Программа учебной дисциплины: Дифференциальные уравнения

Утверждена
Кафедрой компьютерной безопасности
МИЭМ НИУ ВШЭ
Протокол № 5 от «24» июня 2019 г.

Академическим советом ОП 25.06.2019 г.

Автор	Четвериков В.М.. vchetverikov@hse.ru
Число кредитов	4
Контактная работа (час.)	44
Самостоятельная работа (час.)	108
Курс	3 курс, 1 семестр
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целями освоения дисциплины являются:

- приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, содействие фундаментализации образования, формирование естественнонаучного мировоззрения и развитие системного мышления;
- ознакомление студентов с основными понятиями и методами решения дифференциальных уравнений;
- приобретение навыков использования пакета «Математика» для аналитического и численного решения дифференциальных уравнений.

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать:
- Знать основные методы аналитического решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;
- Знать основные методы символьного и численного решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в пакете Mathematica 10;

Уметь:
- использовать аппарат дифференциальных уравнений в процессе проведения самостоятельных научно-практических исследований;
- использовать имеющиеся возможности пакета Mathematica 10 для анализа дифференциальных уравнений

Иметь навыки (приобрести опыт):
- применения стандартных алгоритмов нахождения решений типовых дифференциальных уравнений
- анализа решения дифференциальных уравнений с помощью пакета Mathematica.

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» основывается на знаниях полученных после изучения дисциплин:

- Математический анализ, Алгебра, геометрия;
- Физика, Электроника и схемотехника;
- Дополнительные главы компьютерной математики.

Знания, полученные при изучении дисциплины «Дифференциальные уравнения» используются в курсах:

- Теория вероятностей и математическая статистика;
- Функциональный анализ;

II. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1	Диф. уравнения первого порядка	22	4	4		14
2	Дифференциальные уравнения n-го порядка	23	4	4		15
3	СЛДУ первого порядка. Краевые задачи.	20	2	2		16
4	Системы двух нелинейных ДУ первого порядка	20	2	2		16
5	Численное решение ДУ	4	2	0		2
6	Консервативные нелинейные системы двух ДУ первого порядка	22	3	4		15
7	Простейшие автоколебательные системы	22	3	4		15
8	Бифуркация фазового портрета	19	2	2		15
	Итого:	152	22	22		108

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Формы контроля:

Тип контроля	Форма контроля	2 курс				Примечания
		1 модуль	2 модуль	3 модуль	4 модуль	
Текущий	Контрольная работа	*				Письм. работа 80 минут
Текущий	Домашняя работа		*			Выполнение в пакете Mathematica
Итоговый	Экзамен в устной форме		*			Защита дом. работы

Преподаватель оценивает работу студентов на семинарских занятиях: оценивается активность студентов в дискуссиях, правильность и логичность рассуждений, качество подготовки выступлений с докладами. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале определяется перед окончанием 2 модуля

$$O_{накопленная} = 0{,}8 * O_{контрольная} + O_{ауд}$$

Контрольная работа из 5 задач оценивается по 2 балла за каждую. Величина $O_{ауд}$ оценивает активность студентов на занятиях. Поскольку на каждом семинарском занятии все присутствующие студенты отвечают на вопросы, то оценка $O_{ауд}$ принимает три значения 0,1,2. Два балла получают студенты, посетившие более 80% занятий, 1 балл - посетившие более 50% занятий, 0 баллов – посетившие менее 50 % занятий.
На экзамене происходит защита домашней работы и при необходимости, ответы на вопросы, известные студентам заранее.

Результирующая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

$$O_{результ} = 0{,}5 * O_{накопл} + 0{,}5 * \cdot O_{экз}$$

Способ округления накопленной оценки итогового контроля в форме экзамена: арифметический.

Блокирующих элементов контроля нет.

На пересдаче студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Примеры Экзаменационных вопросов

1.Нахождение общего решения однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$\left(a_2 \cdot \dfrac{d^2}{dt^2} + a_1 \cdot \dfrac{d}{dt} + a_0\right) u = 0$, если характеристические числа не кратны. Записать с его помощью решение задачи Коши для этого уравнения, если $u(0) = u_0, \quad \dfrac{du}{dt} = u_0' \quad при \quad t = 0$

2.Нахождение общего решения однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$\left(\dfrac{d^2}{dt^2} + 2a \cdot \dfrac{d}{dt} + a^2 - \varepsilon\right) u = 0$, если $\varepsilon \neq 0$. Записать с его помощью решение задачи Коши для этого уравнения, если $u(0) = u_0, \quad \dfrac{du}{dt} = u_0' \quad при \quad t = 0$. С помощью предельного перехода $\varepsilon \to 0$ (используя правило Лопиталя) получить решение исходной задачи при $\varepsilon = 0$, когда корни характеристического уравнения кратны.

3.Нахождение общего решения однородной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка $K \cdot \dfrac{d}{dt} x - M \cdot x = 0$, где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ - столбец из искомых функций $x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t)$, а $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ - матрицы с заданными постоянными элементами (действительными числами), причем $\det K \neq 0$. Записать с его помощью решение задачи Коши для этого уравнения, если $x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0$ и характеристические корни не кратны.

4.Нахождение частного решения неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$\left(a_2 \cdot \dfrac{d^2}{dt^2} + a_1 \cdot \dfrac{d}{dt} + a_0\right) u = b_0 \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t)$, где $a_j \; j = 0,1,2$ и b_0 - константы.

