Программа учебной дисциплины
«Асимптотический анализ и его приложения»
(подготовка магистра)

Утверждена
Академическим советом ОП
Протокол № от __.__.2019

Разработчик	Эминов Павел Алексеевич, профессор департамента прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ
Число кредитов	4
Контактная работа (час.)	52
Самостоятельная работа (час.)	52
Курс, Образовательная программа	1 курс, Системы управления и обработки информации в инженерии
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

1.Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

1.1.**Цель:** изучение асимптотических методов решения задач прикладной математики и квантовой теории поля.

1.2.Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины.

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать: вывод основных формул асимптотического анализа рядов и интегралов; общую схему применения квазиклассического метода ВКБ для нахождения асимптотики решений задач математической физики и квантовой теории поля; вывод уравнений стационарной и нестационарной теории возмущений на основе метода функций Грина и метода интегралов по траекториям.

Уметь применять методы асимптотического анализа к решению задач математической физики, математического моделирования, квантовой теории поля и статистической физики;

Иметь навыки (приобрести опыт): исследования асимптотического поведения решений уравнений математической физики и квантовой теории поля; вычисления асимптотики интегралов, сумм и рядов; применения метода функций Грина и метода интегралов по траекториям для построения рядов теории возмущений.

1.3.Настоящая дисциплина относится к циклу математических дисциплин (вариативная часть).

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

Линейная алгебра;
Дифференциальные уравнения;
Теория функций комплексного переменного;
Уравнения математической физики.

Для освоения дисциплины студенты должны знать основные понятия и методы указанных дисциплин.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

Принципы построения математических моделей;

Математическое моделирование;

Современные методы теории управления.

2.Содержание учебной дисциплины

Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1	Асимптотический анализ рядов и интегралов	20	4	6	10
2	Метод функций Грина и теория возмущений	34	4	12	18
3	Метод Вентцеля - Крамерса – Бриллюена в задачах квантовой механики и математической физики	18	3	6	9
4	Теория возмущений в квантовой механике и статистической физике на основе метода интегралов по траекториям	32	3	14	15
	Итого:	**104**	**14**	**38**	**52**

Элементы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	Модули		Параметры
		2	3	
Текущий (неделя)	Контрольная работа		8	письменная работа 80 минут
	Домашнее задание	4	4	сдается преподавателю на 7 неделе каждого модуля
Итоговый	Экзамен		√	устный экзамен

Тема 1. **Асимптотический анализ рядов и интегралов**

Метод Лапласа асимптотической оценки интегралов от функций действительной переменной.

Метод перевала асимптотических разложений контурных интегралов от функций комплексной переменной.

Метод стационарной фазы.

Формула Эйлера-Маклорена для интегральной оценки суммы $\sum_{i=0}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\Delta x}\int_a^b f(x) + ...,$

где $x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$ пробегают эквидистантно расположенный ряд значений, $x_{s+1} - x_s = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, а функция f(x) является непрерывной и сколь угодно раз дифференцируемой на отрезке [a,b].

Формула Пуассона суммирования и асимптотического анализа рядов.

Метод Ватсона суммирования и асимптотического анализа рядов.

Тема 2. Метод функций Грина и теория возмущений

Функции Грина стационарных линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Классификация функций Грина нестационарных уравнений в частных производных.

Интегральные уравнения и теория возмущений для функций Грина линейных эрмитовых операторов в абстрактном гильбертовом пространстве и переход в координатное представление. Ряд теории возмущений для собственных функций непрерывного спектра линейного эрмитового оператора в координатном представлении. Уравнение Липмана-Швингера.

Решение основных уравнений математической физики методом функций Грина. Интегрирование обобщенного уравнения Даламбера.

Метод функций Грина в квантовой теории поля при конечной температуре. Вычисление термодинамического потенциала идеального электрон-позитронного газа методом температурных функций Грина.

Тема 3. Метод Вентцеля-Крамерса - Бриллюэна в задачах квантовой механики и математической физики.

Метод ВКБ решения стационарного уравнения Шредингера в потенциальном поле в квазиклассическом приближении.

