

Программа учебной дисциплины «Алгебра и анализ II»

Утверждена:
Руководитель департамента
математики Н.А. Широков¹
Протокол № от _____

Разработчик	Дубашинский М.Б., канд. физ.-мат. наук, доцент департамента математики , mdubashinskiy@hse.ru Гладкая А.В., канд. физ.-мат. наук, доцент департамента математики, anna.v.gladkaya@gmail.com
Число кредитов	6
Контактная работа (час.)	116
Самостоятельная работа (час.)	112
Курс, Образовательная программа	1 курс, ОП Экономика
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Основы математических исследований» являются изучение метода вариации, решение вариационных задач и задач оптимального управления.

Материалы курса могут быть использованы для разработки и применения численных методов решения задач из многих областей знания, для построения и исследования математических моделей таких задач.

Дисциплина является модельным прикладным аппаратом для изучения студентами факультета Экономики математической компоненты своего профессионального образования.

2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- владеть методами исследования функционалов на экстремум;
- уметь находить экстремумы интегральных функционалов;
- уметь применить аппарат вариационного исчисления в задачах формирования экономических моделей и решении прикладных задач.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
-------------	---	---	--

¹ Для ПУД из общеуниверситетского пула – Руководитель Департамента.

УК-1	Имеет основательную теоретическую математическую подготовку. Владеет терминологическим аппаратом дисциплины. Имеет представление о функциональных возможностях наиболее распространенных методов вариационного исчисления.	<ul style="list-style-type: none"> - лекция; - семинар; - контрольная работа; - демонстрация; - решение задач; - работа с литературой; - использование технических средств; - экзамен. 	Контрольная работа, домашнее задание, экзамен
УК-3	Распознает типы (классы) задач, применяет для них адекватные методы решения. Владеет методами исследования математических моделей в области экономики. Обосновывает полученные результаты решения задачи.	<ul style="list-style-type: none"> - решение задач; - дискуссия; - работа с литературой; - репродуктивный; - эвристический (частично поисковый); - аналитический 	Контрольная работа, домашнее задание, экзамен
УК-4	Выбирает адекватный и рациональный метод решения задачи. Устанавливает связь между теоретическим понятием дисциплины, методом решения конкретной задачи и получаемым результатом. Оптимально использует временной ресурс для решения задач	<ul style="list-style-type: none"> - решение задач; - работа с литературой; - использование технических средств; - эвристический (частично поисковый); - аналитический 	Аудиторная работа, контрольная работа, домашнее задание, экзамен
ПК-3	Способен проанализировать условие задачи, выбрать метод решения и спрогнозировать результат	<ul style="list-style-type: none"> - решение задач; - репродуктивный; - эвристический (частично поисковый); - аналитический 	Контрольная работа, домашнее задание, экзамен
ПК-6	Обосновывает решение задачи письменно и устно. Верно доказывает основные теоретические положения дисциплины. Умеет вести дискуссию и доносить до аудитории приемы решения задач	<ul style="list-style-type: none"> - решение задач; - дискуссия; - работа с литературой; - использование технических средств; - репродуктивный; - эвристический (частично поисковый); - аналитический 	Аудиторная работа, контрольная работа, домашнее задание, экзамен.
ПК-19	Демонстрирует навыки интерпретации и презентации	Дискуссия, презентация,	Аудиторная работа, контрольная работа,

	результатов исследования модели	использование технических средств, применение информационных технологий, эвристический подход	домашнее задание, экзамен
ПК-21	Демонстрирует навыки индивидуального подхода к исследованию математических объектов	Семинар, использование технических средств, применение информационных технологий, эвристический подход	Аудиторная работа, контрольная работа, домашнее задание, экзамен

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу математических и естественно-научных дисциплин и является дисциплиной по выбору для всех специализаций направления 38.03.01 «Экономика».

