Программа учебной дисциплины Линейная алгебра

Утверждена
Академическим советом ООП
Протокол № 2.9.1-12/13 от «25» июня 2018 г.

Автор	Лобанов С.Г., доктор физико-математических наук, профессор
Число кредитов	6
Контактная работа (час.)	60
Самостоятельная работа (час.)	168
Курс	1
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

1. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Цели освоения дисциплины Линейная алгебра

- Добиться усвоения студентами теоретических основ, базовых результатов и теорем аналитической геометрии и линейной алгебры, а также основных математических приемов и правил формального анализа и решения различных математических задач на основе полученных теоретических знаний.
- Подготовить слушателей к чтению современных текстов по экономической теории, насыщенных векторными, матричными и операторными обозначениями;
- Обеспечить запросы других разделов математики, использующих возникающие в линейной алгебре конструкции;
- Научить слушателей давать геометрическую интерпретацию многомерным объектам и строить аналитическое описание геометрическим соотношениям.
- Продемонстрировать возможность бескоординатного описания линейных и квадратичных функций, подготавливая переход к изучению функционального анализа;
- Выработать у слушателей навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также задач, способствующих развитию начальных навыков научного исследования;
- Развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- точные формулировки основных понятий, уметь интерпретировать их на простых модельных примерах; в том числе, свободно использовать координатный, векторный, матричный или операторный способ записи математических соотношений;

- общие теоремы о структуре множества решений систем линейных, уметь применять специальные методы построения таких решений;
- свойства основных числовых характеристик матриц: определитель, ранг, размерность пространства строк и столбцов;

Уметь:

- формулировать и доказывать основные результаты этих разделов; представлять математические утверждения и их доказательства, проблемы и их решения ясно и точно в терминах, понятных для профессиональной аудитории, как в письменной, так и устной формах.
- понимать разделы учебной и научной литературы, связанные с применением линейных пространств, линейных отображений, линейных, билинейных и квадратичных форм

Владеть: навыками решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала; решения математические задач, аналогичные ранее изученным;

Учебная дисциплина «Линейная алгебра» не требует какой бы то ни было предварительной математической подготовки сверх обычной программы средней школы.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

1. Математический анализ
2. Микроэкономика
3. Макроэкономика
4. Теория вероятностей и математическая статистика
5. Эконометрика
6. Дифференциальные и разностные уравнения,
7. Методы оптимальных решений

2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений

Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений. Элементарные преобразования матриц. Обратимость элементарных преобразований. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений со ступенчатой матрицей системы. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений в случае двух или трех неизвестных. Ненулевые решения однородной системы уравнений.

Литература: [1], глава 1.

Раздел 2. Определитель

Определитель и элементарные преобразования. Построение определителя разложением по столбцу. Определитель транспонированной матрицы. Вычисление определителя разложением по строке.
Литература: [1], глава 2.

Раздел 3. Линейные пространства

Простейшие следствия аксиом линейного пространства. Подпространство линейного пространства. Простейшие свойства линейно зависимых векторов. Базис и координаты векторов. Существование базиса конечномерного пространства. Размерность линейного пространства.

Литература: [1], глава 3.

Раздел 4. Алгебра матриц

Сумма матриц. Умножение матрицы на число. Произведение матриц. Матричная запись системы уравнений. Свойства арифметических операций над матрицами. Обратная матрица и формулы Крамера. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями. Преобразование координат при замене базиса.

Литература: [1], глава 4.

Раздел 5. Ранг матрицы

Ранг матрицы. Ранг ступенчатой матрицы. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях. Теорема о ранге матрицы. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов). Ранг произведения матриц. Определитель произведения матриц.

Литература: [1], глава 5.

Раздел 6. Структура множества решений системы линейных уравнений

Векторная запись системы уравнений. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных уравнений. Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений. Структура множества решений системы линейных уравнений. Теорема о выборе главных и свободных неизвестных.

Литература: [1], глава 6.

Раздел 7. Линейные операторы

Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Характеристический многочлен линейного оператора. О корнях характеристического многочлена линейного оператора. Свойства собственных векторов с одинаковыми и различными собственными значениями.

Литература: [1], глава 7.

Раздел 8. Линейные, билинейные и квадратичные формы

Формула линейного функционала. Матрица билинейной формы. Матрица симметричной билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса. Единственность симметричной билинейной формы, порождающей квадратичную форму. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Закон инерции для квадратичных форм.

Литература: [1], глава 8.

Раздел 9. Элементы аналитической геометрии

Прямоугольная система координат на плоскости. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении. Векторы. Равенство векторов. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам. Скалярное произведение векторов. Общее уравнение прямой на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Параметрическое и каноническое уравнения прямой. Расстояние от точки до прямой. Преобразование координат точки при замене системы координат. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Общее уравнение плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых.

Литература: [1], глава 9.

Раздел 10. Евклидовы пространства

Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Длина вектора и угол между векторами. Ортогональность векторов. Независимость попарно ортогональных векторов. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Построение ортонормированного базиса ортогонализацией произвольного базиса. Матрица скалярного произведения в ортонормированном базисе. Ортогональные матрицы. Геометрическая интерпретация ортогональных матриц.

Литература: [1], глава 10.

Раздел 11. Самосопряженные операторы

Сопряженность операторов в евклидовом пространстве. Матрицы сопряженных операторов. Собственные векторы и собственные значения самосопряженных операторов. Ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Литература: [1], глава 11.

Раздел 12. Аффинные пространства

Преобразование координат точки при замене системы координат. Линейные отображения. Линейные операторы, связанные с линейными отображениями.

Геометрические свойства линейных отображений. Аффинные и изометрические отображения.

Литература: [1], глава 12.

3. ОЦЕНИВАНИЕ

Тип контроля	Форма контроля	1 год		Параметры **
		1	2	
Текущий (неделя)	Контрольная работа	8		Письменная работа 160 минут
	Контрольная работа	12		Письменная работа 160 минут
	Домашнее задание №1	1		Срок 6-я неделя
	Домашнее задание №2	9		Срок 12-я неделя
Итоговый	Экзамен			Письменный экзамен 160 минут

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде контрольных работ и домашних заданий, количество которых зависит от форм контроля по другим учебным дисциплинам.

Контрольная работа №1 проводится в конце первого модуля, домашнее задание №1 должно быть сдано до контрольной работы. Контрольная работа №2 проводится в середине второго модуля, домашнее задание №2 должно быть сдано до контрольной работы. Продолжительность контрольных работ и экзаменационной работы — 160 минут..

Итоговый контроль осуществляется в виде письменного экзамена. Полный ответ на каждый из десяти вопросов экзамена приносит одно очко. В случае неполного решения оценка ответа на вопрос может принимать значения между нулем и единицей. Например, арифметическая ошибка, не изменившая верного плана решения задачи, приводит к штрафу 0,1. Отсутствие примеров при ответе на вопрос теории приводит к штрафу 0,2. Приступая к проверке, преподаватели согласовывают оценки и для многих других типичных погрешностей.

В зависимости от набранной суммы очков определяется оценка за экзамен по десятибалльной системе. Пороговые значения следующие

Сумма	0	1.5	3	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9	9.5
Оценка по 10-балльной системе	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Для расчета оценки за весь курс вычисляется взвешенная сумма по всем формам контроля с весом экзамена 0.8. Оценка определяется по тем же пороговым значениям с учетом условия: если набранная на экзамене сумма меньше 4.5, то оценка за весь курс не может быть выше оценки за экзамен.

Порядок формирования оценок по дисциплине

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом: $O_{итоговая} = 0{,}1\cdot O_{кр1} + 0{,}1\cdot O_{кр2} + 0{,}1\cdot O_{дз1} + 0{,}1\cdot O_{дз2} + 0{,}6\cdot O_{экз.}$

Способ округления итоговой оценки арифметический.

4. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Тематика заданий текущего контроля

Контрольная работа № 1 предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий
   - 1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений
     - 1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.
     - 1.1.2. Элементарные преобразования матриц.
     - 1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.
   - 1.2. Определитель
   - 1.3. Линейное пространство.
     - 1.3.1. Подпространство линейного пространства.
     - 1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.
     - 1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.
     - 1.3.4. Базис и координаты векторов.
     - 1.3.5. Размерность линейного пространства.
   - 1.4. Арифметические операции над матрицами
     - 1.4.1. Сумма матриц.
     - 1.4.2. Умножение матрицы на число.
     - 1.4.3. Произведение матриц.
     - 1.4.4. Обратная матрица
   - 1.5. Матрица перехода.
   - 1.6. Ранг матрицы
   - 1.7. Фундаментальная система решений.
2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры
   - 2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями.
   - 2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
   - 2.3. Определитель и элементарные преобразования.

2.4. Вычисление определителя разложением по строке или по столбцу

2.5. Построение обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений.

2.6. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями.

2.7. Вычисление координат векторов.

