

**Санкт-Петербургский филиал федерального государственного  
автономного образовательного учреждения высшего образования  
«Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"»**

Факультет Санкт-Петербургская школа  
физико-математических и компьютерных наук  
Департамент информатики

**Рабочая программа дисциплины**  
Дополнительные главы статистики и линейной алгебры

для образовательной программы «Программирование и анализ данных»  
направления подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»  
уровень магистратура

Разработчик: Мальковский Николай Владимирович, nmalkovskiy@hse.ru

Утверждена Академическим руководителем образовательной программы

«31» августа 2018 г.

А.В. Омельченко \_\_\_\_\_

Санкт-Петербург, 2018

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.*

## 1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает требования к образовательным результатам и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих дисциплину «Дополнительные главы статистики и линейной алгебры», учебных ассистентов и студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки магистров, обучающихся по программе «Прикладная математика и информатика» и изучающих дисциплину «Дополнительные главы статистики и линейной алгебры».

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом НИУ ВШЭ по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (уровень бакалавриата), утвержденным ученым советом Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», протокол от 03.03.2017 №02.
- Основной профессиональной образовательной программой «Прикладная математика и информатика» направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»;

## 2. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Дополнительные главы статистики и линейной алгебры» являются формирование у студентов теоретических знаний по выпуклому анализу, основным видам задач математической оптимизации, умения проводить анализ сложности (сходимости) методов их решений и практических навыков по методам решения задач математической оптимизации как основного математического аппарата для решения задач машинного обучения.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные понятия и факты теории вероятностей и математической статистики, такие, как вероятностное пространство, случайные величины, виды сходимости последовательностей случайных величин, выборка, оценки параметров, статистические критерии.
- Уметь вычислять числовые характеристики случайных величин, применять предельные теоремы теории вероятностей, находить предельное распределение марковских цепей, строить точечные и интервальные оценки параметров распределений.
- Иметь навыки (приобрести опыт) использования статистических методов для решения задач оценивания параметров и проверки гипотез.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС	Уровень формирования компетенции	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения)	Формы и методы обучения, способствующие формированию	Форма контроля уровня сформированности компетенции
-------------	-------------	----------------------------------	--	--	--

			результата)	ю и развитию компетенции	
--	--	--	-------------	-----------------------------	--

Способность учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной	УК-1	РБ  СД  МЦ	Знает основные способы познания, их эволюцию Умеет применять знания основных предметных областей в рамках профессиональной деятельности Имеет представление об основных методах и способах получения новых знаний	Лекции, подготовка к занятиям, работа на практических занятиях, индивидуальная самостоятельная работа	Домашние задания, письменный зачет, письменный экзамен
Способность решать проблемы в профессиональной деятельности на основе анализа и синтеза	УК-3	РБ  СД  МЦ	Способен выявить достоверные источники информации Умеет обработать, проанализировать и синтезировать информацию. Способен решить проблему, используя выбранный метод.	Лекции, подготовка к занятиям, работа на практических занятиях, индивидуальная самостоятельная работа	Домашние задания, письменный зачет, письменный экзамен
Способность описывать проблемы и ситуации профессиональной деятельности, используя язык и аппарат математики	ПК-1	РБ  СД  МЦ	Способен описать математические модели поставленных практических задач Владеет навыками математически корректно и адекватно записать логические формулы и другие условия, описывающие дискретный объекты прикладной задачи Применяет полученные знания к математическому моделированию практических задач	Лекции, подготовка к занятиям, работа на практических занятиях, индивидуальная самостоятельная работа	Домашние задания, письменный зачет, письменный экзамен

Способность математически корректно формулировать и доказывать утверждения, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата.	ПК-2	РБ  СД  МЦ	Знает основные принципы построения логически и математически корректных доказательств Владеет навыками доказательства математических утверждений, принципами математической индукции Использует полученные навыки для получения конкретных результатов математических утверждений	Лекции, подготовка к практическим занятиям, работа на практических занятиях, индивидуальная самостоятельная работа	Домашние задания, письменный зачет, письменный экзамен
---	------	------------------------	---	--	--

#### 4. Место дисциплины в структуре образовательной программы.

- Для программы «Прикладная математика и информатика» направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» настоящая дисциплина относится к циклу дисциплин базовой части.
- Курс рассчитан на 136 часов аудиторной нагрузки, из них 68 часов лекций и 68 часов семинаров, общим объемом 6 зачетных единиц (228 часа).