Квантование потенциальной ямы в квазиклассическом приближении.

Асимптотическое представление функции Лагерра через функцию Макдональда.

Асимптотическое представление функции Бесселя $J_\nu(x)$ высокого порядка через

функцию Эйри, когда аргумент функции Бесселя приближается к порядковому номеру: $x \to \nu - 0 \gg 1$.

Квазиклассическое решение уравнения Дирака в постоянном магнитном поле.

Тема 4. Теория возмущений в квантовой механике и статистической физике на основе метода интегралов по траекториям.

1. Амплитуда вероятности перехода в квантовой механике и интеграл по траекториям.

Математические методы вычисления интегралов по траекториям.

Интеграл по траекториям и шредингеровское описание квантовой механики. Уравнение Шредингера для ядра. Выражение интеграла по траекториям через решения стационарного уравнения Шредингера.

2. Ряд теории возмущений и интегральное уравнение для ядра. Интегральное уравнение для волновой функции. Задачи рассеяния. Возмущения, зависящие от времени и амплитуды переходов. Золотое правило Ферми.

Аналогия между квантовой механикой и квантовой статистической физикой: аналитическое продолжение спектральной функции на область комплексных значений времени и статистическая сумма. Вычисление статистической суммы и намагниченности одномерной решетки Изинга.

3. Оценивание

Блокирующие элементы контроля отсутствуют.
Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале. Для промежуточного контроля знаний и формирования текущих оценок студенты выполняют два домашних задания и одну контрольную работу.

Первое домашнее задание включает задачи по темам:1) асимптотический анализ рядов и интегралов;2) метод функций Грина и теория возмущений.

Второе домашнее задание включает задачи по темам: 1) метод Вентцеля - Крамерса – Бриллюена в задачах квантовой механики и математической физики; 2) теория возмущений в квантовой механике и статистической физике на основе метода интегралов по траекториям.

Контрольная работа проводится по всем темам курса.

На экзамене проверяется умение студента: 1) формулировать и доказывать теоремы курса; 2) решать стандартные задачи курса. Форма экзамена - устная, в билете 2 вопроса и одна задача.

Выставляемая оценка за контрольную работу, домашнее задание и экзамен равна среднему арифметическому полученных студентом оценок (по 10-ти балльной шкале) за отдельные задачи и вопросы.

Студент, получивший неудовлетворительную оценку (меньше 4 баллов по десятибалльной шкале) за контрольную работу может исправить свой результат, переписав её один раз. Результат переписывания контрольной работы умножается на коэффициент 0.7.

Накопленная оценка $Q_{нак.}$ по 10-балльной системе вычисляется как среднее арифметическое оценок по элементам текущего контроля :

$$Q_{накю} = \frac{1}{3}(Q_{д.з.1} + Q_{д.з.2} + Q_{контр.}).$$

Окончательная оценка по учебной дисциплине определяется по формуле

$$\mathrm{Q}_{о} = \frac{1}{2}(Q_{нак.} + Q_{экз}).$$

Округляется только окончательная оценка. Способ округления арифметический.

4.Примеры оценочных средств

Образцы задач из первого домашнего задания

1.Используя метод перевала найти главный член асимптотического разложения функции Ханкеля первого рода порядка ν при

$a \gg 1$:

$$H_{\nu}^{(1)}(a) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty+ia} \exp(ashz - \nu z)dz;$$

2.Применяя метод Ватсона преобразовать ряд в новый ряд, быстро сходящийся при $\alpha << 1$ и найти два первых члена этого ряда:

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\theta}{ch\alpha n},$$

где $0 \le \theta < \pi, \alpha -$ положительное число, удовлетворяющее условию $\alpha << 1$.

Провести прямое численное суммирование приведенного ряда при $\alpha = 10^{-5}, \theta = 0$ и $\theta = 1$.

Образцы задач из второго домашнего задания

1. Найти функцию Грина $G^{+}(\vec{r}, \vec{r}', \lambda = E > 0)$ оператора $L = \dfrac{\hat{p}^2}{2m}$ в трехмерном случае.