2.8. Построение базиса линейного пространства.

2.9. Вычисление размерности пространства.

2.10. Преобразование координат при замене базиса.

2.11. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы.

2.12. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).

2.13. Исследование совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли).

2.14. Построение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

2.15. Построение множества решений системы линейных уравнений.

2.16. Выбор главных и свободных неизвестных.

Домашнее задание № 1 предназначено для освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий

1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений

1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.

1.1.2. Элементарные преобразования матриц.

1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.

1.2. Определитель

1.3. Линейное пространство.

1.3.1. Подпространство линейного пространства.

1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.

1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.

1.3.4. Базис и координаты векторов.

1.3.5. Размерность линейного пространства.

1.4. Арифметические операции над матрицами

1.4.1. Сумма матриц.

1.4.2. Умножение матрицы на число.

1.4.3. Произведение матриц.

1.4.4. Обратная матрица

1.5. Матрица перехода.

1.6. Ранг матрицы

1.7. Фундаментальная система решений.

2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры

2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями.

2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

2.3. Определитель и элементарные преобразования.

2.4. Вычисление определителя разложением по строке или по столбцу

2.5. Построение обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений.

2.6. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями.

2.7. Вычисление координат векторов.

2.8. Построение базиса линейного пространства.

2.9. Преобразование координат при замене базиса.

2.10. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы.

2.11. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).

2.12. Построение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

2.13. Построение множества решений системы линейных уравнений.

2.14. Выбор главных и свободных неизвестных.

Домашнее задание №2 предназначено для освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий

1.1. Матрица линейного оператора.

1.2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

1.3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

1.4. Линейные, билинейные и квадратичные формы

1.5. Формула линейного функционала.

1.6. Матрица билинейной формы.

1.7. Матрица скалярного произведения

1.8. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

1.9. Матрица квадратичной формы.

1.10. Положительная определенность квадратичной формы.

1.11. Канонический вид квадратичной формы.

1.12. Прямоугольная система координат на плоскости.

1.13. Деление отрезка в данном отношении.

1.14. Векторы.

1.14.1. Равенство векторов.

1.14.2. Координаты вектора.

1.14.3. Сложение векторов.

1.14.4. Умножение вектора на число.

1.14.5. Разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам.

1.14.6. Скалярное произведение векторов.

1.14.7. Векторное произведение векторов.

1.14.8. Смешанное произведение векторов.

1.15. Общее уравнение плоскости.

1.16. Параметрическое и каноническое уравнения прямой в пространстве.

1.17. Длина вектора и угол между векторами.

1.18. Ортогональность векторов.

1.19. Ортогональная проекция вектора на подпространство.

1.20. Ортонормированный базис.

1.21. Ортогональные матрицы.

2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры

2.1. Построение матрицы линейного оператора.

2.2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

2.3. Построение собственных векторов и собственных значений линейного оператора.

2.4. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

2.5. Проверка положительной определенности квадратичной формы.

2.6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

2.7. Построение ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора.

2.8. Построение координат вектора по координатам его крайних точек.

2.9. Построение ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора на подпространство.

2.10. Построение ортонормированного базиса ортогонализацией произвольного базиса.

2.11. Вычисление площади треугольника и объема треугольной пирамиды при помощи векторного и смешанного произведения векторов.

2.12. Построение параметрического уравнения прямой в пространстве: по двум точкам и перпендикулярно данной плоскости через заданную точку.

2.13. Исследование взаимного положения прямой и плоскости.

2.14. Вычисление угла между векторами, угла между вектором и плоскостью, угла между плоскостями.

2.15. Построение уравнения плоскости по координатам трех ее точек.

2.16. Применение операций над векторами для вычисления координат точек: симметричных данной относительно заданной плоскости, симметричных данной относительно заданной прямой и некоторых других.

Контрольная работа № 2 предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий

1.1. Матрица линейного оператора.

1.2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

1.3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

1.4. Линейные, билинейные и квадратичные формы

1.5. Формула линейного функционала.

1.6. Матрица билинейной формы.

1.7. Матрица скалярного произведения

1.8. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

1.9. Матрица квадратичной формы.

1.10. Положительная определенность квадратичной формы.

1.11. Канонический вид квадратичной формы.

1.12. Векторы.

1.12.1. Равенство векторов.

1.12.2. Координаты вектора.

1.12.3. Сложение векторов.

1.12.4. Умножение вектора на число.

1.12.5. Разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам.

1.12.6. Скалярное произведение векторов.

1.12.7. Векторное произведение векторов.

1.12.8. Смешанное произведение векторов.

1.13. Длина вектора и угол между векторами.

1.14. Ортогональность векторов.

1.15. Ортогональная проекция вектора на подпространство.

1.16. Ортонормированный базис.

1.17. Ортогональные матрицы.

2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры

2.1. Построение матрицы линейного оператора.

2.2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

2.3. Построение собственных векторов и собственных значений линейного оператора.

2.4. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

2.5. Проверка положительной определенности квадратичной формы.

2.6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

2.7. Построение ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора.

2.8. Построение ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора на подпространство.

2.9. Построение ортонормированного базиса ортогонализацией произвольного базиса.

Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

Для оценки качества освоения дисциплины можно использовать задачи (более двухсот задач по всем разделам курса), приведенных в учебнике [1] в конце каждой главы.

Контрольная работа № 1. Вариант № **1**

1. Найдите координаты вектора x относительно базиса e'_1, e'_2, e'_3, если известны его координаты $\{-7, -3, -5\}$ относительно базиса e_1, e_2, e_3, причем $e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3, e'_2 = 6e_1 - 2e_2 - 4e_3, e'_3 = 3e_1 - e_2 - e_3$.
2. Представить общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4=9 \\ 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +4x_4=5 \end{cases}$ как выражение главных неизвестных через свободные.
3. Вычислить $\det \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & 7 \\ 6 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.
4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ как функцию от числа λ.
6. Укажите какой-нибудь вектор, не принадлежащий линейной оболочке векторов $a_1\{1, 2, 3\}$, $a_2\{4, 5, 6\}$.
7. Найдите какой-нибудь базис в пространстве всех симметричных матриц второго порядка (с обычными операциями) и вычислите координаты матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ относительно этого базиса.

Экзаменационный билет № **1**

1. Формула Крамера решения систем линейных уравнений с невырожденной матрицей системы.
2. Нарисуйте параллелепипед и укажите те его диагонали, которые соответствуют векторам $a+b-c$ и $a-b+c$, если векторы a, b, c соответствуют ребрам этого параллелепипеда.
3. Отрезок с концами в точках $A(3, 5)$ и $B(-12, -4)$ разделен на три равные части. Найдите координаты точек деления.
4. Найдите ранг матриц AB и BA, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$?
5. С помощью правила Крамера решить систему уравнений
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$.
6. Компланарны ли векторы $a = (4, 3, 2), b = (1, 2, 3), c = (1, 0, -1)$?
7. Найдите какой-нибудь базис в пространстве всех векторов из $\mathbb{R}^3$, перпендикулярных вектору $\{1, 2, 3\}$.
8. Могут ли матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ быть матрицами одного оператора в различных базисах?
9. В некотором базисе e_1, e_2 матрица скалярного произведения имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите угол (в градусах) между векторами e_1 и e_2.
10. Вычислите площадь параллелограмма, стороны которого — векторы $a = \mathbf{k} - 2\mathbf{i}$ и $b = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Домашняя работа № 1. Вариант № 110.1

1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -2x_3=6 \\ 4x_1 & +3x_2 & -x_3=7 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3=5 \end{cases}$

   (a) методом Гаусса

   (b) в матричной форме $X = A^{-1}B$, где A^{-1} вычислить через алгебраические дополнения

   (c) в матричной форме $X = A^{-1}B$, где A^{-1} вычислить при помощи элементарных преобразований.

2. Представить общее решение системы линейных уравнений
$\begin{cases} 7x_1 & +5x_2 & +7x_3 & +4x_4=35 \\ x_1 & +7x_2 & +8x_3 & +2x_4=33 \end{cases}$

   (a) как выражение главных неизвестных через свободные

   (b) в векторной форме с использованием базиса в пространстве решений соответствующей однородной системы.

3. Вычислить $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -2 \\ 6 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц AB, AB^*, A^*B, A^*B^*, BA, B^*A, BA^*, B^*A^* в тех случаях, когда умножение определено.

5. Найти координаты вектора x относительно базиса e_1', e_2', если известны его координаты $\{50, 48\}$ относительно базиса e_1, e_2, причем $e_1' = 7e_1 + 8e_2, e_2' = 9e_1 + 8e_2$.

