

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Высшая школа бизнес-информатики

Программа учебной дисциплины «Алгебра и геометрия»

Утверждена
Академическим советом ООП
«Управление ИТ в бизнесе»
Протокол № 4 от «03» июля 2019 г.

Автор	Широков Дмитрий Сергеевич, к.ф.-м.н., доцент Департамента математического факультета экономических наук
Число кредитов	6
Контактная работа (час.)	-
Самостоятельная работа (час.)	228
Курс	1
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Целью освоения дисциплины «Алгебра и геометрия» являются:

- ознакомление студентов с основами линейной алгебры, аналитической геометрии и общей алгебры;
- формирование у студентов навыков использования методов линейной алгебры для формализации и решения прикладных задач, в том числе экономических и геометрических.

В результате освоения дисциплины студент должен

знать:

- точные формулировки основных понятий,
- возможности координатного метода для исследования различных геометрических объектов,
- основные теоремы о структуре множества решений систем линейных уравнений,
- основные задачи векторной алгебры и аналитической геометрии,
- основные виды уравнений простейших геометрических объектов,
- основные свойства некоторых алгебраических структур (полей вещественных и комплексных чисел, линейного пространства над полем вещественных чисел),
- основы линейной алгебры, в частности, свойства числовых характеристик матриц: определитель, ранг, размерность пространства строк и столбцов,
- векторные пространства и их свойства;

уметь:

- интерпретировать основные понятия на простых модельных примерах,
- свободно использовать координатный, векторный, матричный или операторный способы записи математических соотношений,

- использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей,
- строить и изучать математические модели конкретных явлений и процессов для решения расчетных и исследовательских задач,
- определять возможности применения теоретических положений и методов математических дисциплин для постановки и решения конкретных прикладных задач,
- исследовать простейшие геометрические объекты по их уравнениям в различных системах координат,
- решать основные задачи линейной алгебры, в частности системы линейных уравнений,
- применять изучаемые методы построения решений систем линейных уравнений,
- решать типовые математические задачи курса, используемые при принятии управленческих решений;

иметь навыки:

- использования методов аналитической геометрии и векторной алгебры в смежных дисциплинах и экономике, - формализации и решения прикладных задач линейной алгебры, в том числе экономических.

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Введение.

Предмет курса. Принципы построения и изучения курса. Краткое содержание. Рекомендации по изучению курса, самостоятельной работе и литературе. О формах контроля и отчетности при изучении курса.

Тема 2. Некоторые сведения из теории определителей и систем линейных уравнений.

Определители матриц второго и третьего порядка. Примеры. Системы линейных уравнений (2 уравнения и 2 неизвестных, 3 уравнения и 3 неизвестных). Метод Крамера для систем с двумя и тремя неизвестными.

Тема 3. Векторная алгебра.

Линейные операции с векторами плоскости (пространства) и их свойства. Векторы. Единичные орты плоскости и пространства. Координаты векторов. Скалярное произведение, вычисление в координатах. Векторное произведение, вычисление в координатах. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл. Свойства рассматриваемых операций над векторами.

Тема 4. Системы координат и простейшие задачи, решаемые с использованием векторной алгебры.

Аффинная, декартова и полярная системы координат. Координаты точек плоскости (пространства). Деление отрезка в заданном соотношении. Вычисление площадей треугольника и параллелограмма. Вычисление объема параллелепипеда и тетраэдра.

Тема 5. Прямая линия на плоскости.

Различные виды уравнений прямой. Простейшие приложения: вычисление угла между прямыми, определение взаимного расположения двух прямых, условия параллельности и перпендикулярности, определение взаимного расположения точек относительно прямой, вычисление расстояния от точки до прямой, вывод уравнений биссектрис угла.

Тема 6. Прямая и плоскость в пространстве.

Различные виды уравнений плоскости. Простейшие приложения: вычисление расстояния от точки до плоскости, нахождение угла между плоскостями, исследование взаимного расположения плоскостей, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Различные уравнения прямой в пространстве. Простейшие приложения: вычисление угла между прямыми, нахождение угла между прямой и плоскостью, исследование взаимного расположения прямой и плоскости.

Тема 7. Кривые второго порядка.

Эллипс, гипербола, парабола. Вывод их уравнений и описание простейших свойств. Упрощение уравнений кривых второго порядка.

Тема 8. Алгебра матриц.

Определение матрицы. Частные виды матриц. Операции с матрицами и их свойства. Элементарные преобразования матриц. Ступенчатый вид матрицы. Вид Гаусса.

Тема 9. Определители матриц. Обратимые матрицы.

Перестановки элементов конечного множества. Инверсии в перестановках. Четность перестановок. Подстановки. Порядок подстановки. Разложение подстановки в произведение независимых циклов. Умножение подстановок. Определитель матрицы. Свойства определителей. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по элементам строки и столбца. Определитель с углом нулей. Определитель произведения двух матриц. Обратимые матрицы. Критерий обратимости матриц. Формула для вычисления обратной матрицы. Вычисление определителя матрицы и нахождение обратной матрицы с использованием элементарных преобразований.

Тема 10. Матрицы и системы линейных уравнений.

Ранг матрицы. Теорема о ранге матриц. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц. Элементарные преобразования систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Критерии совместности и определенности систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Главные и свободные неизвестные. Метод Крамера для решения квадратных систем линейных уравнений. Матричные уравнения.

