\n\n

Программа учебной дисциплины
«Алгебра»

Утверждена
Академическим советом ОП
Протокол №_____ от _______._______.20_______

Разработчик	Чернышев Всеволод Леонидович, Доцент, Департамент больших данных и информационного поиска
Число кредитов	8
Контактная работа (час.)	144
Самостоятельная работа (час.)	160
Курс, Образовательная программа	1 (Б) курс, Программная инженерия
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

Цели:

1. Развитие математического кругозора и алгебраического мышления студентов.
2. Обучение студентов важнейшим теоретическим положениям линейной алгебры, началам абстрактной алгебры, матричным методам.
3. Выработка у студентов навыков решения конкретных задач, требующих исследования систем линейных уравнений, применения матричных вычислений, многомерной геометрии, линейных операторов.

Планируемые результаты обучения (ПРО):

1. Умение решать системы линейных уравнений при помощи алгоритма Гаусса, выполнять операции над матрицами.
2. Умение вычислять определители матриц (в том числе, используя определение), находить ранги матриц.
3. Умение применять основные векторные и матричные операции для решения задач аналитической геометрии.
4. Умение находить фундаментальную систему решений однородной СЛАУ, находить общее решение неоднородной СЛАУ, исследовать СЛАУ на совместность.
5. Умение работать с комплексными числами (в частности, умение извлекать комплексные корни).
6. Умение исследовать строение групп. Умение применять основы шифрования. Умение выяснять, является ли данной множество группой, кольцом, полем, алгеброй и уметь устанавливать изоморфизмы между ними.
7. Умение выяснять является ли данный алгебраический объект линейным пространством. Уметь находить матрицы линейных операторов, выяснять когда эти матрицы имеют простейший вид и находить его.
8. Умение приводить билинейные и квадратичные формы к каноническому виду, исследовать их на положительную и отрицательную определенность.
9. Умение находить расстояния между вектором и линейным многообразием в евклидовом пространстве. Умение находить основные матричные разложения.
10. Умение классифицировать кривые и поверхности второго порядка и приводить их к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования и сдвига.

Пререквизиты:

1. знание элементарной алгебры
2. знание простейших понятий теории множеств

2. Содержание учебной дисциплины

Тема (раздел дисциплины)	**Объем в часах** лк см onl/ср	**Планируемые результаты обучения (ПРО), подлежащие контролю**	**Формы контроля**
Системы линейных уравнений, матрицы	9 9 20	• Умение решать системы линейных уравнений при помощи алгоритма Гаусса, выполнять операции над матрицами.	ДЗ1, КР1, СЕМ1, ЭКР1.
Определители	9 9 20	• Умение вычислять определители матриц (в том числе, используя определение), находить ранги матриц.	ДЗ1, КР1, СЕМ1, ЭКР1.
Системы линейных уравнений, матрицы (продолжение)	6 6 13	• Умение находить фундаментальную систему решений однородной СЛАУ, находить общее решение неоднородной СЛАУ, исследовать СЛАУ на совместность.	ДЗ2, СЕМ1, ЭКР1.
Векторная алгебра. Элементы аналитической геометрии	6 6 13	• Умение применять основные векторные и матричные операции для решения задач аналитической геометрии.	ДЗ2, СЕМ1, ЭКР1.
Комплексные числа	6 6 14	• Умение работать с комплексными числами (в частности, умение извлекать комплексные корни).	ДЗ2, СЕМ1, ЭКР1.
Элементы общей алгебры	6 6 13	• Умение исследовать строение групп. Умение применять основы шифрования. Умение выяснять, является ли данной множество группой, кольцом, полем, алгеброй и уметь устанавливать изоморфизмы между ними.	ДЗ3, КР2, СЕМ2, ЭКР2.
Линейные пространства. Линейные отображения и операторы	6 6 13	• Умение выяснять является ли данный алгебраический объект линейным пространством. Уметь находить матрицы линейных операторов, выяснять когда эти матрицы имеют простейший вид и находить его.	ДЗ3, КР2, СЕМ2, ЭКР2.
Билинейные и квадратичные функции, евклидовы пространства	6 6 14	• Умение приводить билинейные и квадратичные формы к каноническому виду, исследовать их на положительную и отрицательную определенность.	ДЗ3, КР2, СЕМ2, ЭКР2.
Билинейные и квадратичные функции, евклидовы пространства (продолжение)	9 9 20	• Умение находить расстояния между вектором и линейным многообразием в евклидовом пространстве. Умение находить основные матричные разложения.	ДЗ4, СЕМ2, ЭКР2.