6. Найти ранг матрицы A как функцию параметра λ

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 9 \\ \lambda & -5 & 1 & -11 \\ -9 & 1 & -4 & 6 \\ -5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

7. Выделите среди векторов $a_1(3, -12, -1, 2)$, $a_2(-1, 7, 1, 1)$, $a_3(1, 2, 1, 4)$, $a_4(1, 1, 4, 1)$ какой-нибудь базис порожденной ими линейной оболочки, а затем найдите координаты остальных векторов относительно этого базиса.

8. Векторы $e_1(-4, -1, 1)$, $e_2(-2, 1, 1)$, $e_3(3, -2, -2)$ и $e_1'(14, 6, -2)$, $e_2'(0, 8, 4)$, $e_3'(-3, -2, 0)$ заданы координатами относительно некоторого базиса. Докажите, что системы векторов e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3' являются базисами (“старым” и “новым”) и найдите матрицу перехода от “старого” базиса к “новому”.

Домашняя работа № 2. Вариант № 1

Для квадратичной формы $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$, заданной в ортонормированном базисе,

1.1) найти матричную запись в исходном базисе

1.2) найти матричную запись в базисе $e_1(1,4,5), e_2(3,-2,5), e_3(1,-1,2)$

1.3) применить критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

1.4) найти ортонормированный базис, в котором форма имеет канонический вид (указать канонический вид и матрицу перехода к каноническому базису).

Для треугольной пирамиды с вершинами $A(1,1,-1)$, $B(3,4,-5)$, $C(3,-6,5)$, $D(-2,7,-1)$, заданными в декартовой системе координат, определить

2.1) матрицу скалярного произведения относительно базиса $e_1 = \overline{AB}, e_2 = \overline{AC}, e_3 = \overline{AD}$

2.2) ортогональную проекцию e_2^- и ортогональную составляющую $e_2^\perp$ вектора e_2 при проектировании на подпространство $M_1 = \mathrm{Lin}(e_1)$ и ортогональную проекцию e_3^- и ортогональную составляющую $e_3^\perp$ вектора e_3 при проектировании на подпространство $M_2 = \mathrm{Lin}(e_1, e_2)$

2.3) матрицу скалярного произведения относительно базиса $e_1' = e_1, e_2' = e_2^\perp, e_3' = e_3^\perp$

2.4) матрицу оператора проекции на плоскость грани ABC, т.е. каждому вектору пространства ставится в соответствие его проекция на подпространство M_2, относительно базиса e_1, e_2, e_3 и матрицу того же оператора относительно базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ из единичных векторов осей координат

2.5) площадь S треугольника ABC

2.6) объем V пирамиды

2.7) длину H высоты пирамиды, опущенной из вершины D

2.8) уравнение плоскости ΔABC

2.9) координаты точки D' — проекции точки D на плоскость ΔABC

2.10) координаты точки C', симметричной точке C относительно прямой AB

2.11) координаты вершин A_1, B_1, C_1, D_1 параллелепипеда, у которого точка A является вершиной, а векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ — ребрами (точка A_1 симметрична точке A относительно центра параллелепипеда и т.д.)

2.12) параметрическое уравнение прямой AB и перпендикуляра к плоскости ΔABC, проходящего через точку D

2.13) косинус угла α между ребром AD и плоскостью ΔABC и косинус двугранного угла β между плоскостью ΔABC и плоскостью грани ABD

Примечание. Все компоненты результатов вычислений, кроме длин векторов, $cos\alpha$ и $cos\beta$, являются рациональными числами p/q, где $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Поэтому все числа в ответах должны быть представлены либо в виде таких дробей, где числа p и q не имеют общих простых делителей (обычные целые числа, конечно, следует записывать без знаменателя $q = 1$), либо в виде $\sqrt{p/q}$.

Контрольная работа № 2. Вариант № **1**

1. Линейный оператор переводит векторы $a_1(1,2), a_2(3,-1)$ в векторы $b_1(4,5), b_2(3,7)$ соответственно. В какой вектор переходит при этом вектор $a(-1,5)$?

2. Существует ли такой элемент $x \in \mathbb{R}^3$, для которого $Q(x) < 0$, где $Q(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 9x_3^2$?

3. Найдите ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$ имеет канонический вид (укажите канонический вид и матрицу перехода к каноническому базису).

5. РЕСУРСЫ

5.1. Базовый учебник

1. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. *Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной*: учебник для студ. высш. учеб. заведений – М.: Издательский центр «Академия», 2010. (Университетский учебник. Высшая математика и ее приложения к экономике).
2. Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г. *Линейная алгебра: учебник и практикум для академического бакалавриата* (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3588-2. М. : Юрайт, 2014.

Обеспеченность студентов базовым учебником 100 %.

5.2. Основная литература

1. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры* – М.: Наука, любое издание.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*. – М.: Наука, любое издание.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* – М.: Наука, любое издание.
4. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа (под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича)* – М.: Наука, любое издание после 1981.
5. Шевцов Г.С. *Линейная алгебра.* Учебное пособие. – М.: Гардарики, 1999.

5.3. Дополнительная литература

1. Александров П.С. *Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры.* – М.: Наука, 1968.
2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
3. Погорелов А.В. *Геометрия.* – М.: Наука, 1983.
4. Скорняков Л.А. *Элементы линейной алгебры. Учебное пособие.* – М.: Наука, 1980.
5. Александров П.С. *Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры.* – М.: Наука, 1968.
6. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
7. Погорелов А.В. *Геометрия.* – М.: Наука, 1983.
8. Скорняков Л.А. *Элементы линейной алгебры. Учебное пособие.* – М.: Наука, 1980.

5.4. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине должны быть оснащены широкими досками, качественными черными маркерами и микрофоном. Проектор не нужен, т.к. у каждого студента есть базовый учебник, содержащий расширенный конспект всех лекций. Преподаватель фактически проводит лекции в режиме консультации, расставляя рукой мастера акценты, отвечает на вопросы студентов, приводит дополнительные рисунки, примеры и иные пояснения к материалу лекции.

Программа учебной дисциплины «Линейная алгебра»

Направление 38.03.01. Экономика

Образовательные программы «Экономика»

Форма обучения: очная

Степень: бакалавр

Утверждена
Академическим советом ОП
Протокол № от __.__.2019

Разработчик	Алескеров Фуад Тагиевич, проф., руководитель деп. математики ФЭН Агаев Рафиг Паша оглы, проф., деп. математики ФЭН Поляков Николай Львович, доц. деп. математики ФЭН
Число кредитов	6
Контактная работа (час.)	60
Самостоятельная работа (час.)	168
Курс, Образовательная программа	1 курс, ОП «Экономика», «Экономика и статистика»
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

Целями освоения дисциплины «Математический анализ» являются:

- Добиться усвоения студентами теоретических основ, базовых результатов и теорем линейной алгебры, теории матриц и аналитической геометрии, а также основных математических приемов и правил формального анализа и решения различных математических задач на основе полученных теоретических знаний.
- Подготовить слушателей к чтению современных текстов по экономической теории, насыщенных векторными, матричными и операторными обозначениями;
- Обеспечить запросы других разделов математики, использующих возникающие в линейной алгебре конструкции;
- Научить слушателей давать геометрическую интерпретацию многомерным объектам и строить аналитическое описание геометрическим соотношениям.
- Продемонстрировать возможность бескоординатного описания линейных и квадратичных функций, подготавливая переход к изучению функционального анализа;
- Выработать у слушателей навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также задач, способствующих развитию начальных навыков научного исследования;

- Развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений.

Выпускник по направлению 38.03.01 «Экономика» с квалификацией (степенью) бакалавр должен обладать следующими компетенциями (утверждено 25.06.2015 Академическим советом ОП, протокол №1):

Код компетенции по порядку	Формулировка компетенции
Универсальные компетенции	
УК-1	Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной
УК-2	Способен выявлять научную сущность проблем в профессиональной области
УК-3	Способен решать проблемы в профессиональной деятельности на основе анализа и синтеза
УК-5	Способен работать с информацией: находить, оценивать и использовать информацию из различных источников, необходимую для решения научных и профессиональных задач (в том числе на основе системного подхода)
Профессиональные компетенции	
ПК-1	Способен сформулировать и обосновать собственную точку зрения по социально-экономическим процессам в России и в мире
ПК-7	Способен собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов
ПК-8	Способен на основе типовых методик и действующей нормативноправовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов
ПК-9	Способен выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами

ПК-11	Способен осуществлять сбор, анализ и обработку статистических данных, информации, научно-аналитических материалов, необходимых для решения поставленных экономических задач
ПК-12	Способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы
ПК-13	Способен на основе описания экономических процессов и явлений строить теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть знаниями и компетенциями элементарной математики.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

1. математический анализ
2. теория вероятностей и математическая статистика;
3. эконометрика;
4. микроэкономика;
5. макроэкономика;
6. наука о данных;
7. финансовый учет и отчетность.