#### 1. Тематический план учебной дисциплины.

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	

1	Элементарная теория вероятностей	28	8		10	10
2	Общая теория вероятностей	38	14		12	12
3	Метод характеристических функций	28	8		10	10
4	Случайные процессы	20	8		6	6
5	Оценивание параметров распределений	30	8		8	14
6	Линейные статистические модели	23	6		6	11
7	Проверка статистических гипотез	38	10		10	18
8	Прикладные аспекты теории вероятностей и математической статистики	23	6		6	11
ИТОГО		228	68		68	92

## 6.Содержание дисциплины

<u>Раздел 1</u> Элементарная теория вероятностей	
Тема 1	Вероятностная модель эксперимента со случайными исходами. Операции над событиями и операции над множествами. Мотивировка определений. Конечное вероятностное пространство. Свойства вероятности. Классическое определение вероятности.
Тема 2	Условная вероятность. Мотивировка и определение. Свойства условных вероятностей. Формула полной вероятности. Формула и теорема Байеса. Независимые события. Мотивировка и определение. Парная независимость и независимость в совокупности.
Тема 3	Схема Бернулли. Полиномиальная схема. Предельные теоремы для схемы Бернулли: теоремы Пуассона и Прохорова, локальная теорема Муавра-Лапласа, интегральная теорема Муавра-Лапласа и оценка на скорость сходимости. Приложения к комбинаторике.
<u>Раздел 2</u> Общая теория вероятностей	
Тема 1	Случайная величина. Распределение случайной величины. Свойства функций распределения. Дискретное, непрерывное и абсолютно непрерывное распределения. Свойства. Примеры вероятностных распределений. Совместные распределения. Совместное распределение независимых случайных величин (вероятности, функции распределения и плотности). Свертки мер. Свертки мер, имеющих плотность. Распределение суммы независимых случайных величин. Независимость функций от независимых случайных величин.
Тема 2	Математическое ожидание. Свойства математических ожиданий. Медиана. Дисперсия. Свойства дисперсии. Неравенство Чебышёва. Математическое ожидание и дисперсия для равномерного и нормального распределений. Приложения к комбинаторике. Ковариация. Связь с независимостью. Коэффициент корреляции. Приложения к теории чисел.
Тема 3	Различные виды сходимости последовательности случайных величин. Связь между сходимостями. Закон больших чисел и усиленный закон больших чисел. Следствия. Метод Монте-Карло.
Тема 4	Производящие функции для целозначных случайных величин. Математическое ожидание для комплекснозначных случайных величин. Ковариация.

<p><u>Раздел 3</u> Метод характеристических функций</p>	
Тема 1	<p>Характеристическая функция случайной величины. Свойства. Характеристическая функция нормального распределения. Теоремы о связи между математическим ожиданием и характеристической функцией. Формула обращения. Следствия формулы обращения. Сумма независимых нормальных случайных величин.</p>
Тема 2	<p>Равносильность сходимости по распределению, сходимости характеристических функций и сходимости математических ожиданий функций от случайных величин. Равномерная сходимость к непрерывной функции распределения.</p>
Тема 3	<p>Различные варианты центральной предельной теоремы. Центральная предельная теорема в форме Леви. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона. Центральная предельная теорема в форме Линденберга. Центральная предельная теорема в форме Ляпунова. Оценки на скорость сходимости.</p>
<p><u>Раздел 4</u> Случайные процессы</p>	
Тема 1	<p>Условные математические ожидания. Примеры. Существование и единственность. Свойства условных математических ожиданий. Математическое ожидание суммы случайного количества случайных величин. Мартингалы. Определение и примеры.</p>
Тема 2	<p>Случайные процессы. Определения и примеры. Траектории. Марковские цепи. Примеры. Вероятность фиксированной траектории. Теорема существования. Распределение положений на <math>n</math>-м шаге. Стационарное распределение. Теорема Маркова. Классификация состояний цепи Маркова. Критерий возвратности. Теорема солидарности.</p>