Кривые и поверхности второго порядка	9 9 20	• Умение классифицировать кривые и поверхности второго порядка и приводить их к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования и сдвига.	ДЗ4, СЕМ2, ЭКР2.
Часов по видам учебных занятий:	72 72 160		
Итого часов:	304		

Содержание разделов дисциплины:

1. **Системы линейных уравнений, матрицы**
   Системы линейных алгебраических уравнений. Операции над матрицами: сложение, умножение на число, транспонирование и умножение. Свойства операций над матрицами: сложения и умножения на скаляр, транспонирования, умножения. Единичная матрица. Некоммутативность умножения матриц. Симметрические матрицы. Ступенчатый вид матрицы и канонический (улучшенный ступенчатый) вид матрицы. Элементарные преобразования строк матрицы. Теорема о методе Гаусса. Совместные и несовместные системы линейных уравнений. Свободные переменные.
2. **Определители**
   Перестановки и подстановки. Инверсии. Транспозиции. Знак и чётность перестановки и подстановки. Общая формула для определителя произвольного порядка. Свойства определителя, в частности: разложение определителя по строке (столбцу) и фальшивое разложение, вычисление определителя верхнетреугольной матрицы. Утверждение о том, что любая функция от столбцов матрицы является определителем, если она линейна по каждому аргументу, кососимметрична и принимает значение 1 на единичной матрице, для случая квадратной матрицы второго порядка. Определитель произведения двух квадратных матриц. Способы вычисления определителей.
3. **Системы линейных уравнений, матрицы (продолжение)**
   Формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка. Дополняющий минор, алгебраическое дополнение. Союзная матрица. Обратная матрица. Критерий существования и формула для нахождения обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Матричные уравнения $AX = B$, $XA = B$. Минор. Ранг матрицы. Базисный минор. Определение линейной комбинации строк. Линейная зависимость строк (столбцов). Критерий линейной зависимости. Свойства ранга. Теорема о базисном миноре и её следствия (теорема о ранге матрицы и критерий невырожденности квадратной матрицы). Вычисление ранга матрицы: элементарные преобразования и метод окаймляющих миноров. Свойства решений однородных и неоднородных систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера—Капелли. Критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей. Фундаментальная система решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Теорема о существовании ФСР. Теорема о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений. Теорема о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.
4. **Векторная алгебра. Элементы аналитической геометрии**
   Векторы в трехмерном пространстве, линейные операции над ними и их свойства. Скалярное произведение векторов в трехмерном пространстве и его алгебраические свойства. Выражение ортогональной проекции одного вектора на направление другого. Базис в трехмерном пространстве. Ортогональный и ортонормированный базисы. Правый и левый базисы. Вычисление скалярного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе. Вычисление длины вектора и угла между векторами. Направляющие косинусы. Векторное произведение векторов, его свойства. Вычисление векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе. Критерий коллинеарности двух векторов. Смешанное произведение векторов, его свойства. Вычисление смешанного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе. Вычисление объема параллелепипеда. Критерий

компланарности трех векторов. Прямоугольная декартова система координат. Радиус-вектор точки. Радиус-вектор точки, делящей отрезок в данном отношении, середина отрезка. Уравнение поверхности и его геометрический образ. Прямая и обратная задачи аналитической геометрии. Общее уравнение плоскости в пространстве. Теорема о том, что любое линейное уравнение первого порядка задает плоскость. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальное уравнение плоскости. Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости. Прямая в пространстве. Общие уравнения прямой. Векторное уравнение прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых. Критерий принадлежности двух прямых одной плоскости. Вычислений расстояний: от точки до прямой и между двумя прямыми.