2. Содержание учебной дисциплины

Тема (раздел дисциплины)	**Объем в часах**	**Планируемые результаты обучения (ПРО), подлежащие контролю**	**Формы контроля**
	лк		
	см		
	onl/ср		
Тема 1. Предварительные понятия. Предмет линейной алгебры и матричного анализа.	2	Осуществляет операции над векторами, устанавливает линейную зависимость и	Письменная работа 160 минут
	2		
	11		
Тема 2. Матричная алгебра.	2	Осуществляет операции над векторами и матрицами.	
	2		
	12		
Тема 3. Определитель матрицы.	2	Вычисляет определитель матрицы, используя	
	2		

	13	разнообразные свойства	
Тема 4. Невырожденные матрицы. Обратная матрица.	2 2 12	Тестирует матрицу на невырожденность; обращает невырожденные матрицы.	
Тема 5. Решение системы линейных уравнений. Метод Гаусса и Гаусса-Жордана.	2 2 13	Решает системы линейных уравнений методом Гаусса и Гаусса-Жордана.	
Тема 6. Разложение матрицы по матрицам полного ранга. Нормальное псевдорешение.	2 2 13	Раскладывает матрицы по матрицам полного ранга. Находит псевдорешение системы линейных уравн.	
Тема 7. Линейные пространства и линейные операторы.	4 2 14	Вычисляет матрицу линейного оператора в различных базисах.	
Тема 8. Евклидово пространство.	2 2 14	Вычисляет скалярные произведения векторов. Осуществляет ортогонализацию векторов.	Письменная работа 160 минут
Тема 9. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора (матрицы).	4 4 15	Вычисляет собственные значения и векторы линейного оператора (матрицы)	
Тема 10. Симметричные и ортогональные матрицы и их спектры. Билинейные и квадратичные формы.	2 2 11	Приводит квадратичную форму к каноническому виду. Исследует ее на знако-определенность	
Тема 11. Неотрицательные матрицы.	2 2 12	Исследует неотрицательные матрицы на неразложимость и продуктивность.	
Тема 12. Элементы аналитической геометрии.	4 2 12	Решает стандартные геометрические задачи с помощью алгебраических методов.	
Тема 13. Элементы линейного программирования.	2 2 16	Решает прямую и двойственную задачи линейного программирования.	
Часов по видам учебных	**32**		

занятий:	**28**
	168
Итого часов:	**228**

Формы учебных занятий:
лк – лекции в аудитории;
см - семинары/ практические занятия/ лабораторные работы в аудитории;
onl – лекции или иные виды работы студента с помощью онлайн-курса;
ср – самостоятельная работа студента.

Содержание разделов дисциплины:

Тема 1. Предварительные понятия. Предмет линейной алгебры и матричного анализа.

Действительные (вещественные) и комплексные числа. Извлечение корней n-й степени из комплексного числа.[1] Основная теорема алгебры. Предмет линейной алгебры и его приложения к экономическим задачам. Арифметические векторы. Операции над векторами. Алгебраические свойства векторов. Геометрическая интерпретация векторов. Линейная независимость. Скалярное произведение двух векторов. Определение матрицы. Типы матриц. Матрицы специального вида. След матрицы. Транспонирование матрицы. *Экономические примеры*: векторное представление экономических данных и операции с ними. Оценка инфляции: вычисления индекса Ласпейреса и индекса Пааше.

Литература: [1], главы **1,2, A, C** .

Тема 2. Матричная алгебра.

Ранг матрицы. Неравенства о рангах матриц. Сумма и произведение матриц. Единичная матрица. Произведение Кронекера матриц. Квадратные матрицы. Степень матрицы. Многочлен от матриц. Элементарные матричные преобразования. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Каноническая форма матрицы. *Экономические примеры*: модель Тинбергена макроэкономической политики, технологическая матрица, модель Леонтьева.

Литература: [1], глава **2**.

Тема 3. Определитель матрицы.

Перестановка, подстановка. Четность и нечетность перестановки. Определение определителя. Определитель и элементарные операции. Разложение Лапласа по строкам или столбцам. Основные свойства определителя. Примеры вычисления определителя специального вида. Определитель блочной и блочно-треугольной матриц. Подматрица. Главная подматрица. Минор, главный минор, ведущий главный (угловой) минор. Минор элемента, алгебраическое дополнение элемента матрицы. Решение квадратной системы

---

[1] Мелким шрифтом выделен материал, который изучается при наличии резерва времени.

линейных уравнений методом Крамера. *Экономические примеры*: нахождение валового выпуска X_i товара i-ой отрасли методом Крамера в модели Леонтьева.

Литература: [1], главы **3, B**.

Тема 4. Невырожденные матрицы. Обратная матрица.

Определение невырожденной матрицы. Обратная матрица. Присоединенная матрица. Эквивалентные условия невырожденности (обратимости) матрицы. Определитель и обратная матрица. Связь между максимальным порядком ненулевого минора и рангом матрицы. Матрицы полного ранга. Решение квадратной системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Матричные уравнения. *Экономические примеры*: нахождение выпуска товара по матрице прямых затрат (matrix of input coefficients) и вектору конечного потребления (households' demand).

Литература: [1], глава **4**.

Тема 5. Решение системы линейных уравнений. Метод Гаусса и Гаусса-Жордана.

Система линейных неоднородных уравнений общего вида. Совместность и несовместность системы, структура множества решений. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса и Гаусса-Жордана. Решение матричных уравнений и нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Система однородных уравнений. Условие единственности решения однородной системы. Фундаментальная система решений однородной системы. Общее решение неоднородной системы. *Экономические примеры*: обмен m товарами между n агентами, при ценах товаров, обеспечивающих нулевые прибыли; расчет выпуска товара по спросу конечной и внутренней потребностей.

Литература: глава **5** в [1] (также глава **2** в [4]).

Тема 6. Разложение матрицы по матрицам полного ранга. Нормальное псевдорешение.

Решение и псевдорешение системы (в том числе несовместной) линейных уравнений с произвольной матрицей коэффициентов. Псевдообратная матрица по Мура-Пенроузу. О единственности нормального псевдорешения. Методы нахождения нормального псевдорешения. Разложение матрицы по матрицам полного ранга (скелетное разложение). Метод наименьших квадратов. *Экономические примеры*: метод наименьших квадратов в задачах эконометрики.

Литература: [1], глава **D**.

Тема 7. Линейные пространства и линейные операторы.

Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств. Линейная независимость векторов пространства. Базис. Теорема о базисе. Размерность линейного пространства. Изменение базиса. Матрица перехода. Преобразование координат при изменении базиса. Линейная оболочка. Разложения пространства в прямую сумму. Линейные операторы: определение. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Образ, ядро линейного преобразования. О сумме размерностей образа и ядра. *Экономические примеры*: [1], пример 6.5.

Литература: [1], главы **6, 8**.

Тема 8. Евклидово пространство.

Определение. Свойства скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Ортогонализация Грама-Шмидта. Расстояние от вектора до подпространства. Матрица Грама. Матрица скалярного произведения.

Литература: [1], глава **7**.

Тема 9. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора (матрицы).

Определение собственного значения и собственного вектора. Характеристический многочлен матрицы. Спектр линейного оператора (матрицы). Теорема Гамильтона-Кэли. Спектральный радиус. Сингулярные числа и сингулярное разложение матрицы. Определение нормы матрицы. Связь между спектральным радиусом и нормой матрицы. Линейная независимость собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям. О диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значения. Подобные матрицы: матрицы одного и того же линейного преобразования. О спектре действительных симметричных матриц. Локализация собственных значений. Теорема Гершгорина. О спектре матриц специального вида: стохастической, идемпотентной, нильпотентной, блочно-диагональной, треугольной. Класс матриц одного и того же линейного преобразования в различных базисах. Минимальный многочлен матрицы. Жорданова форма. Связь между жордановой формой и минимальным многочленом. Определение жордановой формы без преобразующей матрицы. Функция от матрицы. Компоненты матрицы. Методы вычисления компонент матриц. Проекторы собственных значений. Примеры функции от матрицы.

Литература: [1], глава **9,** глава **5** в [5], глава **3** в [7].

Тема 10. Симметричные и ортогональные матрицы и их спектры. Билинейные и квадратичные формы.

Матрица самосопряженного линейного преобразования в пространстве с ортогональным базисом. Ортогональные преобразования и матрицы. Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса. Квадратичная форма. Виды квадратичных форм: положительно определенная; отрицательно определенная; неотрицательно определенная; неположительно определенная квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к стандартному и каноническому виду. Закон инерции для квадратичных форм. Характеризация и исследование квадратичной формы по спектру ее матрицы.

Литература: [1], глава **9**.

Тема 11. Неотрицательные матрицы.

Неотрицательные матрицы. Неразложимость матрицы. Условие неразложимости неотрицательной матрицы. Теорема Перрона–Фробениуса. Продуктивные матрицы.

Критерии продуктивности. Стахостические матрицы. *Экономические примеры*: продуктивности линейной модели Леонтьева.