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- Математический анализ
- Линейная алгебра

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Методы оптимальных решений
- Микроэкономика
- Эконометрика
- Анализ временных рядов

4. Тематический план учебной дисциплины

ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ - 6 зачетных единицы

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
1	Элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах	46	12	14	20
2	Основная лемма вариационного исчисления и методы решений дифференциальных уравнений.	62	12	14	36
3	Интегральные функционалы, исследование на экстремум интегрального функционала.	62	22	14	26
4	Задачи оптимального управления	29	6	8	15
5	Вариационные задачи в физике и экономике	29	6	8	15
ИТОГО		228	58	58	112

5. Содержание дисциплины

1. Раздел 1 Элементы дифференциального исчисления в нормированных пространствах.

Нормированные пространства. Норма оператора. Теорема о непрерывности линейного

оператора. Производные по Гато и Фреше функционала. Изопериметрическая задача. Необходимые условия экстремума. Второй дифференциал.

2. **Раздел 2 Основная лемма вариационного исчисления и методы решения дифференциальных уравнений.**

Лемма Дюбуа–Реймона. Основная лемма вариационного исчисления. Обыкновенные дифференциальные уравнения разрешенные относительно старшей производной: уравнения с разделяющимися переменными, уравнения, сводящиеся заменой переменной к уравнениям с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения.

3. **Раздел 3 Интегральные функционалы. Исследование на экстремум интегрального функционала**

Гладкость интегрального функционала. Уравнение Эйлера для интегральных функционалов. Изопериметрическая задача для интегральных функционалов. Естественные граничные условия. Условие трансверсальности. Вторая вариация интегрального функционала: необходимые и достаточные условия экстремума.

4. **Раздел 4 Задачи оптимального управления**

Постановка задач оптимального управления. Допустимое управление. Принцип максимума Понтрягина : необходимое условие оптимального управления.

5. **Раздел 5 Вариационные задачи в физике и экономике**

Задача о брахистохроне. Задача Дидоны. Задача о инвестиционных решениях по продаже.

6. Оценочные средства

7.1 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	З модуль	Параметры
Текущий	Домашнее задание	*	Домашнее задание (сдается в письменном виде, 80 мин.)
	Контрольная работа	*	Письменная работа 80 мин.
Итоговый	Экзамен	*	Письменный экзамен 120 мин.

7.2 Критерии и шкалы оценки знаний, примеры заданий

При выполнении контрольных работ и домашних заданий студент должен продемонстрировать понимание абстрактной математической части курса: понимание определения нормированного пространства, исследования сходимости по норме, непрерывности и дифференцируемости функционала. Также студент должен продемонстрировать умение применить леммы вариационного исчисления, решать ДУ, уметь распознавать типы вариационных задач, успешно применить выбранный метод решения, математически аргументировать свои рассуждения.

В письменной экзаменационной работе студент должен продемонстрировать знание основных теоретических положений изученных тем (определения, формулировки и доказательства теорем, классические задачи), а также умение устанавливать связь между теоретическими понятиями дисциплины, методом решения конкретной задачи и получаемым результатом.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале. При использовании другой шкалы предоставляется таблица перевода результатов в 10-балльную систему, студенты заранее оповещаются о системе оценивания.

Студенты заранее извещаются о процедуре проведения экзамена и получают инструкции по оформлению соответствующих работ текущего и промежуточного контроля и критерии оценивания путем размещения их в системе LMS.

Общий критерий оценивания для всех видов контроля. *Негрубая ошибка ведет к снижению балла за задание. Грубая ошибка ведет к выставлению оценки «0» за задание.*

7.2.1. Текущий контроль

Текущий контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Домашнее задание выполняется студентами во внеаудиторная время в формате домашней работы. Выдается студентам в одном варианте и состоит из 5 задач. Каждой задаче присвоен свой балл. Срок выполнения домашнего задания – 1 неделя. Форма представления обучающимися домашнего задания – представленные в письменном виде решения задач.

Примерные задачи Домашнего задания

- [2 балла] Проверить, что пространство непрерывных функции на отрезке $[0,1]$ функционал

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad h \in C_0^\infty$$

является нормой этого пространства.

- [3 балла] Вычислить норму линейного функционала

$$f \mapsto f(0) + f'(1),$$

заданного на пространстве $C^1[0, 1]$

- [3 балла] Выведите уравнение для функции u , удовлетворяющей условиям

$$h \in C_0^\infty \quad \int_0^1 (u'' h'' - u' h') dx = 0$$

при всех h .