5. **Комплексные числа**
   Комплексные числа: алгебраическая и тригонометрическая форма записи. Модуль и аргумент комплексного числа. Главное значение аргумента. Сложение, умножение комплексных чисел и их свойства. Комплексное сопряжение. Деление комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение комплексного корня n-ой степени. Основная теорема алгебры. Теорема Безу. Формула Эйлера. Формулы Виета. Разложение многочленов на неприводимые множители над действительными и над комплексными числами.
6. **Элементы общей алгебры**
   Сюръективность и инъективность. Биекция. Бинарные операции. Ассоциативные и коммутативные бинарные операции. Группоид и полугруппа. Примеры. Моноид. Обратимые элементы. Группа. Примеры групп: симметрическая группа, общая линейная группа, специальная линейная группа. Абелева группа. Подгруппа. Гомоморфизм. Ядро гомоморфизма. Эпиморфизм и мономорфизм. Изоморфизм групп. Циклическая группа. Порядок элемента. Связь порядка элемента, порождающего циклическую группу, с порядком группы. Таблица Кэли. Теорема о том, что все циклические группы одного порядка изоморфны. Три свойства изоморфизма. Пример конечной циклической группы: вычеты. Таблица Кэли для вычетов по модулю 4. Левый смежный класс по некоторой подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и три её следствия. Примеры групп: группа диэдра, знакопеременная группа. Группа кватернионов. Утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых числе по сложению. Нормальная подгруппа. Критерий нормальности. Определение факторгруппы. Естественный гомоморфизм. Утверждение о том, что нормальными подгруппами являются ядра гомоморфизмов и только они. Теорема о гомоморфизме. Прямое произведение групп. Замечание о том, какими бывают группы порядка восемь. Теорема Кэли. Криптография с открытым ключом. Задача дискретного логарифмирования. Система Диффи–Хеллмана обмена ключами. Криптосистема Эль–Гамаля. RSA. Определение кольца. Аддитивная группа кольца. Мультипликативная полугруппа кольца. Примеры колец: числовые кольца, полное матричное кольцо, кольцо вычетов, кольцо многочленов от одной переменной. Подкольцо. Подкольцо, порожденное множеством. Коммутативное кольцо. Делители нуля и обратимые элементы. Целостное кольцо. Критерий целостности для нетривиального коммутативного кольца с единицей. Поле, примеры полей. Утверждение, что кольцо вычетов по модулю p является полем тогда и только тогда, когда p простое. Подполя: примеры. Двусторонний идеал. Главный идеал. Гомоморфизм колец. Факторкольцо. Лемма о том, что ядро гомоморфизма колец является идеалом. Теорема о гомоморфизме колец, пример. Характеристики поля. Простое подполе. Утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики. Расширение поля. Поле рациональных дробей. Утверждение о том, когда факторколько кольца многочленов над полем само является полем (без доказательства). Расширение поля, получено путем присоединения элемента: примеры. Алгебраические элементы над полем. Утверждение о том, сколько элементов может быть в конечном поле и как устроены его подполя (без доказательства). Утверждение о том, что любое конечное поле может быть реализовано как факторкольцо кольца многочленов по идеалу, порожденному неприводимым многочленом (без доказательства). Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя в кольце многочленов. Выражение для наибольшего общего делителя двух многочленов. Взаимная простота в кольцах. Китайская теорема об остатках. Алгебры: определение и примеры.
7. **Линейные пространства. Линейные отображения и операторы**