Литература: [1], глава **10**.

Тема 12. Элементы аналитической геометрии.

Общее уравнение прямой на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Параметрическое и каноническое уравнения прямой. Расстояние от точки до прямой. Преобразование координат точки при замене системы координат. Векторное и смешанное произведение векторов. Общее уравнение плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых.

Литература: [2], глава **9**.

Тема 13. Элементы линейного программирования.

Задача линейного программирования. Понятие о симплекс-методе. Выпуклые области. Двойственная задача линейного программирования и теоремы двойственности. *Экономические примеры*: задача о распределении ресурсов, теневые цены ресурсов, транспортная задача, задача о максимальном потоке, игры с нулевой суммой.

Литература: [1], глава **11**.

3. Оценивание

Контроль знаний студентов включает формы текущего, промежуточного и итогового контроля. Все формы контроля проводятся в письменной форме. Текущий контроль включает в себя две контрольные работы. Одна из них проводится в конце первого учебного модуля, а другая – в конце второго учебного модуля. Итоговый контроль – экзаменационная работа.

Контрольные и экзаменационная работы состоят из 10 заданий. Время выполнения контрольной и экзаменационной работы – 160 минут.

Полное правильное решение задания на контрольной и экзаменационной работе оценивается в один балл. В случае неполного решения оценка может быть дробной.

По итогам контрольных работ студенты освобождаются от решения некоторых задач экзамена (получают заранее условную единицу за задачу):

Количество баллов (N), полученное студентом за контрольную работу	Количество задач экзамена, от выполнения которых студент освобождается
$6 \leq N < 7$	1
$7 \leq N < 8$	2
$8 \leq N < 9$	3
$9 \leq N \leq 10$	4

Номера засчитанных задач отсчитываются подряд от первой для контрольной работы №1 и от пятой для контрольных работ №2.

Первичное количество баллов (N), полученное студентом на экзаменационной работе, переводится в итоговую десятибалльную оценку по правилу:

Количество баллов (N), полученное студентом за экзаменационную работу	Итоговая десятибалльная оценка
$N = 0$	0
$0 < N < 1{,}5$	1
$1{,}5 \leq N < 3$	2
$3 \leq N < 4{,}5$	3
$4{,}5 \leq N < 5{,}5$	4
$5{,}5 \leq N < 6$	5
$6 \leq N < 7$	6
$7 \leq N < 8$	7
$8 \leq N < 9$	8
$9 \leq N < 9{,}5$	9
$9{,}5 \leq N \leq 10$	10

Пересдача контрольных работ и выполнение студентами контрольных работ в индивидуальные сроки не производится – студент имеет возможность «добрать» неполученные на контрольной работе баллы (по любой причине: уважительной или нет) на итоговом контроле.

Экзаменационная работа является блокирующей. Первая и вторая пересдачи проходят по правилам и темам проведения экзаменационной работы в периоды пересдач, установленные в НИУ ВШЭ.

4. Примеры оценочных средств

4.1. Пример контрольной работы №1

1. Задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Представить ее как $A = B + C,$ где B – симметрична, а C – кососимметрична (матрица C – кососимметрична, если $C^T = -C$).

2. Пусть A– квадратная матрица второго порядка, для которой имеет место $\operatorname{Tr} A = a$, $\det A = b$. Докажите, что если $f(x) = x^2 - ax + b$, то $f(A) = \mathbf{0}$.

3. Задана система неоднородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 25. \end{cases}$$

Выразить все решения данной системы через одно ее частное решение и общее решение соответствующей приведенной системы;

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. В данной системе правилом Крамера найти только неизвестное z

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+3z=4. \end{cases}$$

6. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ относительно базиса $e_1' = e_1 + e_2 + e_3,\ e_2' = e_2 + e_3,$ $e_3' = e_3,$, если известны его координаты $x = [1, 1\ ,1]$ относительно базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$.

7. Найти какое-либо скелетное разложение матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

8. Линейное преобразование φ в базисе $e_1 = [1, 1]^T, e_2 = [1\ 0]^T$ имеет матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Найти матрицу этого лин. преобразования в базисе $e_1' = [1, 2]^T,\ \ e_2' = [1, 3]^T$.

9. Найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки, натянутой на следующую систему многочленов:

$t^6 + t^4,\ \ t^6 + 3t^4 - t,\ \ t^6 - 2t^4 + t,\ \ t^6 - 4t^4 + 2t.$

10. Цена на Биг-Мак в Макдональдсе в Москве в первой половине октября менялась согласно следующей таблице:

Дни (x)	1 октября	3 октября	5 октября	9 октября	15 октября
Цена (p)	120 руб.	130 руб.	123 руб.	125 руб.	?

Используя метод наименьших квадратов при аппроксимации функции цены от дня месяца в виде $p = a + bx$, найти приближенную цену на Биг-Мак на 15 октября.

Как эта задача связана с задачей о расстоянии вектора x до пространства L? В данной задаче с «Биг-Маком» вектору x и пространству L какие понятия соответствуют?

Ответ: $p = a + bx = 129.1 - 0{,}071 * x = 129.1 - 0{,}071 * 15 = 127{,}95.$

4.2. Пример контрольной работы №2

1. Координаты векторов u и v в базисе e_1, e_2, e_3 есть $(1, -2{,}3)$ и $(-1, 3, 5)$ соответственно. Найти скалярное произведение векторов u и v, если известна матрица Грама $G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Произвести процесс ортогонализации системы векторов $e_1 = (1{,}2{,}3), e_2 = (-1{,}0{,}1), e_3 = (1{,}1{,}0)$ в евклидовом пространстве R^3 со стандартным скалярным произведением.

3. Найти все собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Найти спектр матрицы $A^2 + A - 2I$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Задана билинейная форма $\mathbf{A}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \mathbf{3}x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$. Определить ее матрицу в каноническом (стандартном) базисе и в новом базисе:

$$e_1' = (1,\ 1, -1);\quad e_2' = (1, -2{,}1),\ e_3' = (1, -1, -1),$$

двумя способами (в первом случае используется $\mathbf{A}(e_i'; e_j') = a_{ij}$, во втором – матрица перехода).

6. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующую квадратичную форму к каноническому виду, и выписать этот канонический вид:

$$q = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

7. Исследовать на продуктивность матрицу $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

8. Используя два вида ресурсов $Р_1$ и $Р_2$, предприятие выпускает два вида продукции $П_1$ и $П_2$. Цены на продукцию, затраты ресурсов на производство единицы продукции и запасы ресурсов даны в таблице

	$П_1$	$П_2$	
$Р_1$	2	3	1000
$Р_2$	4	1	2000
	10	6	

Определить теневые цены ресурсов.

9. Найти каноническое уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $A(-2,1,3)$ и перпендикулярной плоскости $2x - 3y + z = 5$.

10. Найти расстояние от точки $A(3,-1,0)$ до прямой l: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$.

4.3. Пример экзаменационного билета

1. Задана система неоднородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases}$$

Выразить все решения данной системы через одно ее частное решение, и общее решение соответствующей приведенной (однородной) системы.

2. Решить матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти нормальное псевдорешение следующей системы неоднородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 9. \\ 3x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$$

4. Вычислить определитель матрицы A^{-2}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. В трехмерном пространстве, элементами которого являются многочлены степени не больше *2*, задано линейное преобразование (оператор дифференцирования φ) $\varphi P(t) = P'(t)$. Найти:

а) матрицу A_φ этого линейного преобразования φ в базисе $e_1 = 1 + 2x,\ e_2 = 1 + 3x,\ e_3 = 1 + x^2$;

б) матрицу перехода от базиса $\{e_1,\ e_2, e_3\}$ к $\{e_1', e_2', e_3'\}$, где $e_1' = 2 + x,\ e_2' = 1 + 2x + x^2,\ e_3' = x^2$.

6. Найти все четыре собственных значения матрицы.

$$A = \begin{bmatrix} 9999 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9999 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9999 & 1 \\ 81 & 0 & 0 & 9999 \end{bmatrix}$$

7. Найти все значения действительного параметра a, при которых квадратичная форма

$ax^2 + (1-a)xy + y^2$ является положительно определенной.

8. Используя два вида ресурсов $Р_1$ и $Р_2$, предприятие выпускает два вида продукции $П_1$ и $П_2$. Цены на продукцию, затраты ресурсов на производство единицы продукции и запасы ресурсов даны в таблице

	$П_1$	$П_2$	
$Р_1$	2	4	1000
$Р_2$	3	1	2000
	10	6	

Определить оптимальный план выпуска продукции.

9. Найдите точку пересечения следующих геометрических фигур:

l: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$;

S: $x + 2y + 3z + 6 = 0$.

10. Теорема Перрона–Фробениуса.