5.Нахождение решения задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$\left(\dfrac{d^2}{dt^2} + \alpha \cdot \dfrac{d}{dt} + \omega_0^2\right) u = b_0 \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t)$, где $a_j \; j = 0,1,2$ и b_0 - константы.

$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0$.

Рассмотреть случай, когда $\omega = \omega_0$ при $\alpha > 0$ и при $\alpha = 0$.

6.Нахождение частного решения однородной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка $K\cdot\frac{d}{dt}w - M\cdot w = b\cdot\exp(-i\cdot\omega\cdot t)$, где $w=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ - столбец из искомых функций $w_1 = w_1(t)$, $w_2 = w_2(t)$, а $K=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ - матрицы с заданными постоянными элементами, причем $\det K \neq 0$. b - двумерный столбец, элементы которого – константы.

7.Решение системы N линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $A\cdot x = b$ с помощью обратной матрицы. Для случая , когда $N=2$ привести числовые примеры, при которых:

1) решение единственно, 2) решений нет, 3) решений бесконечно много.

8.Доказательство утверждения, что любое нелинейное дифференциальное уравнение N-го порядка для скалярной функции $u(t)$, разрешенного относительно старшей производной,

$$\frac{d^N}{dt^N}u = F(t,u,\frac{du}{dt},\frac{d^2u}{dt^2},...,\frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}),$$

может быть представлено в виде системы N дифференциальных уравнений первого порядка для N - функций $x_j(t)$ $j=1,2,...,N$:

$$\frac{d}{dt}x_j = f_j(t,x_1,x_2,...x_{N-1}).$$

Представить явный вид для функций f_j и связь функций $x_j(t)$ $j=1,2,...,N$ с функцией $u(t)$.

9.Показать, в каком случае система двух линейных дифференциальных уравнений для функций $x_j(t)$ $j=1,2$ может быть сведена к одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Привести простой пример системы трех линейных дифференциальных уравнений для функций $x_j(t)$ $j=1,2,3$, которые эквивалентны системе двух дифференциальных уравнений, одно из которых является уравнением первого порядка, а другое – уравнение второго порядка.

10.Свойства нелинейных дифференциальных уравнений, которые не проявлялись для линейных дифференциальных уравнений: отсутствие принципа суперпозиции, уход траекторий на бесконечность при конечных временах, возможность бесконечного числа решений при некоторых начальных условиях.

11.Устойчивость решения системы нелинейных дифференциальных уравнений по Ляпунову.

Разбегающиеся траектории, близкие в начальный момент. Асимптотическая устойчивость.

Сведение исследования устойчивости некоторого решения $y_j = \varphi_j(t)$ системы $\frac{d}{dt} y_j = F_j(t, y_1, y_2, ..., y_N), \quad j = 1, 2, ..., N$ к исследованию на устойчивость тривиального решения – точки покоя $x_j = y_j - \varphi_j(t)$.

12.Анализ особых точек для консервативной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка по линейному приближению. Центр, седло, устойчивые и неустойчивые узлы и фокусы.

13.Теорема о возможности использования линейного приближения для анализа точек покоя нелинейной системы.

14Консервативная нелинейная система двух уравнений, имеющая решение в виде предельного цикла. Теорема Бендиксона. Осциллятор Ван-дер-Поля.

15.Показать, что система нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - x_1 \cdot \rho \cdot \sin\frac{1}{\rho} \\ x_2 &= -x_1 - x_2 \cdot \rho \cdot \sin\frac{1}{\rho} \end{aligned}, \quad \text{где} \quad \rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

обладают бесконечным числом предельных циклов – концентрических окружностей радиуса $R_n = (\pi n)^{-1}, \quad n = 1, 2, ...$ Нарисовать фазовый портрет.

<u>Указание</u>. На плоскости (x_1, x_2) ввести полярные координаты (ρ, φ): $x_1 = \rho \cdot \cos\varphi,\ x_2 = \rho \cdot \sin\varphi$, в которых исходная система примет вид $\frac{d\varphi}{dt} = -1, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho^2 \cdot \sin\frac{1}{\rho}$. Решение второго уравнения легко найти, сделав замену переменных $u = \rho^{-1}$, приводящую к уравнению $\frac{du}{dt} = \sin u$. Нетрудно заметить, что точками покоя этого уравнения являются значения $u = \pi \cdot n, \quad n = 1, 2, \ldots$.Однако точки с нечетными n являются аттракторами, а с четными n - репеллерами. Следовательно, притягивающие и отталкивающие предельные циклы (последовательность вложенных окружностей) будут чередоваться в пространстве.

V. РЕСУРСЫ

1. Основная литература

[1] Тихонов А.Н.,Васильева А.Б.,Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения М. Физматлит, 2005

[2] Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. Изд. «Феникс», 1997

2. Дополнительная литература

[3] Стехина К.Н., Тумаков Д.Н. Решение дифференциальных уравнений. в пакете Mathematica Учебное пособие КАЗАНЬ 2014 https://kpfu.ru/staff_files/F185588901/Stehina._.Matematika.v.DU.pdf

Программное обеспечение

Пакет «Математика» 10.0

3. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№	Наименование	Условия доступа
1.	Вузовская электронно-библиотечная система учебной литературы	URL: http://miem.hse.ru/
2.	База научно-технической информации (ВИНИТИ РАН)	*Из внутренней сети университета (договор)*

4. **Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для семинарских занятий по дисциплине оснащены компьютерами с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.