Линейное (векторное) пространство: аксиомы, их простейшие следствия. Примеры. Базис, размерность, координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Матрица перехода от старого базиса к новому. Изменение координат вектора при изменении базиса. Утверждение о том, как меняется матрица перехода при двух последовательных переходах. Подпространства в линейном пространстве. Линейная оболочка конечного набора векторов и ее размерность. Изоморфизм линейных пространств. Теорема о том, что ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из столбцов их координат. Сумма и прямая сумма подпространств. Пересечение подпространств. Утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств. Линейные отображения и преобразования (операторы) линейных пространств. Матрица линейного оператора. Теорема о том, что действие линейного оператора в конечномерном пространстве полностью определяется матрицей линейного оператора. Утверждение о формуле для матрицы оператора при замене базиса. Действия над линейными отображениями. Сопряженное пространство. Ковекторы. Преобразование координат ковектора. Сопряженные отображения. Ядро и образ (множество значений) линейного отображения. Утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного оператора. Собственный вектор и собственное значение линейного оператора. Собственное подпространство. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен квадратной матрицы. Инвариантность характеристического многочлена. Утверждение о том, что число принадлежит спектру тогда и только тогда, когда оно является корнем характеристического многочлена (над алгебраически замкнутым полем). Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения и неравенство, их связывающее (без доказательства). След матрицы. Утверждение о том, что след матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду путем перехода к базису из собственных векторов, условия диагонализируемости. Разложение пространства в прямую сумму корневых подространств. Формулировка теоремы о жордановой нормальной форме матрицы оператора. Корневые подространства. Формула для числа жордановых клеток заданного размера. Теорема Гамильтона–Кэли (формулировка).

8. **Билинейные и квадратичные функции, евклидовы пространства**
Билинейные формы. Формула для преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса. Квадратичные формы. Формула для преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса. Теорема об инвариантности ранга. Положительно (отрицательная) определенность квадратичной формы, критерий Сильвестра и его следствие. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Евклидово пространство. Примеры. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональный и ортонормированный базисы. Алгоритм ортогонализации Грама–Шмидта. Существование ортонормированного базиса в любом конечномерном пространстве. Матрица Грама и 5 её свойств: 1) критерий невырожденности, 2) симметричность и положительная определенность, 3) формула для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису, 4) положительность определителя, 5) инвариантность определителя матрицы Грама относительно процесса ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция вектора на подпространство и ортогональная составляющая. Взаимные базисы. Изоморфизм между евклидовым пространством и сопряженным к нему. Биортогональные базисы. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство. Расстояние и угол между вектором и подпространством. Формула для расстояния через определители матриц Грама. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Сопряженный оператор. Теорема о существовании сопряженного оператора. Формула для матрицы сопряженного оператора. Самосопряженные (симметрические) операторы. Критерий самосопряженности оператора. Ядро и образ сопряженного оператора. Теоремы Фредгольма.

9. **Билинейные и квадратичные функции, евклидовы пространства (продолжение)**
Ортогональность собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям. Вещественность собственных значений самосопряженного оператора. Теорема о существовании для самосопряженного оператора ортонормированного базиса из собственных векторов. Доказательство этой теоремы в случае различных вещественных собственных значений. Ортогональные матрицы и их свойства. Ортогональные операторы.

Теорема о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный и верно обратное. Критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу. Канонический вид ортогонального оператора. Теорема Эйлера. Теорема о том, что для любой симметрической матрицы найдется подобная ей диагональная матрица, а подобие будет осуществляется с помощью ортогональной матрицы. Теорема о сингулярном разложении. Утверждение о QR-разложении. Утверждение о полярном разложении. LU-разложение. Полуторалинейная форма. Эрмитова форма. Утверждение о формуле для преобразования матрицы эрмитовой формы при переходе к другому базису. Эрмитово пространство. Унитарные матрицы. Свойства унитарных матриц. Сопряженный оператор в эрмитовом пространстве. Самосопряженный оператор в эрмитовом пространстве. Эрмитовы матрицы. Свойства самосопряженного оператора в эрмитовом пространстве. Унитарный оператор в эрмитовом пространстве. Свойства унитарного оператора. Канонический вид унитарного оператора. Утверждения о полярном и сингулярном разложении в эрмитовом пространстве (формулировка). Приведение квадратичной формы к каноническому (нормальному) виду методом выделения квадратов (алгоритм Лагранжа). *Метод Якоби. Индексы инерции. Закон инерции квадратичных форм (формулировка). Приведение квадратичных форм к диагональному виду (к главным осям) при помощи ортогональной замены координат.