2. Используя метод ВКБ найти асимптотическое представление функций Лагерра $I_{nn'}(x)$ через функцию Макдональда в случае, когда $x = x_0 - 0$, где $x_0 = (\sqrt{n} - \sqrt{n'})^2, n \gg 1, n' \gg 1, n - n' \gg 1.$

Вопросы и задачи для оценки качества освоения дисциплины

Асимптотический анализ рядов и интегралов

1.Доказать вспомогательные леммы, лежащие в основе метода Лапласа.

2.Доказательство основной теоремы метода Лапласа для получения первого члена асимптотического разложения интегралов от функций действительной переменной вида

$$\Psi(\lambda)=\int_a^b \varphi(t)\exp(\lambda\cdot f(t))dt.$$

3.Метод перевала: связь с методом Лапласа и основная идея метода; общие требования к выбору контура интегрирования и их конкретизация в случае единственной седловой точки; анализ линий уровня $u(x,y)=u(x_0,y_0)$ и $v(x,y)=v(x_0,y_0)$,проходящих через точку перевала; уравнения ,определяющие границы положительных и отрицательных секторов в окрестности седловой точки и их анализ; направления наибыстрейшего убывания (наибыстрейшего спуска) функции $u=u(x,y)$ и их связь с биссектрисами отрицательных секторов.

4.Доказательство основной теоремы метода перевала для получения первого члена асимптотического разложения интегралов от функций комплексной переменной вида

$$F(\lambda)=\int_C \varphi(z)\exp(\lambda\cdot f(z))dz,$$

где $\varphi(z)$ и $f(z)-$функции, аналитические в некоторой области ,содержащей кривую С.

5 .Вывод главного члена асимптотики интеграла Фурье $F(\lambda)=\int_a^b f(x)\exp(i\lambda\cdot S(x))dx,$ где $S(x)-$вещественнозначная, $f(x)-$комплекснозначная функции, $\lambda-$большой положительный параметр, в случае, когда фазовая функция не имеет стационарных точек.

6.Доказательство основной теоремы метода стационарной фазы для получения главного члена асимптотики интеграла Фурье в случае, когда фазовая функция имеет единственную внутреннюю невырожденную стационарную точку. Обобщение асимптотической формулы на многомерный случай.

7.Основная идея и основные элементы метода Ватсона асимптотического анализа и суммирования рядов. Реализация метода Ватсона на примере вычисления суммы ряда

$$S=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{n^2+a^2},$$

где a - положительное число.

8.Вывод формулы суммирования Пуассона. Используя формулу Пуассона выделить из термодинамического потенциала намагниченного электронного газа его осциллирующую часть (эффект де-Гааза -- ван-Альфена--Ландау).

9.Вывод формулы суммирования Эйлера-Маклорена для интегральной оценки суммы $\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$. Используя формулу Эйлера-Маклорена вычислить диамагнитную восприимчивость намагниченного электронного газа.

10.Найти асимптотику при $\lambda \to \infty$ интеграла

$$\mathrm{F}(\lambda) = \int_0^1 \exp(-\frac{1}{x} - \lambda x) dx.$$

11. Найти асимптотику при $x \to +\infty$ интеграла

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \mathrm{Re} \int_0^{\pi} e^{ix\sin\varphi - in\varphi}.$$

12.Показать, что при $n \to \infty$ $\sum_{k=0}^{n} C^k{}_n k! n^{-k} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}[1 + O(n^{-1})].$

13.Получить первый член асимптотического разложения гамма-функции Эйлера при p>>1

(формула Стирлинга): $$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx.$$

14.Найти асимптотику при $\mathrm{x} \to +\infty, 0 < \alpha < 1$, интеграла:

$$\mathrm{F}(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(xt - t^{\alpha} / \alpha) dt.$$

15.Найти асимптотику при $\nu \to \infty$ функции Макдональда (x>0):

$$K_{\nu}(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\nu t - x ch t) dt.$$

16.Используя формулу суммирования Пуассона найти асимптотику при $x \to +0$ функции