Тема 3	Случайные блуждания на целых точках прямой и на целочисленной решетке. Теорема Поля о возвращении. Ветвящиеся процессы. Вероятность вырождения и скорость вырождения в критическом случае.
Раздел 5 Оценивание параметров распределений	
Тема 1	Математическая постановка задач статистики. Два определения выборки; эмпирическое распределение. Выборочные характеристики как оценки генеральных: моменты, значение функции распределения в точке, квантили. Выборка из нормального распределения: лемма Фишера.
Тема 2	Оценивание параметров. Требования, предъявляемые к оценкам: состоятельность, несмещенность, асимптотическая нормальность, эффективность. Метод моментов; состоятельность и асимптотическая нормальность оценок метода моментов. Метод максимального правдоподобия; асимптотическая нормальность оценок максимального правдоподобия. Неравенство Рао-Крамера. Достаточные статистики, полные статистики, теорема Рао-Блекуэлла-Колмогорова.
Тема 3	Доверительные интервалы: определение, построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения. Построение доверительного интервала с помощью центральной статистики. Асимптотические доверительные интервалы.
Раздел 6 Линейные статистические модели	
Тема 1	Модель линейной регрессии. Точечное оценивание параметра. Свойства оценки: теорема Гаусса-Маркова.
Тема 2	Доверительное оценивание параметров линейной регрессии. Проверка гипотез о параметрах линейной регрессии.
Раздел 7 Проверка статистических гипотез	
Тема 1	Основные понятия задачи проверки статистических гипотез. Проверка параметрических гипотез в гауссовских моделях. Критерии согласия, свободные от распределения. Критерии однородности, свободные от распределения. Критерий согласия хи-квадрат для проверки простых гипотез. Критерий согласия хи-квадрат для проверки сложных гипотез согласия, гипотезы однородности, гипотезы независимости.

Тема 2	Лемма Неймана-Пирсона. Ранги и порядковые статистики; основные нулевые гипотезы для ранговых критериев. Локально наиболее мощные ранговые критерии. Предельные распределения статистик ранговых критериев.
Раздел 8 Прикладные аспекты теории вероятностей и математической статистики	
Тема 1	Датчики псевдослучайных чисел. Моделирование вероятностных распределений. Марковские методы Монте-Карло. EM-алгоритм. Реализация статистических критериев.

мы расскажем об использовании нейронных сетей в задачах аппроксимации, регрессионных задачах, задачах распознавания образов, расскажем о работе с Keras и TensorFlow, с разреженными данными, SVD разложении, XGBoost и калибровке моделей.

## 7.Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

### 7.1. Формы контроля знаний студентов.

Тип контроля	Форма контроля	2 год		3 год		Параметры
		3 модуль	4 модуль	1 модуль	2 модуль	
Текущий	Домашнее задание №1	*				Письменное домашнее задание
	Домашнее задание №2		*			Письменное домашнее задание
	Домашнее задание №3			*		Письменное домашнее задание
	Домашнее задание №4				*	Письменное домашнее задание

Промежу- точный	Письменный зачет	*				Дифференцированный зачет в письменной форме
Промежу- точный	Письменный экзамен №1	*				Экзамен в письменной форме
Промежу- точный	Письменный экзамен №2		*			Экзамен в письменной форме
Промежу- точный	Письменный экзамен №3			*		Экзамен в письменной форме
Промежу- точный	Письменный экзамен №4				*	Экзамен в письменной форме

## 7.2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ, НАВЫКОВ

Текущий контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств.

### ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №1

*Домашнее задание №1 выдается студентам в одном варианте и состоит из 9 задач. Каждой задаче присвоен свой балл. Срок выполнения домашнего задания - 2 недели. Форма представления обучающимися домашнего задания - представленные в письменном виде решения задач.*

Задача 1. [1 балл] Найти вероятность того, что дни рождения 8 человек придутся в точности на два месяца, предполагая, что все месяцы равновероятны.

Задача 2. [1 балл] Пусть события  $A$ ,  $B$  и  $C$  попарно независимы и  $P(C) > 0$ . Верно ли, что объединение событий  $A$  и  $B$  не зависит от события  $C$ ?

Задача 3. [1 балл] В схеме Бернулли вероятность успеха равна  $p$ . Найти вероятность того, что две неудачи подряд встретятся раньше последовательности из неудачи и успеха подряд.