10. **Кривые и поверхности второго порядка**
    Кривые второго порядка. Определение эллипса, гиперболы, параболы, их параметры (в частности, эксцентриситет). Вывод уравнения эллипса. Вывод уравнения параболы. Исследование алгебраического уравнения второго порядка от двух переменных. Оптические свойства кривых второго порядка. Поверхности второго порядка (обзор). Поверхность вращения, цилиндрическая поверхность, линейчатая поверхность. Эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр. Эллипсоид, однополостной гиперболоид, двуполостной гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид. Нахождение прямолинейных образующих для однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

3. Оценивание

- **ДЗ1**, Не блокирующее, Домашнее задание
  Домашнее задание в 1-м модуле
- **КР1**, Не блокирующее, Контрольная работа
  Письменная контрольная работа в 1-м модуле, 120 минут
- **ДЗ2**, Не блокирующее, Домашнее задание
  Домашнее задание во 2-м модуле
- **СЕМ1**, Не блокирующее, Работа на семинаре
  Посещаемость и работа на семинарах в первом семестре
- **ЭКР1**, Не блокирующее, Экзамен (письменный)
  Письменная экзаменационная работа за первый семестр, 120 минут
- **ДЗ3**, Не блокирующее, Домашнее задание
  Домашнее задание в 3-м модуле
- **КР2**, Не блокирующее, Контрольная работа
  Письменная контрольная работа в 3-м модуле, 120 минут
- **ДЗ4**, Не блокирующее, Домашнее задание
  Домашнее задание в 4-м модуле
- **СЕМ2**, Не блокирующее, Работа на семинаре
  Посещаемость и работа на семинарах во втором семестре
- **КЛ**, Не блокирующее, Коллоквиум
  Коллоквиум по материалам курса в 4-м модуле
- **ЭКР2**, Не блокирующее, Экзамен (письменный)
  Письменная экзаменационная работа за второй семестр, 120 минут

Формула округления: Стандартное арифметическое округление
Шкала оценки: Десятибалльная

Вид формулы оценивания: Линейная
Формула оценивания:

O1 = 0,4 * (0,5 * КР1 + 0,4 * СРЗНАЧ(ДЗ1; ДЗ2) + 0,1 * СЕМ1) + 0,6 * ЭКР1 - Итоговая оценка за первый семестр
O2 = 0,7 * (0,35 * КР2 + 0,4 * КЛ + 0,13 * СРЗНАЧ(ДЗ3; ДЗ4) + 0,12 * СЕМ2) + 0,3 * ЭКР1 - Окончательная оценка за дисциплину

4. Примеры оценочных средств

Типовые задачи для подготовки к контрольной работе за 1 модуль

1. Исследуйте и решите систему при всех значениях параметра

$$\begin{cases} \alpha x + 3y = \alpha + 1 \\ (\alpha + 2)x + 9\alpha y = 6. \end{cases}$$

2. Выполните действия:
$(3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T$,
где $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Решите систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

4. Найдите все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

5. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - \alpha x_4 - x_5 = 2 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -5\beta. \end{cases}$$

6. Подобрать j и i так, чтобы произведение $a_{32}a_{16}a_{2i}a_{53}a_{45}a_{6j}a_{77}$ входило в определитель 7 порядка со знаком минус.

7. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Решить неравенство

$$det\begin{pmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \le -50.$$

9. Вычислите определитель матрицы порядка n:

$$det\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Типовые задачи для домашних заданий (1-2 модуль)

1. Дана точка A (0, 2, 1) и плоскость P: $8x - 5y + 8z + 7 = 0$. Найти расстояние между ними. Найти координаты точки A', расположенной симметрично точке A относительно плоскости P.