5. Ресурсы

5.1. Рекомендуемая основная литература

1. Aleskerov F., Ersel H., Piontkovski D. *Linear algebra for economists.* – Springer Science & Business Media, 2011. [электронные ресурсы библиотеки ВШЭ]
2. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. *Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной : учебник для студ. высш. учеб. заведений* – М.: Издательский центр «Академия», 2010. (Университетский учебник. Высшая математика и ее приложения к экономике). [электронные ресурсы библиотеки ВШЭ]
3. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – 2006 (а также любое издание).
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – Лань, 2003 (а также любое издание).
5. Гантмахер Ф. Теория матриц. – Litres, 2018 (а также любое издание).
6. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – Изд-во" Наука, 1970.
7. А.В. Ефимов, Б.П. Демидович. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа* – М.: Наука, любое издание после 1981.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*. – М.: Наука, любое издание.

5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

6. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
7. Скорняков Л.А. *Элементы линейной алгебры. Учебное пособие.* – М.: Наука, 1980.
8. Александров П.С. *Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры.* – М.: Наука, 1968.

9. Альберт А. Регрессия, псевдоизмерения и рекуррентное оценивание: Пер. с англ./Под ред. Я. Цыпкина. – 1977.
10. Campbell, S.L., Meyer, C.D., Jr.: Generalized Inverses of Linear Transformations. Dover, New York (1991)
11. Шевцов Г.С. *Линейная алгебра.* Учебное пособие. – М.: Гардарики, 1999.
12. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – Мир, 1989.
13. Abadir, K.M.,Magnus, J.R.:Matrix Algebra, Econometric Exercises Series, No. 1. Cambridge University Press, Cambridge (2005).
14. Ben-Israel, A., Greville, T.: Generalized Inverses. Theory and Applications, 2nd edn. Springer, New York (2003).
15. Погорелов А.В. *Аналитическая геометрия*. 3-е издание. М.: Наука, 1968.

6. Программное обеспечение

№п/п	Наименование	Условия доступа/скачивания
1	Wolfram|Alpha	из внутренний сети университета (свободное ПО)

7. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№п/п	Наименование	Условия доступа/скачивания
1	браузер	из внутренний сети университета

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Доска, маркеры, стиратель

9. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося и предоставления подтверждающих медицинских документов), а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

- для лиц с нарушениями зрения: индивидуальные задания и консультации;
- для лиц с нарушениями слуха: индивидуальные задания и консультации;
- для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: индивидуальные задания и консультации.

Программа учебной дисциплины Линейная алгебра

Утверждена
Академическим советом ООП
Протокол № 2.9.1-12/13 от «25» июня 2018 г.

Автор	Лобанов С.Г., доктор физико-математических наук, профессор
Число кредитов	6
Контактная работа (час.)	60
Самостоятельная работа (час.)	168
Курс	1
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

1. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Цели освоения дисциплины Линейная алгебра

- Добиться усвоения студентами теоретических основ, базовых результатов и теорем аналитической геометрии и линейной алгебры, а также основных математических приемов и правил формального анализа и решения различных математических задач на основе полученных теоретических знаний.
- Подготовить слушателей к чтению современных текстов по экономической теории, насыщенных векторными, матричными и операторными обозначениями;
- Обеспечить запросы других разделов математики, использующих возникающие в линейной алгебре конструкции;
- Научить слушателей давать геометрическую интерпретацию многомерным объектам и строить аналитическое описание геометрическим соотношениям.
- Продемонстрировать возможность бескоординатного описания линейных и квадратичных функций, подготавливая переход к изучению функционального анализа;
- Выработать у слушателей навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также задач, способствующих развитию начальных навыков научного исследования;
- Развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- точные формулировки основных понятий, уметь интерпретировать их на простых модельных примерах; в том числе, свободно использовать координатный, векторный, матричный или операторный способ записи математических соотношений;

- общие теоремы о структуре множества решений систем линейных, уметь применять специальные методы построения таких решений;
- свойства основных числовых характеристик матриц: определитель, ранг, размерность пространства строк и столбцов;

Уметь:

- формулировать и доказывать основные результаты этих разделов; представлять математические утверждения и их доказательства, проблемы и их решения ясно и точно в терминах, понятных для профессиональной аудитории, как в письменной, так и устной формах.
- понимать разделы учебной и научной литературы, связанные с применением линейных пространств, линейных отображений, линейных, билинейных и квадратичных форм

Владеть: навыками решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала; решения математические задач, аналогичные ранее изученным;

Учебная дисциплина «Линейная алгебра» не требует какой бы то ни было предварительной математической подготовки сверх обычной программы средней школы.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

1. Математический анализ
2. Микроэкономика
3. Макроэкономика
4. Теория вероятностей и математическая статистика
5. Эконометрика
6. Дифференциальные и разностные уравнения,
7. Методы оптимальных решений

2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений

Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений. Элементарные преобразования матриц. Обратимость элементарных преобразований. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений со ступенчатой матрицей системы. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений в случае двух или трех неизвестных. Ненулевые решения однородной системы уравнений.

Литература: [1], глава 1.

Раздел 2. Определитель

Определитель и элементарные преобразования. Построение определителя разложением по столбцу. Определитель транспонированной матрицы. Вычисление определителя разложением по строке.
Литература: [1], глава 2.

Раздел 3. Линейные пространства

Простейшие следствия аксиом линейного пространства. Подпространство линейного пространства. Простейшие свойства линейно зависимых векторов. Базис и координаты векторов. Существование базиса конечномерного пространства. Размерность линейного пространства.

Литература: [1], глава 3.

Раздел 4. Алгебра матриц

Сумма матриц. Умножение матрицы на число. Произведение матриц. Матричная запись системы уравнений. Свойства арифметических операций над матрицами. Обратная матрица и формулы Крамера. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями. Преобразование координат при замене базиса.

Литература: [1], глава 4.

Раздел 5. Ранг матрицы

Ранг матрицы. Ранг ступенчатой матрицы. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях. Теорема о ранге матрицы. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов). Ранг произведения матриц. Определитель произведения матриц.

Литература: [1], глава 5.

Раздел 6. Структура множества решений системы линейных уравнений

Векторная запись системы уравнений. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных уравнений. Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений. Структура множества решений системы линейных уравнений. Теорема о выборе главных и свободных неизвестных.

Литература: [1], глава 6.

Раздел 7. Линейные операторы

Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Характеристический многочлен линейного оператора. О корнях характеристического многочлена линейного оператора. Свойства собственных векторов с одинаковыми и различными собственными значениями.

Литература: [1], глава 7.

Раздел 8. Линейные, билинейные и квадратичные формы

Формула линейного функционала. Матрица билинейной формы. Матрица симметричной билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса. Единственность симметричной билинейной формы, порождающей квадратичную форму. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. Закон инерции для квадратичных форм.

Литература: [1], глава 8.

Раздел 9. Элементы аналитической геометрии

Прямоугольная система координат на плоскости. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении. Векторы. Равенство векторов. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора плоскости по двум некоколлинеарным векторам. Скалярное произведение векторов. Общее уравнение прямой на плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Параметрическое и каноническое уравнения прямой. Расстояние от точки до прямой. Преобразование координат точки при замене системы координат. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Общее уравнение плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей. Уравнение прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых.

Литература: [1], глава 9.

Раздел 10. Евклидовы пространства

Скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Длина вектора и угол между векторами. Ортогональность векторов. Независимость попарно ортогональных векторов. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Построение ортонормированного базиса ортогонализацией произвольного базиса. Матрица скалярного произведения в ортонормированном базисе. Ортогональные матрицы. Геометрическая интерпретация ортогональных матриц.

Литература: [1], глава 10.

Раздел 11. Самосопряженные операторы

Сопряженность операторов в евклидовом пространстве. Матрицы сопряженных операторов. Собственные векторы и собственные значения самосопряженных операторов. Ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Литература: [1], глава 11.

Раздел 12. Аффинные пространства

Преобразование координат точки при замене системы координат. Линейные отображения. Линейные операторы, связанные с линейными отображениями.

Геометрические свойства линейных отображений. Аффинные и изометрические отображения.

Литература: [1], глава 12.

3. ОЦЕНИВАНИЕ

<table>
<tr><td rowspan="2">Тип контроля</td><td rowspan="2">Форма контроля</td><td colspan="2">1 год</td><td rowspan="2">Параметры **</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Текущий (неделя)</td><td>Контрольная работа</td><td>8</td><td></td><td>Письменная работа 160 минут</td></tr>
<tr><td>Контрольная работа</td><td>12</td><td></td><td>Письменная работа 160 минут</td></tr>
<tr><td>Домашнее задание №1</td><td>1</td><td></td><td>Срок 6-я неделя</td></tr>
<tr><td>Домашнее задание №2</td><td>9</td><td></td><td>Срок 12-я неделя</td></tr>
<tr><td>Итоговый</td><td>Экзамен</td><td></td><td></td><td>Письменный экзамен 160 минут</td></tr>
</table>

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде контрольных работ и домашних заданий, количество которых зависит от форм контроля по другим учебным дисциплинам.