Задача 4. [1 балл] В урну, содержащую  $n$  шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этой урны белый шар, если все предположения о первоначальном числе белых шаров равновозможны?

Задача 5. [1 балл] Случайная величина  $X$  имеет стандартное экспоненциальное распределение. Найти функцию распределения и плотность случайной величины  $1/X^2$ .

Задача 6. [2 балла] Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы,  $X$  имеет биномиальное распределение с параметрами  $n=2$ ,  $p=1/2$ ,  $Y$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[0;1]$ . Найти функцию распределения случайных величин  $X+Y$ ,  $X \cdot Y$ . Являются ли эти распределения абсолютно непрерывными?

Задача 7. [2 балла] Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\exp(X)$ , если случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[-1;1]$ .

Задача 8. [2,5 балла] Найти вероятность того, что в серии из  $n$  испытаний Бернулли число успехов дает остаток 1 при делении на 3.

Задача 9. [1,5 балла] Случайная величина  $X_n$  принимает значения  $-n, 0, n$  с вероятностями

$1/2n^2$ ,  $1-1/n^2$ ,  $1/2n^2$ . Применим ли к последовательности  $X_n$  закон больших чисел?

### Критерии оценивания и шкала оценки домашнего задания №1.

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Решено задач на 12,5 или более баллов
«Хорошо» (6-7)	Решено задач на 10-12 баллов
«Удовлетворительно» (4-5)	Решено задач на 7-9 баллов
«Неудовлетворительно» (0-2)	Решено задач на менее чем 7 баллов

### ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №2

*Домашнее задание №2 выдается студентам в одном варианте и состоит из 7 задач. Каждой задаче присвоен свой балл. Срок выполнения домашнего задания - 2 недели. Форма представления обучающимися домашнего задания - представленные в письменном виде решения задач.*

Задача 1. [1,5 балла] Характеристическая функция случайной величины  $X$  равна  $\exp(-t^2)/3 + 2\sin(t)/3t$ . Найти плотность распределения случайной величины  $X$ .

Задача 2. [1,5 балла] Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, характеристическая функция которой равна  $(1-it)^{-p}(1+it)^{-q}$ .

Задача 3. [2 балла] Случайные величины  $X_1, X_2, \dots$  независимы и имеют равномерное распределение на отрезке  $[0,1]$ . Найдите предел среднего геометрического первых  $n$  случайных величин.

Задача 4. [2 балла] На улице стоит человек и продает газеты. Предположим, что каждый из проходящих мимо людей покупает газету с вероятностью  $1/3$ . Пусть  $X$  обозначает число людей, прошедших мимо продавца за время, пока он продавал первые 100 экземпляров газеты. С помощью ЦПТ оцените распределение  $X$ .

Задача 5. [2,5 балла]  $X$  и  $Y$  – случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Доказать, что если с вероятностью 1  $E(X/Y)=Y$  и  $E(Y/X)=X$ , то  $X=Y$  п.н.

Задача 6. [2 балла] Доказать, что если случайные величины  $X(0), \dots, X(n)$  образуют цепь Маркова, то случайные величины  $Y(k)=X(n-k)$  также образуют цепь Маркова.

Задача 7. [1,5 балла] Игральная кость последовательно перекидывается с одной грани равномерно на любую из четырех соседних не зависимо от предыдущего. К какому пределу стремится вероятность того, что при  $n$ -м перекидывании кость окажется на грани «б», если

сначала она находилась в этом же положении?

### Критерии оценивания и шкала оценки домашнего задания №2.

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Решено задач на 12 или более баллов
«Хорошо» (6-7)	Решено задач на 10-11,5 баллов
«Удовлетворительно» (4-5)	Решено задач на 7-9 баллов
«Неудовлетворительно» (0-2)	Решено задач на менее чем 7 баллов

### ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №3

*Домашнее задание №3 выдается студентам в одном варианте и состоит из 9 задач. Каждой задаче присвоен свой балл. Срок выполнения домашнего задания - 2 недели. Форма представления обучающимися домашнего задания - представленные в письменном виде решения задач.*

В задачах 1-8  $X_1, \dots, X_n$  – выборка из распределения Пуассона с параметром  $a$ .

