

## Программа учебной дисциплины

### «Алгебра»

Утверждена

Академическим советом факультета математики

Протокол № от «\_\_» \_\_\_\_ 20\_\_ г.

Автор	Фейгин Е.Б., Рыбников Л.Г.
Число кредитов	10
Контактная работа (час.)	144
Самостоятельная работа (час.)	236
Курс	1 курс ОП бакалавриата «Математика»
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

### **I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ**

Цель изучения дисциплины Алгебра 1 состоит в освоении базовых конструкций теории коммутативных колец, теории полей, линейной алгебры и теории групп. Предполагается, что студент, освоивший дисциплину, сможет уверенно пользоваться теоретическими основами указанных разделов алгебры и применять их для решения математических задач различного происхождения, использующих алгебраические структуры.

### **II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

*Тема 1. Алгоритм Евклида, основная теорема арифметики.*

*Тема 2. Многочлены, кольца, поля вычетов.*

*Тема 3. Векторные пространства, линейные отображения, базисы.*

*Тема 4. Матрицы, определители, линейные уравнения.*

*Тема 5. Группы, подгруппы, гомоморфизмы.*

*Тема 6. Действия групп на множествах.*

*Тема 7. Действия групп на множествах (продолжение). Структурные теоремы о конечных группах.*

*Тема 8. Модули над евклидовыми кольцами: классификация конечнопорожденных абелевых групп.*

*Тема 9. Модули над евклидовыми кольцами: нормальные формы линейных операторов.*

*Тема 10. Многочлены многих переменных: лемма Гаусса и факториальность.*

*Тема 11. Теоремы Гильберта о базисе и об инвариантах.*

### III. ОЦЕНИВАНИЕ

Компоненты оценивания:

устный экзамен в конце семестра + устный коллоквиум на сессионной неделе + контрольная работа в каждом модуле + письменное домашнее задание каждую неделю  
Каждая компонента оценивается из 10 баллов.

Формула оценки:  $0.4 \cdot \text{экз} + 0.2 \cdot \text{коллоквиум} + 0.2 \cdot \text{к/р} + 0.2 \cdot \text{д/з}$

Итоговая оценка получается округлением вверх.

### IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Билет на экзамен:

1. Разложение определителя по строке и по столбцу. Формулы Крамера.
2. Линейная зависимость векторов. Основная лемма о линейной зависимости. Базис векторного пространства.
3. Найдите характеристический и минимальный многочлены матрицы  $a_{ij}$ .

Контрольная работа.

Билет на экзамен:

1. Докажите три теоремы Силова.
2. Докажите, что кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально.
3. Найдите сумму шестых степеней комплексных корней многочлена  $x^7 - x - 1$ .

Контрольная работа.

1. а) Найдите порядок группы вращений прямоугольной призмы, основание которой -- правильный семиугольник; б) сколько элементов какого порядка в этой группе? в) Сколько существует раскрасок вершин этой прямоугольной призмы в  $a$  цветов (призмы считаются одинаково раскрашенными, если их можно перепутать, повернув в руках)?
2. Найдите а) количество силовских подгрупп всех возможных порядков; б) порядок коммутанта некоммутативной группы порядка 111.
3. Сколько силовских 5-подгрупп в группе  $S_7$ ?

4. Докажите, что группа порядка 440 разрешима.

## Контрольная работа

1. Являются ли линейными пространствами относительно естественных операций следующие множества: арифметические прогрессии; геометрические прогрессии; последовательности Фибоначчи (последовательности, удовлетворяющие условию  $x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$ ); функции вида  $a \sin(x + c)$ ?
2. Найдите сумму и пересечение пространств многочленов, делящихся на фиксированные многочлены  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$ .
3. Найдите размерность и базис факторпространства пространства всех отображений из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$  по подпространству отображений, обращающихся в ноль в точках  $\cos(2\pi k/17) + i \sin(2\pi k/17)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
4. Пусть  $V$  – векторное пространство,  $A, B \in \text{End}V$ . Докажите, что если  $\text{id} + AB$  изоморфизм, то и  $\text{id} + BA$  тоже.
5. Пусть  $V_0$  – подпространство пространства  $V$ . Докажите, что  $V$  конечномерно тогда и только тогда, когда  $V_0$  и  $V/V_0$  конечномерны.
6. Найдите какой-нибудь базис и размерность пространства многочленов  $P(x)$  степени не выше  $n$ , таких что  $P(2) = P(4) = 2P(7)$ .
7. Рассмотрим векторы  $e_1, e_2, e_3$ , заданные координатами в некотором базисе следующим образом:  $e_1 = (2, 1, -3)$ ,  $e_2 = (3, 2, -5)$ ,  $e_3 = (1, -1, 1)$ . Докажите, что векторы  $e_1, e_2, e_3$  также образуют базис. Выразите через этот базис вектор  $x$ , имеющий в старом базисе координаты  $(6, 2, -7)$ .

## V. РЕСУРСЫ

### 1. Основная литература

Курс алгебры / Э. Б. Винберг. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Факториал Пресс, 2002.

### 2. Дополнительная литература

Введение в алгебру: учебник для ун-тов: в 3 ч. / А. И. Кострикин. – М.: МЦНМО, 2009.

Линейная алгебра и геометрия: учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Изд. 4-е. стер. – СПб.: Лань, 2008.

### 3. Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 10 Microsoft Windows 8.1 Professional RUS	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
3.	LaTeX пакет верстки научных текстов	<i>Свободно распространяемый программный продукт</i>

### 4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
<i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i>		
1.	База препринтов Cornell University	<a href="https://arxiv.org/">https://arxiv.org/</a>
2.	База данных зарубежной периодики MathSciNet	Онлайн доступ из локальной сети НИУ ВШЭ <a href="https://library.hse.ru/e-resources">https://library.hse.ru/e-resources</a>
<i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i>		
1.	Открытое образование	<a href="https://openedu.ru">https://openedu.ru</a>
2.	Coursera	<a href="http://www.coursera.org">http://www.coursera.org</a>
3.	edX	<a href="https://www.edx.org/course">https://www.edx.org/course</a>
4.	MIT OpenCourseWare	<a href="https://ocw.mit.edu/index.htm">https://ocw.mit.edu/index.htm</a>

### 5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для самостоятельных занятий по дисциплине оснащены персональными компьютерами, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.