Контрольная работа №1 проводится в конце первого модуля, домашнее задание №1 должно быть сдано до контрольной работы. Контрольная работа №2 проводится в середине второго модуля, домашнее задание №2 должно быть сдано до контрольной работы. Продолжительность контрольных работ и экзаменационной работы — 160 минут..

Итоговый контроль осуществляется в виде письменного экзамена. Полный ответ на каждый из десяти вопросов экзамена приносит одно очко. В случае неполного решения оценка ответа на вопрос может принимать значения между нулем и единицей. Например, арифметическая ошибка, не изменившая верного плана решения задачи, приводит к штрафу 0,1. Отсутствие примеров при ответе на вопрос теории приводит к штрафу 0,2. Приступая к проверке, преподаватели согласовывают оценки и для многих других типичных погрешностей.

В зависимости от набранной суммы очков определяется оценка за экзамен по десятибалльной системе. Пороговые значения следующие

Сумма	0	1.5	3	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9	9.5
Оценка по 10-балльной системе	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Для расчета оценки за весь курс вычисляется взвешенная сумма по всем формам контроля с весом экзамена 0.8. Оценка определяется по тем же пороговым значениям с учетом условия: если набранная на экзамене сумма меньше 4.5, то оценка за весь курс не может быть выше оценки за экзамен.

Порядок формирования оценок по дисциплине

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом: $O_{итоговая} = 0{,}1\cdot O_{кр1} + 0{,}1\cdot O_{кр2} + 0{,}1\cdot O_{дз1} + 0{,}1\cdot O_{дз2} + 0{,}6\cdot O_{экз.}$

Способ округления итоговой оценки арифметический.

4. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Тематика заданий текущего контроля

Контрольная работа № 1 предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий
   1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений
      1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.
      1.1.2. Элементарные преобразования матриц.
      1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.
   1.2. Определитель
   1.3. Линейное пространство.
      1.3.1. Подпространство линейного пространства.
      1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.
      1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.
      1.3.4. Базис и координаты векторов.
      1.3.5. Размерность линейного пространства.
   1.4. Арифметические операции над матрицами
      1.4.1. Сумма матриц.
      1.4.2. Умножение матрицы на число.
      1.4.3. Произведение матриц.
      1.4.4. Обратная матрица
   1.5. Матрица перехода.
   1.6. Ранг матрицы
   1.7. Фундаментальная система решений.
2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры
   2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями.
   2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
   2.3. Определитель и элементарные преобразования.

2.4. Вычисление определителя разложением по строке или по столбцу

2.5. Построение обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений.

2.6. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями.

2.7. Вычисление координат векторов.

2.8. Построение базиса линейного пространства.

2.9. Вычисление размерности пространства.

2.10. Преобразование координат при замене базиса.

2.11. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы.

2.12. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).

2.13. Исследование совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли).

2.14. Построение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

2.15. Построение множества решений системы линейных уравнений.

2.16. Выбор главных и свободных неизвестных.

Домашнее задание № 1 предназначено для освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий

1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений

1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.

1.1.2. Элементарные преобразования матриц.

1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.

1.2. Определитель

1.3. Линейное пространство.

1.3.1. Подпространство линейного пространства.

1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.

1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.

1.3.4. Базис и координаты векторов.

1.3.5. Размерность линейного пространства.

1.4. Арифметические операции над матрицами

1.4.1. Сумма матриц.

1.4.2. Умножение матрицы на число.

1.4.3. Произведение матриц.

1.4.4. Обратная матрица

1.5. Матрица перехода.

1.6. Ранг матрицы

1.7. Фундаментальная система решений.

2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры

2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду элементарными преобразованиями.

2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

2.3. Определитель и элементарные преобразования.

2.4. Вычисление определителя разложением по строке или по столбцу

2.5. Построение обратной матрицы при помощи алгебраических дополнений.

2.6. Построение обратной матрицы элементарными преобразованиями.

2.7. Вычисление координат векторов.

2.8. Построение базиса линейного пространства.

2.9. Преобразование координат при замене базиса.

2.10. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы.

2.11. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).

2.12. Построение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

2.13. Построение множества решений системы линейных уравнений.

2.14. Выбор главных и свободных неизвестных.

Домашнее задание №2 предназначено для освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий

1.1. Матрица линейного оператора.

1.2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

1.3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

1.4. Линейные, билинейные и квадратичные формы

1.5. Формула линейного функционала.

1.6. Матрица билинейной формы.

1.7. Матрица скалярного произведения

1.8. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

1.9. Матрица квадратичной формы.

1.10. Положительная определенность квадратичной формы.

1.11. Канонический вид квадратичной формы.

1.12. Прямоугольная система координат на плоскости.

1.13. Деление отрезка в данном отношении.

1.14. Векторы.

1.14.1. Равенство векторов.

1.14.2. Координаты вектора.

1.14.3. Сложение векторов.

1.14.4. Умножение вектора на число.

1.14.5. Разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам.

1.14.6. Скалярное произведение векторов.

1.14.7. Векторное произведение векторов.

1.14.8. Смешанное произведение векторов.

1.15. Общее уравнение плоскости.

1.16. Параметрическое и каноническое уравнения прямой в пространстве.

1.17. Длина вектора и угол между векторами.

1.18. Ортогональность векторов.

1.19. Ортогональная проекция вектора на подпространство.

1.20. Ортонормированный базис.

1.21. Ортогональные матрицы.

2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры

2.1. Построение матрицы линейного оператора.

2.2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

2.3. Построение собственных векторов и собственных значений линейного оператора.

2.4. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

2.5. Проверка положительной определенности квадратичной формы.

2.6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

2.7. Построение ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора.

2.8. Построение координат вектора по координатам его крайних точек.

2.9. Построение ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора на подпространство.

2.10. Построение ортонормированного базиса ортогонализацией произвольного базиса.

2.11. Вычисление площади треугольника и объема треугольной пирамиды при помощи векторного и смешанного произведения векторов.

2.12. Построение параметрического уравнения прямой в пространстве: по двум точкам и перпендикулярно данной плоскости через заданную точку.

2.13. Исследование взаимного положения прямой и плоскости.

2.14. Вычисление угла между векторами, угла между вектором и плоскостью, угла между плоскостями.

2.15. Построение уравнения плоскости по координатам трех ее точек.

2.16. Применение операций над векторами для вычисления координат точек: симметричных данной относительно заданной плоскости, симметричных данной относительно заданной прямой и некоторых других.

Контрольная работа № 2 предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонентов курса:

1. Определения основных понятий

1.1. Матрица линейного оператора.

1.2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

1.3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

1.4. Линейные, билинейные и квадратичные формы

1.5. Формула линейного функционала.

1.6. Матрица билинейной формы.

1.7. Матрица скалярного произведения

1.8. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

1.9. Матрица квадратичной формы.

1.10. Положительная определенность квадратичной формы.

1.11. Канонический вид квадратичной формы.

1.12. Векторы.

1.12.1. Равенство векторов.

1.12.2. Координаты вектора.

1.12.3. Сложение векторов.

1.12.4. Умножение вектора на число.

1.12.5. Разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам.

1.12.6. Скалярное произведение векторов.

1.12.7. Векторное произведение векторов.

1.12.8. Смешанное произведение векторов.

1.13. Длина вектора и угол между векторами.

1.14. Ортогональность векторов.

1.15. Ортогональная проекция вектора на подпространство.

1.16. Ортонормированный базис.

1.17. Ортогональные матрицы.

2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры

2.1. Построение матрицы линейного оператора.

2.2. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

2.3. Построение собственных векторов и собственных значений линейного оператора.

2.4. Преобразование матрицы билинейной формы при замене базиса.

2.5. Проверка положительной определенности квадратичной формы.

2.6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

2.7. Построение ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора.

2.8. Построение ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора на подпространство.

2.9. Построение ортонормированного базиса ортогонализацией произвольного базиса.

Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

Для оценки качества освоения дисциплины можно использовать задачи (более двухсот задач по всем разделам курса), приведенных в учебнике [1] в конце каждой главы.

Контрольная работа № 1. Вариант № **1**

1. Найдите координаты вектора x относительно базиса e_1', e_2', e_3', если известны его координаты $\{-7, -3, -5\}$ относительно базиса e_1, e_2, e_3, причем $e_1' = e_1 + e_2 + 2e_3, e_2' = 6e_1 - 2e_2 - 4e_3, e_3' = 3e_1 - e_2 - e_3$.

2. Представить общее решение системы линейных уравнений $\left\{\begin{array}{llll} 4x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4=9 \\ 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +4x_4=5 \end{array}\right.$ как выражение главных неизвестных через свободные.

3. Вычислить $\det \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & 7 \\ 6 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ как функцию от числа λ.

