дифференциальные уравнения»
- "Симметрии, представления и комплексный анализ
- «Асимптотические методы в дискретных задачах».

Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при подготовке выпускной квалификационной работы.

## 2. Содержание учебной дисциплины

Тема (раздел дисциплины)	Объем в часах	Планируемые результаты обучения (ПРО), подлежащие контролю	Формы контроля
	лк		
	см		
	onl/cp		
Тема 1. Алгебраические свойства линейных динамических систем	12	Вычисления в матричных алгебрах	Работа в классе и выполнение домашних работ
	18		
	46		
Тема 2. Алгебры симметрий дискретных комплексов	12	Теория возмущений в алгебре матриц	Промежуточный экзамен
	18		
	46		
Тема 3. Алгебраический метод усреднения	10	Решение на больших временах возмущенных нелинейных систем	Работа в классе и выполнение домашних работ
	22		
	70		
Тема 4. Базовые формулы некоммутативного анализа	10	Умение применять некоммутативный анализ	Итоговый экзамен
	18		
	60		
<b>Часов по видам учебных занятий:</b>	44		
	76		
	222		
<b>Итого часов:</b>	342		

Формы учебных занятий:

лк – лекции в аудитории;

см - семинары/ практические занятия/ лабораторные работы в аудитории;

onl – лекции или иные виды работы студента с помощью онлайн-курса;

cp – самостоятельная работа студента.

*Тема 1. Алгебраические свойства линейных динамических систем.*

Алгебры Ли и алгебры Йордана. Матрицы Паули и Дирака. Экспоненциальная функция на матричной алгебре. Элементарная теория возмущений для динамических систем. Коммутирующие и некоммутирующие матрицы; свободная и запутанная динамика. Группа 3D-поворотов. Неавтономные динамические системы. Моделирование неавтономных вращений с помощью комплексификации алгебры.

*Тема 2. Алгебры симметрий дискретных комплексов.*

Обратимые преобразования динамических систем и оператор коммутирования на матричной алгебре. Спектральное разложение матрицы и ее присоединенного оператора коммутирования. Коммутант матрицы и вырождение спектра. Теория возмущений в алгебре матриц. Как сделать матрицы коммутирующими? Гомологические уравнения. Динамическое решение

гомологических уравнений. Эволюция возмущенных линейных систем на больших временах. Поправки первого и второго порядка. Некоммутативная группа линейных преобразований трехмерного пространства и потеря баланса в моделях типа «хищник-жертва».

### *Тема 3. Алгебраический метод усреднения.*

Сведение нелинейных динамических систем к линейным. Алгебра Ли векторных полей. Гамильтоновы системы. Скобки Пуассона. Решение на больших временах возмущенных нелинейных систем. Периодические траектории и резонансы. Редукция усредненной системы по некоммутативной алгебре симметрий. Пример: двумерный изотропный осциллятор с ангармоническим возмущением; симметрии Швингера; редукция к волчку Эйлера и уравнению Риккати.

### *Тема 4. Базовые формулы некоммутативного анализа.*

Функции от некоммутирующих матриц. Разностные производные и формулы некоммутативного анализа. Формула Кэмпбелла-Хаусдорфа. Алгебры и группы Ли. Парадоксы некоммутативности. Неравенство Вейля и соотношение неопределенности Гейзенберга. Коммутатор и скобки Пуассона. Антиккоммутатор, алгебры Клиффорда.

## **3. Оценивание**

Оценки по всем формам текущего и итогового контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

Текущий контроль знаний и навыков студентов осуществляется преподавателем в ходе оценки работы студентов на семинарах (А) и проверки домашнего задания (В) и на промежуточном экзамене (С).

Итоговый контроль знаний и навыков студентов проводится в виде экзамена, состоящего из теоретического вопроса и задачи.

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

$$I = 0,2*A + 0,2*B + 0,3*C + 0,5*E,$$

где E - оценка за экзамен.

Все элементы контроля не являются блокирующими.