Задача 1. [1,5 балла] Найти оценку метода моментов (ОММ) параметра  $a$ .

Задача 2. [1,5 балла] Найти оценку максимального правдоподобия параметра  $a$ .

Задача 3. [1,5 балла] Проверить ОММ на несмещенность.

Задача 4. [1,5 балла] Проверить ОММ на состоятельность.

Задача 5. [1,5 балла] Проверить ОММ на асимптотическую нормальность.

Задача 6. [2 балла] Является ли выборочное среднее достаточной статистикой?

Задача 7. [2,5 балла] Является ли выборочное среднее полной статистикой?

Задача 8. [1,5 балла] Найти эффективную несмещенную оценку параметра  $a$ .

Задача 9. [2,5 балла] Результаты замеров координаты  $a(t)$  движущейся равномерно и прямолинейно точки в моменты  $t=1,2,3,4,5$  оказались соответственно равны: 12,98; 13,05; 13,32; 14,22; 13,97. Предполагая погрешности измерений независимыми и нормальными с нулевым

средним, построить 0,95-доверительный эллипс для точки  $(a(0), v)$ , где  $v$  – скорость точки.

### Критерии оценивания и шкала оценки домашнего задания №3.

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Решено задач на 13 или более баллов
«Хорошо» (6-7)	Решено задач на 10-12,5 баллов
«Удовлетворительно» (4-5)	Решено задач на 7-9 баллов
«Неудовлетворительно» (0-2)	Решено задач на менее чем 7 баллов

### ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №4

*Домашнее задание №4 выдается студентам в одном варианте и состоит из 6 задач. Каждой задаче присвоен свой балл. Срок выполнения домашнего задания - 2 недели. Форма представления обучающимися домашнего задания - представленные в письменном виде решения задач.*

Задача 1. [1,5 балла] Цифры 0, 1, 2, ..., 9 среди 800 первых десятичных знаков числа  $\pi$  появились 74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 76, 91 раз соответственно. Проверить гипотезу о согласии этих данных с равномерным на множестве  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$  распределением.

Задача 2. [1,5 балла] При переписи населения Англии и Уэльса в 1901 г. было зарегистрировано 15729000 мужчин и 16799000 женщин; 3497 мужчин и 3072 женщин были зарегистрированы как глухонемые от рождения. Проверить гипотезу о независимости глухонемоты от пола.

Задача 3. [1 балл] Построить алгоритм моделирования распределения Коши.

Задача 4. [3 балла] Реализовать алгоритм Метрополиса-Гастингса.

Задача 5. [3 балла] Реализовать EM-алгоритм.

Задача 6. [3 балла] Реализовать критерий Харке-Бера согласия с нормальным

распределением.

#### Критерии оценивания и шкала оценки домашнего задания №4.

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Решено задач на 11 или более баллов
«Хорошо» (6-7)	Решено задач на 9-10,5 баллов
«Удовлетворительно» (4-5)	Решено задач на 7-8 баллов
«Неудовлетворительно» (0-2)	Решено задач на менее чем 7 баллов

#### ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ КОНТРОЛЬ

Проверка качества освоения дисциплины производится в форме письменного зачета и письменного экзамена.

#### ПИСЬМЕННЫЙ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЙ ЗАЧЕТ

*Письменный дифференцированный зачет проводится в форме контрольной работы. Каждый студент получает список из 5 задач. Для получения положительной оценки он должен решить не менее трех из них. На проведение зачета отводится 1,5 часа.*

Перечень вопросов/заданий:

1. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, нужно выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это может быть сделано?
2. Доказать, что любой простой связный граф  $G$ , отличный от полного графа и построенный на  $n > 2$  вершинах, содержит в качестве своего подграфа индуцированный путь  $P_3$  длины 2.
3. Рассмотрим деревья, построенные на множестве вершин  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , в которых вершины 2 и 3 имеют степень 3, вершина 5 имеет степень 2, а остальные вершины имеют степень, равную 1. Построить все такие деревья. Можно ли получить количество таких деревьев с помощью кода Прюфера?
4. Доказать, что вершинно односвязный граф  $G$  является реберно  $k$ -связным тогда и только тогда, когда любой блок  $B_i$  такого графа реберно  $k$ -связный.
5. Доказать, что в непустом  $k$ -регулярном двудольном графе всегда существует совершенное паросочетание.