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-n^2 x).$$

17.Найти асимптотику интеграла при $x \to \infty, n \ge 0 : I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(x \cos t) \cos(nt) dt.$

18. Найти асимптотику интеграла при условии $ab^2 >> 1 : I = \int_0^{\infty} x \exp(-ax - \frac{b}{\sqrt{x}}) dx.$

19.Используя метод перевала найти главные члены асимптотического разложения интегралов:

a) $I(\lambda)=\int\limits_0^{\infty}\exp[\lambda(x+ix-x^3)dx,\lambda\to+\infty;$

b) $I(\lambda)=\int\limits_{-\infty+ia}^{\infty+ia}\exp(-2\lambda z^2-\frac{4\lambda}{z})dz,\lambda\to+\infty;$

Обосновать выбор контура интегрирования.

20. Используя метод стационарной фазы найти:

а) асимптотики функций Бесселя $J_\nu(\nu)$ и $J_\nu(\nu\sec\beta)$ при $\nu\gg 1,$ если β – положительный острый угол.

Указание: функция Бесселя вещественного индекса ν имеет интегральное представление

$$J_\nu(\nu x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos[\nu(\varphi-x\sin\varphi)]d\varphi-\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\exp[-\nu(t+xsht)]dt,x>1;$$

b) асимптотику функции Бесселя целого индекса $n\geq 0$ при $x\gg 1,$ которая имеет интегральное представление

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)d\varphi.$$

21. Используя метод перевала найти главный член асимптотического разложения:

а) функции Ханкеля первого рода порядка ν при

$a\gg 1:$

$$H_\nu^{(1)}(a)=\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty+ia}\exp(ashz-\nu z)dz;$$

b) функции Эйри

$$\Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp[i(\frac{t^3}{3}+xt)]dt$$

при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ соответственно.

22. Используя метод Лапласа найти асимптотику при $n\gg 1$ функции параболического цилиндра

$$D_{-n-1}(x)=\frac{\exp(-\frac{x^2}{4})}{\Gamma(n+1)}\int\limits_0^{\infty}t^n\exp(-xt-\frac{t^2}{2})dt,x>0.$$

23.Применяя метод Ватсона преобразовать ряд в новый ряд, быстро сходящийся при $\alpha \ll 1$ и найти два первых члена этого ряда:

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\theta}{ch\alpha n},$$

где $0 \le \theta < \pi, \alpha -$ положительное число, удовлетворяющее условию $\alpha \ll 1$.

Провести прямое численное суммирование приведенного ряда при $\alpha = 10^{-5}, \theta = 0$ и $\theta = 1$.

24. Используя метод Ватсона найти сумму ряда (a>0)

$$S = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(n+1/2)^2 + a^2}.$$

Метод функций Грина и теория возмущений

1. Функции Грина $G^{\pm}(z;\vec{r},\vec{r}\,')$ стационарного дифференциального уравнения в частных производных вида $(z - \hat{L}(\hat{r}))\psi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$, где $\hat{L}(\vec{r})$ - линейный дифференциальный эрмитовый оператор в гильбертовом пространстве.

2.Определение функции Грина дифференциального уравнения в частных производных первого порядка по времени вида $\left[\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}(\vec{r})\right]F(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)$, где $L(\vec{r}) -$ линейный эрмитовый оператор, c>0. Аналитические свойства Фурье-образа $g(\vec{r},\vec{r}\,',\omega)$ функции Грина и получение различных функций Грина в зависимости от способа обхода особых точек функции $g(\vec{r},\vec{r}\,',\omega)$ на действительной оси комплексной плоскости ω.

3.Принцип причинности. Запаздывающая и опережающая функции Грина. Свойства функций Грина $g^{\pm}(\vec{r},\vec{r}\,',\tau)$, $\tilde{g}(\vec{r},\vec{r}\,' r\tau,$, связь между ними и соответствующие им операторы в абстрактном гильбертовом пространстве.