## **4. Примеры оценочных средств**

### **Примерные темы заданий промежуточного экзамена**

1. Вычислить экспоненту от трехмерной кососимметрической матрицы, от матриц Паули и Дирака. Вычислить спектр и собственные проекторы этих матриц.
2. Указать формулу, которая с квадратичной точностью дает решение линейной динамической системы на больших временах.
3. Найти соотношения в алгебре, порожденной генераторами трехмерных вращений, и указать оператор Казимира для этой алгебры.
4. Найти генераторы и коммутационные соотношения алгебры симметрий двумерного осциллятора в случае резонанса 1: 2.

### **Примерный список вопросов для подготовки к итоговому экзамену**

1. Линейные динамические системы и экспоненциальная функция на матричной алгебре. Элементарная теория возмущений для динамических систем.
2. Неавтономные динамические системы и их возмущение.
3. Алгебраическое преобразование возмущенной линейной системы к коммутативной форме и асимптотика решения на больших временах.

4. Спектральное разложение матрицы и ее присоединенного оператора коммутирования. Коммутант матрицы и вырождение спектра.
5. Теория возмущений в алгебре матриц. Как сделать матрицы коммутирующими? Гомологические уравнения.
6. Динамическое решение гомологических уравнений.
7. Сведение нелинейных динамических систем к линейным. Алгебра Ли векторных полей.
8. Решение гомологических уравнений и асимптотика решение на больших временах возмущенных нелинейных систем.
9. Гамильтоновы системы. Скобки Пуассона. Решение на больших временах возмущенных гамильтоновых систем.
10. Периодические траектории и резонансы. Редукция усредненной системы по некоммутативной алгебре симметрий.
11. Двумерный изотропный осциллятор с ангармоническим возмущением; симметрии Швингера; редукция к волчку Эйлера.
12. Двумерный изотропный осциллятор с ангармоническим возмущением; редукция к уравнению Риккати.
13. Функции от нескольких некоммутирующих матриц. Простейшие правила исчисления. Разностные производные и формул Ньютона.
14. Формула коммутации и смены порядка некоммутирующих матриц.
15. Формула Кэмпбелла-Хаусдорфа.
16. Континуальная версия формула Кэмпбелла-Хаусдорфа.
17. Коммутационное соотношение Гейзенберга и парадокс: «доказательство» соотношения  $0=1$ .
18. Неравенство Вейля и соотношение неопределенности Гейзенберга.
19. Алгебраическое вычисление спектра и собственных векторов квантового осциллятора.
20. Символы квантовых операторов. Коммутатор и скобки Пуассона.

## 5. Ресурсы

### 5.1. Основная литература

- Арнольд, В. И. Математические методы классической механики: учеб. пособие для ун-тов / В. И. Арнольд. – Изд. 2-е, стер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979 (или более новое издание). – 431 с.

### 5.2. Дополнительная литература

- S. J. Gustafson, I. M. Sigal, Mathematical Concepts of Quantum Mechanics / Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011 - <https://www.springer.com/us/book/9783642218651> - ЭБС Springer.
- Alpay, D., Cipriani, F., Colombo, F., Guido, D., Sabadini, I., Sauvageot, J.-L., Noncommutative Analysis, Operator Theory and Applications / Springer International Publishing Switzerland 2016 - <https://www.springer.com/gp/book/9783319291147> - ЭБС Springer.

### 5.3. Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа

1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>

**5.4.** Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
<b><i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i></b>		
1.	EqWorld Мир математических уравнений	URL: <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm">http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm</a>
2.	Электронно-библиотечная система Юрайт	URL: <a href="https://biblio-online.ru/">https://biblio-online.ru/</a>
<b><i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i></b>		
1.	Открытое образование	URL: <a href="https://openedu.ru/">https://openedu.ru/</a>

**5.5.** Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для самостоятельных занятий по дисциплине оснащены ПЭВМ, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.

## **6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов**

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1.1. для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.2. для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.3. для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.