#### Критерии оценивания и шкала оценки письменного дифференцированного

### зачета

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Решены все 5 задач
«Хорошо» (6-7)	Решены 4 задачи
«Удовлетворительно» (4-5)	Решены 3 задачи
«Неудовлетворительно» (0-2)	Решено менее трех задач

### ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН №1

*Письменный экзамен №1 проводится в форме ответов на вопросы экзаменационного билета. Экзаменационный билет формируется по одному вопросу из первой и второй части перечня вопросов к экзамену. На подготовку ответа выделяется 2,5 часа.*

Примерный перечень вопросов к экзамену:

2. Вероятностная модель эксперимента со случайными исходами. Операции над событиями и операции над множествами.
3. Конечное вероятностное пространство. Свойства вероятности. Классическое определение вероятности.
4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула и теорема Байеса.
5. Независимые события. Мотивировка и определение. Парная независимость и независимость в совокупности.
6. Схема Бернулли. Полиномиальная схема.
7. Теорема Эрдеша (вероятностная оценка снизу для чисел Рамсея).
8. Теорема Пуассона и оценка скорости сходимости в ней.
9. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
10. Интегральная теорема Муавра-Лапласа и оценка на скорость сходимости в ней.
11. Вероятностное пространство. Условная вероятность. Независимые события.
12. Лемма Бореля-Кантелли. Закон нуля и единицы.
13. Случайная величина. Распределение случайной величины. Свойства функций распределения.
14. Дискретное, непрерывное и абсолютно непрерывное распределения. Примеры вероятностных распределений.
15. Совместные распределения. Совместное распределение независимых случайных

величин (вероятности, функции распределения и плотности).

16. Свертки мер. Свертки мер, имеющих плотность.
17. Распределение суммы независимых случайных величин.
18. Математическое ожидание. Определение и свойства. Медиана.
19. Дисперсия. Определение и свойства.
20. Неравенство Чебышёва. Математическое ожидание и дисперсия для равномерного и нормального распределений.
21. Выбор независимого множества в графе.
22. Ковариация. Связь с независимостью. Коэффициент корреляции.
23. Теорема Харди--Рамануджана о количестве различных простых делителей числа.
24. Различные виды сходимости последовательности случайных величин. Связь между сходимостями.
25. Закон больших чисел и усиленный закон больших чисел. Метод Монте--Карло.
26. Независимость функций от независимых случайных величин.
27. Производящие функции для целозначных случайных величин.
28. Математическое ожидание для комплекснозначных случайных величин.

### Критерии оценивания и шкала оценки письменного экзамена №1

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Дан развернутый ответ на поставленный вопрос. Материал изложен последовательно. Имеются логичные и аргументированные выводы.
«Хорошо» (6-7)	Дан развернутый ответ на поставленный вопрос. Материал изложен непоследовательно. Имеются логичные и аргументированные выводы.
«Удовлетворительно» (4-5)	Ответ на вопрос не является полным. Материал изложен непоследовательно. Отсутствуют выводы.
«Неудовлетворительно» (0-2)	Ответ на вопрос является неверным. Материал изложен непоследовательно. Отсутствуют выводы.

### ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН №2

*Письменный экзамен №2 проводится в форме ответов на вопросы экзаменационного билета. Экзаменационный билет формируется по одному вопросу из первой и второй части*

перечня вопросов к экзамену. На подготовку ответа выделяется 2,5 часа.

Примерный перечень вопросов к экзамену:

1. Характеристическая функция.
2. Характеристическая функция нормального распределения.
3. Теоремы о связи между математическим ожиданием и характеристической функцией.
4. Формула обращения.
5. Следствия формулы обращения. Сумма независимых нормальных случайных величин.
6. Теорема о свойствах, равносильных сходимости по распределению.
7. Равномерная сходимость к непрерывной функции распределения.
8. Центральная предельная теорема в форме Леви.
9. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.
10. Центральная предельная теорема в форме Линденберга (без доказательства). Центральная предельная теорема в форме Ляпунова. Оценки на скорость сходимости.
11. Условные математические ожидания. Существование и единственность.
12. Свойства условных математических ожиданий.
13. Математическое ожидание суммы случайного количества случайных величин. Мартингалы.
14. Случайные процессы. Траектории.
15. Марковские цепи. Вероятность фиксированной траектории. Теорема существования (без доказательства).
16. Марковские цепи. Распределение положений на  $n$ -м шаге. Стационарное распределение.
17. Теорема Маркова.
18. Классификация состояний цепи Маркова. Критерий возвратности. Теорема солидарности.
19. Случайные блуждания по целым точкам прямой и на целочисленной решетке.
20. Теорема Пойя о возвращении.
21. Ветвящиеся процессы. Вероятность вырождения и скорость вырождения в

критическом случае.