2. Даны точки $A(-3, -3, 5)$, $M_1(6, 1, 0)$, $M_2(7, 0, 1)$. Написать каноническое уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2. Найти расстояние между точкой A и прямой L. Найти координаты точки A', расположенной симметрично точке A относительно прямой L.

3. Заданы две прямые L_1 и L_2 своими общими уравнениями

$$L_1 : \begin{cases} -6x - y - 2z + 6 = 0 \\ -x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} -x - y + 5z - 1 = 0 \\ -2x + 6z + 3 = 0 \end{cases}$$

Найти расстояние между L_1 и L_2. Написать каноническое уравнение прямой, являющейся общим перпендикуляром к L_1 и L_2.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (1-3i)x + (1-2i)y = -8 + 2i, \\ (4+10i)x + (6+6i)y = -6 - 8i \end{cases}$$

5. Пусть $z = 2\sqrt{3} + 2\,i$. Вычислить значение $\sqrt[6]{z^3}$, для которого число $\frac{\sqrt[6]{z^3}}{2+2i\sqrt{3}}$ имеет аргумент $7/4\,\pi$.

6. Решите уравнение $BXA^{-1} = C^{-1}A$ относительно неизвестной подстановки X, где

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

7. Разложить подстановку $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ в произведение циклов,

транспозиций, выяснить ее четность. Определить порядок этой подстановки, вычислить σ^{744}.

8. Решить уравнение $z^2 - (7 + i)z + (18 + i) = 0$.

9. Найти корни многочлена $3x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 18x - 12$ и разложить его на множители над R и C.

Типовые задачи для подготовки к экзаменационной работе (2 модуль)

1. В ортонормированном базисе даны векторы $a\{1, 4, 1\}$, $b\{2, 1, 3\}$, $c\{-2, 0, 3\}$. Найти вектор y такой, что
$y \perp a, (y, c) = 2, (y, b) = 9$

2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = p + 3q$, $b = p - 2q$, если
$|p| = 2,\ |q| = 3,\ (\widehat{p, q}) = \frac{\pi}{3}$.

3. Даны вершины треугольника $A(-5, 3)$, $B(7, 8)$, $C(-2, -1)$. Составить уравнения медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A. (Система координат ортонормированная)

4. Даны точки $A(2, 1, 0)$, $B(0, 2, 1)$, $C(1, 2, 0)$, $D(1, 0, -2)$. Найти: (а) объем пирамиды $ABCD$; (б) длину высоты, проведенной из вершины D.

5. Проверить, что прямые $a: 2x = y + 1 = z + 2$, $b: x - 1 = -1 - y = z$ лежат в одной плоскости. Составить уравнение этой плоскости. Найти расстояние от точки $A(1, 4, -2)$ до этой плоскости.

6. Найти угол между прямой

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + z + 7 = 0 \end{cases}$$

и плоскостью $3x + y - 4z - 15 = 0$, а также координаты точки их пересечения.

7. a) Найти точку M', симметричную точке $M(-1, 2, 0)$ относительно прямой $\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}$.
b) Найти точку M', симметричную точке $M(3, 3, 3)$ относительно плоскости $8x + 6y + 8z - 25 = 0$.

8. Даны точки $P(1, 2, 0)$, $Q(1, 0, 2)$, $R(2, 1, 0)$, $S(0, -2, 1)$. Найти:
a) объем пирамиды $PQRS$;
b) угол между плоскостями (PQS) и (QRS).

9. Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$ и $x = 6t + 9, y = -2t, z = -t + 2$.
Вычислить расстояние между ними.

10. Решите уравнение $A^{-1}XB = C$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Решите уравнение $A^{-1}XB = C$, A, B, C -- подстановки

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

12. Решить неравенство

$$det\begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & x+4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2x & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} > 0.$$

13. Вычислите матрицу $6A^{-1} - (BA^2 - AB)^T$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0. \end{pmatrix}$

14. Найдите все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

Запишите решение в виде вектора-столбца. Найдите ФСР соответсвующей однородной системы.