- [2 балла] Решить задачу Коши:

$$y'' + 4y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Критерии оценивания и шкала оценки контрольной работы

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Решено задач на 8 или более баллов
«Хорошо» (6-7)	Решено задач на 6-7 баллов
«Удовлетворительно» (4-5)	Решено задач на 4-5 баллов

«Неудовлетворительно» (0-3)	Решено задач на менее чем 4 баллов
--------------------------------	------------------------------------

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Контрольная работа проводится в формате аудиторной письменной работы.

Примерные задания контрольной работы

1. а) [2 балла] Найти производную по Гамо функционала

$$J[x] = \int_1^e (t(x'(t))^2 - x) dt$$

определенного на множестве функций

$$x \in C^1([1, e]), \quad x(1) = 1, \quad x(e) = 2.$$

б) [4 балла] Найти экстремальное решение задачи вариационного исчисления

$$J[x] = \int_1^e (t(x'(t))^2 - x) dt \rightarrow \max; \quad x(1) = 1, \quad x(e) = 2$$

2. [4 балла] Найти экстремальное решение задачи вариационного исчисления

$$J[x] = \int_0^\pi ((x''')^2 - x^2) dt \rightarrow \max; \quad x(0) = x(\pi) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x'(\pi) = -1.$$

Критерии оценивания и шкала оценки контрольной работы

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Решено задач на 8 или более баллов
«Хорошо» (6-7)	Решено задач на 6-7 баллов
«Удовлетворительно» (4-5)	Решено задач на 4-5 баллов
«Неудовлетворительно» (0-3)	Решено задач на менее чем 4 баллов

АУДИТОРНАЯ РАБОТА

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских занятиях: оценивается активность студентов, успешное решение задач на семинаре. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале за работу на семинарских занятиях определяется перед итоговым контролем – *О аудиторная.*

Критерии оценивания и шкала оценки аудиторной работы

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Решено задач на семинарах на 8 или более баллов

«Хорошо» (6-7)	Решено задач на семинарах на 6-7 баллов
«Удовлетворительно» (4-5)	Решено задач на семинарах на 4-5 баллов
«Неудовлетворительно» (0-3)	Решено задач на семинарах на менее чем 4 баллов

7.2.2. Итоговый контроль по дисциплине

Проверка качества освоения дисциплины производится в форме письменного экзамена.

Примерные вопросы для оценки качества освоения дисциплины

1. Нормированные и метрические пространства.
2. Норма линейного оператора. Ограниченность непрерывного функционала.
3. Дифференциалы Гато и Фреше функционала.
4. Необходимое условие экстремума.
5. Вторая вариация.
6. Основная лемма вариационного исчисления.
7. Лемма Дюбуа-Реймона.
8. Уравнение Эйлера.
9. Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
10. Гладкость интегрального функционала.
11. Естественные граничные условия.
12. Условие трансверсальности.
13. Решение задачи о брахистохроне.
14. Решение задачи Дидоны.
15. Изопериметрическая задача.
16. Изопериметрическая задача для интегральных функционалов.
17. Вторая вариация интегрального функционала.
18. Необходимые и достаточные условия экстремума интегрального функционала.
19. Постановка задач оптимального управления. Необходимое условие.

Примерная тематика практических заданий

1. Примеры нормированных пространств. Сходимость. Исследование на непрерывность.
2. Дифференциал Гато. Интегральные операторы.
3. Применение леммы вариационного исчисления.
4. Дифференциальные уравнения
5. Уравнение Эйлера. Частные случаи.
6. Необходимые и достаточные условия экстремума.
7. Изопериметрические задачи.
8. Задачи на оптимальное управление.
9. Модели в экономике.

Типовой экзаменационный билет состоит из теоретических и практических заданий.