### Критерии оценивания и шкала оценки письменного экзамена №2

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Дан развернутый ответ на поставленный вопрос. Материал изложен последовательно. Имеются логичные и аргументированные выводы.
«Хорошо» (6-7)	Дан развернутый ответ на поставленный вопрос. Материал изложен непоследовательно. Имеются логичные и аргументированные выводы.
«Удовлетворительно» (4-5)	Ответ на вопрос не является полным. Материал изложен непоследовательно. Отсутствуют выводы.
«Неудовлетворительно» (0-2)	Ответ на вопрос является неверным. Материал изложен непоследовательно. Отсутствуют выводы.

### ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН №3

*Письменный экзамен №3 проводится в форме ответов на вопросы экзаменационного билета. Экзаменационный билет формируется по одному вопросу из первой и второй части*

перечня вопросов к экзамену. На подготовку ответа выделяется 2,5 часа.

Примерный перечень вопросов к экзамену:

1. Математическая постановка задач статистики.
2. Два определения выборки. Эмпирическое распределение.
3. Выборочные характеристики как оценки генеральных.
4. Лемма Фишера.
5. Требования, предъявляемые к оценкам параметров.
6. Метод моментов. Свойства оценок метода моментов.
7. Метод максимального правдоподобия. Свойства оценок.
8. Достаточные статистики и их применения.
9. Доверительные интервалы.
10. Асимптотические доверительные интервалы.
11. Модель линейной регрессии. Оценка метода наименьших квадратов.
12. Теорема Гаусса-Маркова.
13. Доверительное оценивание параметров линейной регрессии.
14. Проверка гипотез о параметрах линейной регрессии.

### Критерии оценивания и шкала оценки письменного экзамена №3

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Дан развернутый ответ на поставленный вопрос. Материал изложен последовательно. Имеются логичные и аргументированные выводы.
«Хорошо» (6-7)	Дан развернутый ответ на поставленный вопрос. Материал изложен непоследовательно. Имеются логичные и аргументированные выводы.
«Удовлетворительно» (4-5)	Ответ на вопрос не является полным. Материал изложен непоследовательно. Отсутствуют выводы.
«Неудовлетворительно» (0-2)	Ответ на вопрос является неверным. Материал изложен непоследовательно. Отсутствуют выводы.

### ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН №4

*Письменный экзамен №4 проводится в форме ответов на вопросы экзаменационного билета. Экзаменационный билет формируется по одному вопросу из первой и второй части*

перечня вопросов к экзамену. На подготовку ответа выделяется 2,5 часа.

Примерный перечень вопросов к экзамену:

1. Основные понятия задачи проверки гипотез.
2. Проверка параметрических гипотез в гауссовских моделях.
3. Критерии согласия, свободные от распределения.
4. Критерии однородности, свободные от распределения.
5. Критерий согласия хи-квадрат для простых гипотез.
6. Критерий согласия хи-квадрат для сложных гипотез
7. Критерий хи-квадрат для гипотез однородности и независимости.
8. Лемма Неймана-Пирсона.
9. Ранги и порядковые статистики.
10. Локально наиболее мощные ранговые критерии.
11. Предельные распределения статистик ранговых критериев.
12. Моделирование вероятностных распределений.
13. Марковские методы Монте-Карло.
14. EM-алгоритм.