15. Является ли отображение $\phi : X \to Y$, где $X = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathrm{Z}\right\}$, $Y = \mathrm{N}$, $\phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = a^2 + b^b$

инъективным, сюръективным?

16. Найдите комплексные корни уравнения $z^6 + \frac{\sqrt{2}(i-1)}{\sqrt{3}+i} = 0$, для которых \$0

5. Ресурсы

5.1. Рекомендуемая основная литература

п/п	**Наименование**
1	*Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч.1: Основы алгебры, М.: МЦНМО, 2009
2	*Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч.2: Линейная алгебра, М.: МЦНМО, 2009
3	*Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч.3: Основные структуры алгебры, М.: МЦНМО, 2009
4	*Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Аналитическая геометрия : Учебник для вузов, 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000
5	*Умнов, А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие: в 2 ч., М.: МФТИ, 2006
6	*Л. А. Беклемишева, Д. В. Беклемишев, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие, Изд. 4-е, стер. – СПб.: Лань, 2016
7	*И. В. Аржанцев, В. А. Артамонов, Ю. А. Бахтурин, и др.* Сборник задач по алгебре под ред. А. И. Кострикина, М.: МЦНМО, 2009

8	*Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов* Линейная алгебра: учебник и практикум для бакалавров, М.: Юрайт, 2014
9	*Д. В. Беклемишев* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов, Изд. 12-е, испр. – М.: Физматлит, 2009
10	*П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко* Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1, 7-е изд., испр. – М.: Оникс: Мир и Образование, 2009
11	*А. Г. Курош* Курс высшей алгебры: учебник для вузов, Изд. 16-е, стер. – СПб.: Лань; М.: Физматкнига, 2007
12	*Г. Д. Ким, Л. В. Крицков; Под ред. В. А. Ильина* Алгебра и аналитическая геометрия: Учеб. пособие. Т.2, Ч.1 : Теоремы и задачи, М.: Зерцало-М, 2003
13	*И. В. Проскуряков* Сборник задач по линейной алгебре: Учеб. пособие для вузов, 8-е изд. – М.: Юнимедиастайл: Лаборатория Базовых Знаний, 2002
14	*Э. Б. Винберг* Курс алгебры, 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Факториал Пресс, 2002
15	*А. Н. Канатников, А. П. Крищенко; Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко* Линейная алгебра: учебник для вузов, Изд. 4-е, испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006
16	*Г. С. Шевцов* Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учеб. пособие для вузов, М.: Финансы и статистика, 2003

5.2. Рекомендуемая дополнительная литература

п/п	Наименование
1	*F. Aleskerov, H. Ersel, D. Piontkovski* Linear algebra for economists, Heidelberg [ect.]: Springer, 2011
2	*П. С. Александров* Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры: с прил. собр. задач, снабженных решениями, сост А. С. Пархоменко : учебник, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968

5.3. Программное обеспечение

п/п	Наименование	Условия доступа/скачивания
1	Microsoft Windows 7 Professional RUS Microsoft Windows 8.1 Professional RUS Microsoft Windows 10	*Из внутренней сети университета (договор)*
2	Microsoft Office Professional Plus 2010	*Из внутренней сети университета (договор)*

5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

п/п	Наименование	Условия доступа/скачивания
	Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы	
1	Электронно-библиотечная система Юрайт	URL: https://biblio-online.ru/
	Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)	
1	Открытое образование	URL: https://openedu.ru/

5.5. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для семинарских и самостоятельных занятий по дисциплине оснащены ПЭВМ, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационнообразовательной среде НИУ ВШЭ.

6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) а для инвалидов также в соответствии с индивидуальной программой реабилитации инвалида, могут предлагаться следующие варианты восприятия учебной информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей, в том числе с применением электронного обучения и дистанционных технологий:

6.1.1. *для лиц с нарушениями зрения:* в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.2. *для лиц с нарушениями слуха:* в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации.

6.1.3. *для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:* в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.