4.Оператор эволюции для нестационарного уравнения Шредингера в абстрактном гильбертовом пространстве. Матричный элемент оператора эволюции в координатном представлении и его физический смысл. Причинная функция Грина уравнения Дирака.

5. Стационарная теория возмущений. Операторное уравнение для оператора $\widehat{G}(z)$ функции Грина не зависящего от времени линейного эрмитового оператора $\hat{L} = \hat{L}_0 + \hat{L}_1$ в абстрактном гильбертовом пространстве и переход в координатное представление. Интегральное уравнение для функций Грина $G^{\pm}(\vec{r}, \vec{r}', z)$.

6. Вывод уравнения Липпмана-Швингера.

7. Стационарная теория возмущений для уравнения Шредингера. Невырожденный случай:

поправки первого приближения к собственным функциям и собственным значениям.

Вырожденный случай: вывод секулярного уравнения.

8. Определение функции Грина и аналитические свойства Фурье-образа функции Грина линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка по времени вида $\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{L}(\vec{r})\right]F(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t),$ где $L(\vec{r})$ – линейный эрмитовый оператор.

9.Основные функции Грина волнового уравнения (причинная функция Грина, запаздывающая и опережающая функции Грина, временная функция Грина), их физический смысл и связь друг с другом.

10.Интегрирование обобщенного уравнения Даламбера.

11. Метод температурных функций Грина в статистической физике. Расчет термодинамического потенциала идеального электрон-позитронного газа методом температурных функций Грина.

12.Найти функцию Грина $G^{+}(\vec{r}, \vec{r}', \lambda = E > 0)$ оператора $L = \frac{\widehat{p}^2}{2m}$ в трехмерном случае.

13.Найти в трехмерном случае функцию Грина $G(\vec{r}, \vec{r}', \lambda = E < 0)$ оператора $L = \frac{\widehat{p}^2}{2m}$

14.Решить задачу 12 в двумерном случае.

15.Решить задачу 13 в двумерном случае.

16.Решить задачу 12 в одномерном случае.

17.Решить задачу 13 в одномерном случае.

18.Найти запаздывающую функцию Грина волнового уравнения в трехмерном случае.

19.Решить задачу 18 в одномерном случае.

20.Найти функцию Грина $G(x, x', E > 0)$ частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной а (0<x<a). Какой смысл имеют полюса функции Грина?

21.Исходя из решения уравнения Шредингера в импульсном представлении, найти волновые функции стационарных состояний в поле U(x)=-F x.Нормировать их на $\delta -$функцию Дирака по энергии.

22. Найти запаздывающую функцию Грина волнового уравнения в двумерном случае.

23..Найти временную функцию Грина одномерного уравнения Шредингера для свободной частицы.

24.Найти временную функцию Грина трехмерного уравнения Шредингера для свободной частицы.

25.Найти энергетический спектр частицы в поле

$U(x) = -\alpha\delta(x),$

используя уравнение Шредингера в интегральном виде.

Метод Вентцеля-Крамерса - Бриллюена в задачах квантовой механики и математической физики.

1. Связь между уравнением Шредингера и классическим уравнением Гамильтона-Якоби. Квазиклассическое приближение для стационарного уравнения Шредингера в потенциальном поле и основы метода ВКБ.

2 .Метод Вентцеля-Крамерса-Бриллюена приближенного решения стационарного уравнения Шредингера (барьер справа от особой точки).

3.Метод ВКБ приближенного решения стационарного уравнения Шредингера (барьер слева от особой точки). Квантование потенциальной ямы методом ВКБ.

4. Общий формализм метода ВКБ для нахождения асимптотических решений дифференциального уравнения

$$\psi''(x) - f(x)\psi(x) = 0, \ f(x) > 0,$$

в области $x < x_0 (x_0 -$ особая точка).