6. Укажите какой-нибудь вектор, не принадлежащий линейной оболочке векторов $a_1\{1, 2, 3\}$, $a_2\{4, 5, 6\}$.

7. Найдите какой-нибудь базис в пространстве всех симметричных матриц второго порядка (с обычными операциями) и вычислите координаты матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ относительно этого базиса.

Экзаменационный билет № **1**

1. Формула Крамера решения систем линейных уравнений с невырожденной матрицей системы.

2. Нарисуйте параллелепипед и укажите те его диагонали, которые соответствуют векторам $a+b-c$ и $a-b+c$, если векторы a, b, c соответствуют ребрам этого параллелепипеда.

3. Отрезок с концами в точках $A(3, 5)$ и $B(-12, -4)$ разделен на три равные части. Найдите координаты точек деления.

4. Найдите ранг матриц AB и BA, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

5. С помощью правила Крамера решить систему уравнений
$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 7 \end{array}\right.$.

6. Компланарны ли векторы $a = (4, 3, 2), b = (1, 2, 3), c = (1, 0, -1)$?

7. Найдите какой-нибудь базис в пространстве всех векторов из $\mathbb{R}^3$, перпендикулярных вектору $\{1, 2, 3\}$.

8. Могут ли матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ быть матрицами одного оператора в различных базисах?

9. В некотором базисе e_1, e_2 матрица скалярного произведения имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите угол (в градусах) между векторами e_1 и e_2.

10. Вычислите площадь параллелограмма, стороны которого — векторы $a = \mathbf{k} - 2\mathbf{i}$ и $b = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Домашняя работа № 1. Вариант № 110.1

1. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -2x_3=6 \\ 4x_1 & +3x_2 & -x_3=7 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3=5 \end{cases}$

   (a) методом Гаусса

   (b) в матричной форме $X = A^{-1}B$, где A^{-1} вычислить через алгебраические дополнения

   (c) в матричной форме $X = A^{-1}B$, где A^{-1} вычислить при помощи элементарных преобразований.

2. Представить общее решение системы линейных уравнений
$$\begin{cases} 7x_1 & +5x_2 & +7x_3 & +4x_4=35 \\ x_1 & +7x_2 & +8x_3 & +2x_4=33 \end{cases}$$

   (a) как выражение главных неизвестных через свободные

   (b) в векторной форме с использованием базиса в пространстве решений соответствующей однородной системы.

3. Вычислить $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -2 \\ 6 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц AB, AB^*, A^*B, A^*B^*, BA, B^*A, BA^*, B^*A^* в тех случаях, когда умножение определено.

5. Найти координаты вектора x относительно базиса e'_1, e'_2, если известны его координаты $\{50, 48\}$ относительно базиса e_1, e_2, причем $e'_1 = 7e_1 + 8e_2, e'_2 = 9e_1 + 8e_2$.

6. Найти ранг матрицы A как функцию параметра λ
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 9 \\ \lambda & -5 & 1 & -11 \\ -9 & 1 & -4 & 6 \\ -5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

7. Выделите среди векторов $a_1(3, -12, -1, 2)$, $a_2(-1, 7, 1, 1)$, $a_3(1, 2, 1, 4)$, $a_4(1, 1, 4, 1)$ какой-нибудь базис порожденной ими линейной оболочки, а затем найдите координаты остальных векторов относительно этого базиса.

8. Векторы $e_1(-4, -1, 1)$, $e_2(-2, 1, 1)$, $e_3(3, -2, -2)$ и $e'_1(14, 6, -2)$, $e'_2(0, 8, 4)$, $e'_3(-3, -2, 0)$ заданы координатами относительно некоторого базиса. Докажите, что системы векторов e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 являются базисами (“старым” и “новым”) и найдите матрицу перехода от “старого” базиса к “новому”.

Домашняя работа № 2. Вариант № 1

Для квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$, заданной в ортонормированном базисе,

1.1) найти матричную запись в исходном базисе

1.2) найти матричную запись в базисе $e_1(1,4,5), e_2(3,-2,5), e_3(1,-1,2)$

1.3) применить критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

1.4) найти ортонормированный базис, в котором форма имеет канонический вид (указать канонический вид и матрицу перехода к каноническому базису).

Для треугольной пирамиды с вершинами $A(1,1,-1)$, $B(3,4,-5)$, $C(3,-6,5)$, $D(-2,7,-1)$, заданными в декартовой системе координат, определить

2.1) матрицу скалярного произведения относительно базиса $e_1 = \overline{AB}, e_2 = \overline{AC}, e_3 = \overline{AD}$

2.2) ортогональную проекцию e_2^- и ортогональную составляющую $e_2^\perp$ вектора e_2 при проектировании на подпространство $M_1 = \mathrm{Lin}(e_1)$ и ортогональную проекцию e_3^- и ортогональную составляющую $e_3^\perp$ вектора e_3 при проектировании на подпространство $M_2 = \mathrm{Lin}(e_1, e_2)$

2.3) матрицу скалярного произведения относительно базиса $e_1' = e_1, e_2' = e_2^\perp, e_3' = e_3^\perp$

2.4) матрицу оператора проекции на плоскость грани ABC, т.е. каждому вектору пространства ставится в соответствие его проекция на подпространство M_2, относительно базиса e_1, e_2, e_3 и матрицу того же оператора относительно базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ из единичных векторов осей координат

2.5) площадь S треугольника ABC

2.6) объем V пирамиды

2.7) длину H высоты пирамиды, опущенной из вершины D

2.8) уравнение плоскости ΔABC

2.9) координаты точки D' — проекции точки D на плоскость ΔABC

2.10) координаты точки C', симметричной точке C относительно прямой AB

2.11) координаты вершин A_1, B_1, C_1, D_1 параллелепипеда, у которого точка A является вершиной, а векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ — ребрами (точка A_1 симметрична точке A относительно центра параллелепипеда и т.д.)

2.12) параметрическое уравнение прямой AB и перпендикуляра к плоскости ΔABC, проходящего через точку D

2.13) косинус угла α между ребром AD и плоскостью ΔABC и косинус двугранного угла β между плоскостью ΔABC и плоскостью грани ABD

Примечание. Все компоненты результатов вычислений, кроме длин векторов, $cos\alpha$ и $cos\beta$, являются рациональными числами p/q, где $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Поэтому все числа в ответах должны быть представлены либо в виде таких дробей, где числа p и q не имеют общих простых делителей (обычные целые числа, конечно, следует записывать без знаменателя $q = 1$), либо в виде $\sqrt{p/q}$.

Контрольная работа № 2. Вариант № **1**

1. Линейный оператор переводит векторы $a_1(1,2)$, $a_2(3,-1)$ в векторы $b_1(4,5)$, $b_2(3,7)$ соответственно. В какой вектор переходит при этом вектор $a(-1,5)$?

2. Существует ли такой элемент $x \in \mathbb{R}^3$, для которого $Q(x) < 0$, где $Q(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 9x_3^2$?

3. Найдите ортонормированный базис, в котором квадратичная форма $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$ имеет канонический вид (укажите канонический вид и матрицу перехода к каноническому базису).

5. РЕСУРСЫ

5.1. Базовый учебник

1. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. *Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной*: учебник для студ. высш. учеб. заведений – М.: Издательский центр «Академия», 2010. (Университетский учебник. Высшая математика и ее приложения к экономике).
2. Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г. *Линейная алгебра: учебник и практикум для академического бакалавриата* (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3588-2. М. : Юрайт, 2014.

Обеспеченность студентов базовым учебником 100 %.

5.2. Основная литература

1. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры* – М.: Наука, любое издание.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*. – М.: Наука, любое издание.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* – М.: Наука, любое издание.
4. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа (под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича)* – М.: Наука, любое издание после 1981.
5. Шевцов Г.С. *Линейная алгебра.* Учебное пособие. – М.: Гардарики, 1999.

5.3. Дополнительная литература

1. Александров П.С. *Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры.* – М.: Наука, 1968.
2. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
3. Погорелов А.В. *Геометрия.* – М.: Наука, 1983.
4. Скорняков Л.А. *Элементы линейной алгебры. Учебное пособие.* – М.: Наука, 1980.
5. Александров П.С. *Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры.* – М.: Наука, 1968.
6. Ильин В.А., Ким Г.Д. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
7. Погорелов А.В. *Геометрия.* – М.: Наука, 1983.
8. Скорняков Л.А. *Элементы линейной алгебры. Учебное пособие.* – М.: Наука, 1980.

5.4. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине должны быть оснащены широкими досками, качественными черными маркерами и микрофоном. Проектор не нужен, т.к. у каждого студента есть базовый учебник, содержащий расширенный конспект всех лекций. Преподаватель фактически проводит лекции в режиме консультации, расставляя рукой мастера акценты, отвечает на вопросы студентов, приводит дополнительные рисунки, примеры и иные пояснения к материалу лекции.