Пример задания итогового контроля:

1. [1 балл] Сформулировать необходимые условия экстремума функционала.
2. [2 балла] Сформулировать и доказать лемму Дюбуа-Реймона.
3. [2 балла] Найдите производную по Гато функционала

$$J[u] = \int_0^1 ((u'')^2 - 25(u')^2) dx$$

4. [2 балла] Найдите оптимальное $c(t)$ управление для задачи с фиксированным $T > 0$

$$\max \int_0^T e^{-\rho t} \ln c dt$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx - c \\ x(0) = x_0 > 0 \\ x(T) = b > 0 \end{cases}$$

5. [3 балла] Решить изопериметрическую задачу

$$I[u] = \int_0^1 u'^2(x) dx, u(0) = 1, u(1) = 6,$$

при условии

$$\int_0^1 u(x) dx = 3.$$

Критерии оценивания и шкала оценки письменного экзамена

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Выполнено заданий на 8 или более баллов
«Хорошо» (6-7)	Выполнено заданий на 6-7 баллов
«Удовлетворительно» (4-5)	Выполнено заданий на 4-5 баллов
«Неудовлетворительно» (0-3)	Выполнено заданий на менее чем 4 баллов

7.3 Порядок формирования оценок по дисциплине

Результирующая оценка по дисциплине рассчитывается следующим образом:

$$O_{результ} = 0,18 \cdot O_{ДЗ} + 0,18 \cdot O_{КР} + 0,24 \cdot O_{аудиторная} + 0,4 \cdot O_{экс}, \text{ где}$$

$O_{ДЗ}$ – оценка за домашнее задание

$O_{КР}$ – оценка за контрольную работу

$O_{экс}$ – оценка за экзамен

$O_{аудиторная}$ – накопленная оценка по 10-ти балльной шкале за работу на семинарских занятиях, определяемая перед итоговым контролем. Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских занятиях: успешное решение задач на семинаре, выполнение домашних заданий и подготовки к семинарам (контроль может производиться в форме устных и письменных опросов), оценивается активность студентов. Оценки за работу на семинарских занятиях преподаватель выставляет в рабочую ведомость.

Способ округления экзаменационной и результирующей оценок: в пользу студента (т.е. округление к большему целому).

8 Образовательные технологии

Используются традиционные формы обучения – лекции и семинары.

9 Учебно-методическое и информационное обеспечение

10 печение дисциплины

9.1 Основная литература

1. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. Том 3 : учебник для бакалавров [Электронный ресурс] / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 351 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/book/kurs-matematicheskogo-analiza-v-3-t-tom-3-390105> – (ЭБС Юрайт).
2. Tang, K. T. Mathematical Methods for Engineers and Scientists 3: Fourier Analysis, Partial Differential Equations and Variational Methods [Electronic Resource] /Kwong-Tin Tang. - Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 2007. - 438 p. - Authorized access: <https://proxylibrary.hse.ru:2176/book/10.1007/978-3-540-44697-2>

10.2 Дополнительная литература

1. Geering, H.P. Optimal Control with Engineering Applications [Electronic Resource] / Hans Peters Geering. - Springer Berlin Heidelberg, 2007. - 134 p. Authorized access: <https://www.springer.com/gp/book/9783540694373> - (Online Digital Library "Springer eBooks").
2. Clarke, F. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control [Electronic Resource] / Francis Clarke. - Springer, 2013. - 591 p. - Authorized access: <https://proxylibrary.hse.ru:2066/10.1007/978-1-4471-4820-3>

11 Рекомендации для самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа может рассматриваться как организационная форма обучения – система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью по освоению знаний и умений в области учебной деятельности без посторонней помощи. Студенту нужно четко понимать, что самостоятельная работа – не просто обязательное, а необходимое условие для получения знаний по дисциплине и развитию компетенций, необходимых в будущей профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных на лекциях теоретических знаний;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная программой учебной дисциплины, раскрывающей и конкретизирующей ее содержание, осуществляется студентом инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует источники для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, предлагает демонстрационные задания.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их содержание и характер могут иметь как универсальный, так вариативный и дифференцированный характер, учитывать индивидуальные особенности студента.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов, online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине, или в рамках консультаций, в том числе учебными ассистентами.

Конкретный вариант наглядного представления результатов определяется форматом аудиторного занятия и задания преподавателя.

12 Материально-техническое и программное обеспечение дисциплины

Проектор и компьютер для проведения лекций и семинаров. Дисциплина имеет дистанционную поддержку, осуществляемую через систему LMS.

12 Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

1) для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

2) для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

3) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.