5.Используя метод ВКБ найти главный член асимптотического разложения для функций Бесселя высокого порядка $J_n(x),$ когда аргумент приближается к порядковому номеру:

$x \to n - 0 \gg 1.$

6.Используя метод ВКБ найти асимптотическое представление функций Лагерра $I_{nn'}(x)$ через функцию Макдональда в случае, когда $x = x_0 - 0,$ где $x_0 = (\sqrt{n} - \sqrt{n'})^2, n \gg 1, n' \gg 1, n - n' \gg 1.$

7.Используя метод ВКБ найти асимптотическое представление функций Лагерра $I_{nn'}(x)$ через функцию Макдональда в случае, когда $x = x_0 + 0,$ где $x_0 = (\sqrt{n} + \sqrt{n'})^2, n \gg 1, n' \gg 1, n - n' \gg 1.$

8.Найти квазиклассическое решение уравнения Дирака в постоянном магнитном поле.

Теория возмущений в квантовой механике и статистической физике на основе метода интегралов по траекториям.

1. Действие в классической механике. Квантовомеханическая амплитуда вероятности перехода и действие в квантовой механике. Фейнмановское определение интеграла по траекториям.

2.Закон сложения амплитуд вероятностей двух событий, которые происходят последовательно во времени. Обобщение правила на случай нескольких событий.

3..Вычислить интеграл по траекториям для свободного движения частицы в:1)одномерном случае;2)трехмерном случае.

4.Вычисление интеграла по траекториям в случае, когда действие является квадратичной формой от траектории (интегралы Гаусса).

5. Вычислить интеграл по траекториям для одномерного гармонического осциллятора.

6.Вычисление интеграла по траекториям в случае движения частицы в потенциальном поле.

ВКБ-приближение.

7.Одномерный гармонический осциллятор возмущается внешней силой f(t).Вычислить интеграл по траекториям .

8.Вычислить интеграл по траекториям для частицы с зарядом e и массой m в постоянном внешнем магнитном поле B , направленном вдоль оси z.

9.Вычисление интеграла по траекториям с помощью рядов Фурье на примере одномерного гармонического осциллятора.

10.Вычисление интеграла по траекториям для системы со многими переменными и в случае систем с разделяющимися переменными. Интеграл по траекториям как функционал.

11. Вывести уравнение Шредингера исходя из интеграла по траекториям в случае трехмерного движения частицы под воздействием потенциала V=V(r,t).

12.Пусть частица совершает одномерное движение во внешнем поле с потенциалом V(x,t). Дайте физическую интерпретацию первого члена ряда теории возмущений для ядра, соответствующего переходу между точками a и b .

13.Обьясните, каким способом матричный элемент оператора эволюции в координатном представлении представляется через интеграл по траекториям.

14.Покажите, что спектральная функция квантовой механики при отрицательных мнимых значениях времени совпадает с определенной в квантовой статистической механике статистической суммой.

15.Используя аналогию между квантовой механикой (амплитуда перехода частицы) и статистической механикой (статистическая сумма струны), вычислите статистическую сумму и намагниченность одномерной решетки Изинга.

16. Вычислите статистическую матрицу плотности в случае гармонического осциллятора с помощью интеграла по траекториям.

5. Ресурсы

5.1. Рекомендуемая основная литература

1. Маслов В.П.,Теория возмущений и асимптотические методы, МГУ,1965.

2.Эрдейи А., Асимптотические разложения, Москва, Физматгиз,1962.

3. КопсонЭ., Асимптотические разложения, Мир,1966.

4. Федорюк М.В. ,Метод перевала, Наука,1977.

5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

5.Фрадкин Е.С.,Метод функций Грина в теории квантовых полей и в квантовой статистике, Тр. ФИАН,1965,Т.29,с.7-138.

6.Тернов И.М.,Жуковский В.Ч.,БорисовА.В.,Квантовая механика и макроскопические эффекты, МГУ,1993

7.А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов, Теория функций комплексной переменной, Наука,1979.

8.Р. Фейнман, А.Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, Мир,1968.

5.3. Программное обеспечение не предусмотрено.

5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы) не предусмотрены.

5.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины не предусмотрено.

6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося), а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1. *для лиц с нарушениями зрения:* в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.2. *для лиц с нарушениями слуха*: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.3. *для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата*: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

7. Дополнительные сведения

Дополнительные сведения отсутствуют.