#### Критерии оценивания и шкала оценки письменного экзамена №4

Оценка	Критерии выставления оценки
«Отлично» (8-10)	Дан развернутый ответ на поставленный вопрос. Материал изложен последовательно. Имеются логичные и аргументированные выводы.
«Хорошо» (6-7)	Дан развернутый ответ на поставленный вопрос. Материал изложен непоследовательно. Имеются логичные и аргументированные выводы.
«Удовлетворительно» (4-5)	Ответ на вопрос не является полным. Материал изложен непоследовательно. Отсутствуют выводы.
«Неудовлетворительно» (0-2)	Ответ на вопрос является неверным. Материал изложен непоследовательно. Отсутствуют выводы.

### 7.3 Порядок формирования оценок по дисциплине

Преподаватель учитывает работу на практических занятиях и оценку за текущий контроль

(домашние задания).

$$O_{\text{накопленная } 1} = 0,6 * O_{\text{текущий}} + 0,4 * O_{\text{ауд}}$$

где  $O_{\text{текущий}}$  рассчитывается как взвешенная сумма всех форм текущего контроля.

$$O_{\text{текущий}} = 0,25 * O_{\text{д/з1}} + 0,25 * O_{\text{д/з2}} + 0,25 * O_{\text{д/з3}} + 0,25 * O_{\text{д/з4}}$$

Действует способ округления накопленной оценки текущего контроля в пользу студента (при значениях от 0,1 до 0,4 оценка округляется в меньшую сторону, от 0,5 до 0,9 – в большую)

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

$$O_{\text{Результирующая}} = 0,25 O_{\text{накопленная}} + 0,25 O_{\text{дифф.зачет}} + 0,25 O_{\text{экзамен1}} + 0,25 O_{\text{экзамен2}}$$

На экзамене студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 1.1. Основная литература

1. Теория вероятностей с примерами и задачами: Учебное пособие / Ананьевский С.М., Невзоров В.Б. - СПб:СПбГУ, 2013. - 240 с
2. Попов, А. М. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под ред. А. М. Попова. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 434 с.
3. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. — 2-е изд., испр. и перераб. — М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2018. — 240 с.

### 2.1. Дополнительная литература

1. Малугин, В. А. Теория вероятностей : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / В. А. Малугин. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 266 с.
2. Малугин, В. А. Математическая статистика : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / В. А. Малугин. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 218 с.
3. Калинина, В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для академического бакалавриата / В. Н. Калинина. — 2-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 472 с.

## 9. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы, обучающихся по дисциплине.

Самостоятельная работа может рассматриваться как организационная форма обучения - система педагогических условий, обеспечивающих управление учебной деятельностью по освоению знаний и умений в области учебной деятельности без посторонней помощи. Студенту нужно четко понимать, что самостоятельная работа – не просто обязательное, а необходимое условие для получения знаний по дисциплине и развитию компетенций, необходимых в будущей профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных на лекциях теоретических знаний;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную

документацию и специальную литературу;

- развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования практических (общеучебных и профессиональных) умений и навыков;
- развития исследовательских умений;
- получения навыков эффективной самостоятельной профессиональной (практической и научно-теоретической) деятельности.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы:

- аудиторная;
- внеаудиторная.

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа - планируемая учебная работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа, не предусмотренная программой учебной дисциплины, раскрывающей и конкретизирующей ее содержание, осуществляется студентом инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Для более эффективного выполнения самостоятельной работы по дисциплине преподаватель рекомендует источники для работы, характеризует наиболее рациональную методику самостоятельной работы, демонстрирует ранее выполненные студентами работы и т. п.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их содержание и характер могут иметь вариативный и дифференцированный характер, учитывать индивидуальные особенности студента.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов online и на занятиях в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине на семинарских или контрольных занятиях.

Для представления результатов самостоятельной работы рекомендуется:

Составить план выступления, в котором отразить тему, самостоятельный характер проделанной работы, главные выводы и/или предложения, их краткое обоснование и практическое значение – с тем, чтобы в течение 3 – 5 минут представить достоинства выполненного самостоятельно задания.

Подготовить иллюстративный материал виде презентации для использования во время представления результатов самостоятельной работы в аудитории. Конкретный вариант наглядного представления результатов определяется форматом аудиторного занятия и задания преподавателя.

## **10. Материально-техническое обеспечение дисциплины и информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения информационных справочных систем (при необходимости).**

Для проведения всех занятий используется проектор и компьютер для проекции слайдов.

## **12. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья**

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться следующих

варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

1) для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

2) для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

3) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.