Программа учебной дисциплины Дифференциальные уравнения

Утверждена
Академическим советом ОП «Математика» (бакалавриат)
Протокол № от 201 г.

Автор	д. ф.-м. н., проф. С.В. Шапошников, starticle@mail.ru
Число кредитов	5
Контактная работа (час.)	76
Самостоятельная работа (час.)	114
Курс	2
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целью изучения дисциплины «Дифференциальные уравнения» является освоение базовых понятий, результатов и методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Данная дисциплина является обязательной для изучения студентами 2 курса ОП бакалавриата «Математика».

Дисциплина изучается в течение 1—2 модулей.

Задача курса состоит в освоении базовой техники составления и анализа дифференциальных уравнений, которые возникают в экономических, финансовых и естественнонаучных задачах. Особое внимание будет уделяться устойчивости решений. Курс опирается на сведения из математического анализа и линейной алгебры.

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Дифференциальное уравнение и его решение. Примеры физических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Линейное уравнение первого порядка. Периодические решения и оператор монодромии.

Тема 2. Фазовое и расширенное фазовое пространство. Фазовые и интегральные кривые. Поле направлений. Одномерное автономное дифференциальное уравнение. Взаимосвязь фазовых кривых двумерной системы уравнений и интегральных кривых соответствующего дифференциального уравнения первого порядка.

Тема 3. Задание поля направлений с помощью дифференциальной один формы. Точные один формы. Восстановление функции по дифференциалу и интегрирование дифференциальной один формы. Лемма Пуанкаре. Внешнее умножение и дифференцирование дифференциальных форм.

Тема 4. Уравнение в дифференциалах и его интегральные кривые. Уравнение в полных дифференциалах. Разделение переменных. Теорема Фробениуса (трехмерный случай).

Тема 5. Замена координат в фазовом пространстве. Фазовые портреты для линейной двумерной системы с постоянной матрицей. Перенос векторного поля.

Тема 6. Замена координат в расширенном фазовом пространстве. Перенос поля направлений. Симметрии поля направлений. Существование однопараметрической группы симметрий поля направлений и интегрируемость дифференциального уравнения. Однородные уравнения.

Тема 7. Существование и единственность решения задачи Коши. Продолжаемость решений. Достаточные условия продолжаемости.

Тема 8. Неравенство Гронуолла. Непрерывность и дифференцируемость решений по параметру. Уравнение в вариациях.

Тема 9. Фазовый поток или однопараметрическая группа преобразований и их взаимосвязь с векторным полем и оператором дифференцирования вдоль векторного поля. Выпрямление векторного поля.

Тема 10. Коммутатор векторных полей. Симметрии векторных полей. Теорема Ли об интегрируемости в квадратурах.

Тема 11. Теорема Лиувилля о фазовом объеме. Теорема Пуанкаре о возвращении. Парадокс Цермело.

Тема 12. Линейные системы дифференциальных уравнений: размерность пространства решений, фундаментальная система решений, определитель Вронского и его свойства, метод вариации постоянных.

Тема 13. Экспонента матрицы и способы ее вычисления. Фундаментальная система решений линейной однородной системы с постоянной матрицы.

Тема 14. Дифференциальные уравнения высокого порядка. Канонический изоморфизм. Линейные дифференциальные уравнения: размерность пространства решений, фундаментальная система решений, определитель Вронского и его свойства, метод вариации постоянных.

Тема 15. Фундаментальная система решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Решение неоднородных уравнений с квазимногочленом в правой части.

Тема 16. Обобщенные функции. Дельта функция Дирака. Дифференцирование обобщенных функций. Свертка обобщенной функции и пробной функции. Фундаментальное решение. Построение фундаментального решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Тема 17. Устойчивость и асимптотическая устойчивость. Устойчивость линейной системы. Описание устойчивости в терминах оператора монодромии для линейных систем с постоянными коэффициентами. Устойчивость маятника с колеблющейся точкой подвеса.

Тема 18. Функция Ляпунова и достаточные условия устойчивости. Исследование устойчивости по первому приближению.

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Оценка по дисциплине складывается из следующих компонент: сдачи задач листков, домашних заданий, устного коллоквиума (типичный билет включает теоретический вопрос и задачу), работы на семинарах (в том числе регулярных 10-минутных проверочных работ) и итогового устного экзамена в конце второго модуля.

Формула накопленной оценки: НО=0.4*(работа на семинарах) + 0.2(ДЗ+Коллоквиум+Листки), где работа на семинарах, дз, коллоквиум и листки оцениваются по десятибалльной системе.

Формула итоговой оценки: ИО=0.5*НО+0.5*Э.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Примеры вопросов к экзамену:

(1) Существование и единственность решения задачи Коши.
(2) Продолжаемость решений. Достаточные условия продолжаемости.
(3) Неравенство Гронуолла. Непрерывная зависимость решений от параметра. Дифференцируемость решения по параметру. Уравнение в вариациях.
(4) Фазовый поток, порождаемый векторным полем. Симметрии векторного поля коммутируют с с соответствующим фазовым потоком. Описание симметрий векторного поля $x\partial_x + y\partial_y$. Выпрямление векторного поля.
(5) Линейные системы дифференциальных уравнений: размерность пространства решений, фундаментальная система решений, определитель Вронского и его свойства, метод вариации постоянных.
(6) Экспонента матрицы и способы ее вычисления. Фундаментальная система решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей.
(7) Дифференциальные уравнения высокого порядка. Канонический изоморфизм. Линейные дифференциальные уравнения высокого порядка: размерность пространства решений, фундаментальная система решений, определитель Вронского и его свойства, метод вариации постоянных.
(8) Фундаментальная система решений линейного дифференциального уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами. Решение неоднородных уравнений с квазимногочленом в правой части.
(9) Устойчивость и асимптотическая устойчивость. Устойчивость решения системы линейных уравнений. Функция Ляпунова и достаточные условия устойчивости. Исследование устойчивости по первому приближению.

Примеры вопросов к коллоквиуму:

(1) Дифференциальное уравнение и его решение. Примеры физических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Уравнение $y' = a(x)y + b(x)$. Периодические решения и оператор монодромии.
(2) Фазовое и расширенное фазовое пространство. Фазовые кривые и интегральные кривые. Поле направлений. Задание поля направлений с помощью дифференциальной один формы. Уравнение в дифференциалах. Уравнение в полных дифференциалах: вид интегральных кривых. Разделение переменных.
(3) Внешнее умножение и дифференцирование форм. Точные и замкнутые формы. Лемма Пуанкаре. Уравнение в дифференциалах в $\mathbb{R}^3$. Гладкие двумерные поверхности. Интегральная поверхность. Теорема Фробениуса.
(4) Замена координат в фазовом пространстве. Решение уравнения $\dot{x} = b(x)$, где $b \in C((x_1, x_2))$ и $b \neq 0$. Фазовые портреты для линейной системы 2×2 с постоянной матрицей. Перенос векторного поля.
(5) Замена координат в расширенном фазовом пространстве. Перенос поля направлений. Симметрия поля направлений. Однопараметрическая группа симметрий и интегрируемость дифференциального уравнения. Однородные уравнения.
(6) Существование и единственность решения задачи Коши.
(7) Теорема Асколи–Арцела и теорема Шаудера (б.д.) Теорема Пеано о существовании решения задачи Коши для уравнения с непрерывным и ограниченным векторным полем.
(8) Продолжаемость решений. Априорные оценки и достаточные условия продолжаемости.
(9) Неравенство Гронуолла. Непрерывная зависимость решений от параметра.

Примеры задач:

Задача 1. Пусть задано семейство кривых $f(x, y, C) = 0$ на плоскости. Гладкая кривая $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ называется огибающей этого семейства, если существует гладкая функция $C(t)$ такая, что на всяком промежутке $C(t)$ не является постоянной и для всякого t кривая γ в точке $\gamma(t)$ касается кривой $f(x, y, C(t)) = 0$. Докажите, что огибающая удовлетворяет системе уравнений:

$$f(x, y, C) = 0, \quad f_C(x, y, C) = 0.$$

Задача 2.

(i) Найдите огибающие семейства кривых

(a) $C^2 + xC + y = 0$, (b) $C^3 + xC + y = 0$, (c) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 1$,

(d) $\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{1-C^2} = 1$, $|C| < 1$.

(ii) Объясните как с помощью огибающих в пунктах (a) и (b) решить геометрически уравнения $t^2 + xt + y = 0$ и $t^3 + xt + y = 0$ относительно t.

(iii) Докажите, что огибающая семейства решений уравнения $F(x, y, y') = 0$ является особым решением уравнения, т. е. таким решением, которое в каждой своей точке касается некоторого другого решения и не совпадает с этим решением ни в какой окрестности точки касания.

Задача 3. Пусть функция $b(x, y)$ квазиоднородна степени n с весами α и β, то есть

$$b(e^{\alpha\tau}x, e^{\beta\tau}y) = e^{n\tau}b(x, y).$$

Докажите, что поле направлений уравнения $y' = b(x, y)$ на области

$$\{(x, y) \colon\ x > 0,\ y > 0\}$$

инвариантно относительно группы преобразований $g^\tau(x, y) = (e^{\alpha\tau}x, e^{\beta\tau}y)$ тогда и только тогда, когда $n = \beta - \alpha$. Пусть теперь $n = \beta - \alpha$. Найдите замену, которая преобразует уравнение $y' = b(x, y)$ в уравнение с разделяющимися переменными. В каких координатах разделяются переменные в уравнении $y' = xy^2 + x^3y^3$?

Задача 4. Какие из следующих векторных полей на прямой можно перевести друг в друга диффеоморфизмом:

$$(2\sin x)\partial x, \quad (\sin^2 x)\partial x, \quad (\sin 2x)\partial x?$$

V. РЕСУРСЫ

1. Основная литература

1. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.;Ижевск: Издательство РХД, 2013.

2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2012.

2. Дополнительная литература

1. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений.М.:Едиториал УРСС, 2007.

2. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО. 2012.

3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.

3. Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа

1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	*Из внутренней сети университета (договор)*
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	*Из внутренней сети университета (договор)*
3.	LaTex пакет верстки научных текстов	*Свободно распространяемый программный продукт*

4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
	Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы	
1.	База препринтов Cornell University	*https://arxiv.org/*
2.	База данных зарубежной периодики MathSciNet	*Онлайн доступ из локальной сети НИУ ВШЭ*
	Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)	
1.	Открытое образование	https://openedu.ru
2.	Coursera	http://www.coursera.org
3.	edX	https://www.edx.org/course
4.	MIT**OPEN**COURSE WARE	https://ocw.mit.edu/index.htm

5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

– ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);

– мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для самостоятельных занятий по дисциплине оснащены персональными компьютерами, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.