Тема 11. Линейные пространства.

Линейные (векторные) пространства. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Свойства, связанные с линейной зависимостью. Линейная оболочка системы векторов. Нахождение ее базиса с использованием ступенчатой матрицы. - Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора относительно базиса, запись операций над векторами в координатах. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода от «старого» базиса к «новому». Подпространства линейных пространств и их базисы. Свойства линейно независимых систем векторов в подпространстве. Размерность линейной оболочки конечной системы векторов. Подпространство решений однородной системы линейных уравнений, его базис и размерность. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Векторная форма записи решений.

Тема 12. Поле комплексных чисел.

Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексного числа. Модуль и аргумент. Операции над комплексными числами. Формула Муавра. Формула Эйлера. Показательная форма записи. Извлечение корня n -ой степени из комплексного числа. Геометрические свойства корней из комплексного числа. Решение квадратных уравнений.

Тема 13. Линейные преобразования (операторы) линейных пространств.

Билинейные и квадратичные формы. Линейные операторы и их матрицы. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса. Подобие матриц. Образ и ядро линейного отображения. Операции над линейными операторами. Собственные значения, собственные векторы линейных операторов. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен квадратной матрицы. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Билинейные и квадратичные формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм. Положительно определенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

Тема 14. Евклидовы пространства.

Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, длины векторов и углы между векторами. Матрица Грама. Ортонормированный базис, процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортогональные матрицы. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение линейного подпространства в евклидовом пространстве. Ортогональная проекция вектора на подпространство (задача наилучшего приближения).
Тема 15. Линейные преобразования евклидовых пространств. Самосопряженные преобразования евклидовых пространств. Свойства собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования в евклидовом пространстве. Ортогональные преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям с помощью ортогональной замены переменных.

III. ОЦЕНИВАНИЕ

В течение двух модулей предусматривается проведение 2-х контрольных работ и проверка 1 обязательного домашнего задания. Повторная сдача работ не допускается. На семинарских занятиях возможны опросы или самостоятельные работы (по усмотрению преподавателя), проверка текущих домашних заданий. В конце второго модуля проводится письменная экзаменационная работа. В контрольных работах, обязательном домашнем задании и экзаменационной работе каждое задание оценивается в определенное (указанное в работе) количество баллов, в сумме дающих 10 баллов. Во всех работах могут присутствовать как практические задания, так и задания теоретического характера (сформулировать определение, сформулировать теорему, привести примеры, доказать некоторое утверждение). Решения практических задач засчитываются, если дан не только ответ, но и подробное и обоснованное решение. Итоговая оценка по курсу Оитог.. вычисляется по формуле:

$$\text{Оитог.} = 0,6 \cdot \text{Оэкз} + 0,14 \cdot \text{Оконтр.раб.1.} + 0,14 \cdot \text{Оконтр.раб.2} + 0,08 \cdot \text{Одом.зад.} + 0,04 \cdot \text{Оауд.}$$

где Оэкз – оценка письменной экзаменационной работы, Оконтр.раб.1, Оконтр.раб.2 – оценки контрольных работ, Оауд. – оценка активности на семинарских занятиях, Одом.зад – оценка обязательного домашнего задания.

Все формы контроля оцениваются по 10-балльной шкале, результаты арифметически округляются до целых единиц. Итоговая оценка проставляется в ведомость.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Приведены примеры задач из различных форм контроля.

1) Даны вершины $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ треугольника.

$$A(1;1), B(7;4), C(4;5)$$

Найти: а) длину стороны АВ; б) внутренний угол А; в) уравнение высоты, проведенной через вершину С; г) уравнение медианы, проведенной через вершину С; д) площадь треугольника АВС.

2) Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти $4A - BC$.

3) Решить систему линейных уравнений матричным способом

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ x + 5y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

4) Решить матричное уравнение $B \cdot X = C$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -6 \\ 8 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

5) Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

6) Найти решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

V. РЕСУРСЫ

V.1 Основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: учебник для вузов. – М.: Физматлит, 1999 (или более поздние издания).
2. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии. – М.: Изд-тво ВШЭ, 1998 (или более поздние издания).
3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие для вузов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2001 (или более поздние издания).

4. Болгов В.А., Ефимов А.В., Демидович Б.П и др.. Сборник задач по математике для ВТУЗов: в 4ч., Ч.1:Линейная алгебра и основы математического анализа – М.: Наука, 1993 (или более поздние издания).

V.2 Дополнительная литература

1. Шафаревич, И. Р. Линейная алгебра и геометрия [Электронный ресурс] / И. Р. Шафаревич, А. О. Ремизов. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 512 с. - ISBN 978-5-92211139-3. - Режим доступа: <http://znanium.com/bookread2.php?book=544772&spec=1>
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Физматлит, 2000 (или более поздние издания).
3. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра: учебник и практикум для бакалавров / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. – М.: Юрайт, 2014. – 421 с. – (Сер. "Бакалавр". Базовый курс) . - ISBN 978-5-9916299-5-9 (или более поздние издания).

V.3 Программное обеспечение

№ п/п	Наименование	Условия доступа
1.	Microsoft Windows 10	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>
2.	Microsoft Office Professional Plus 2010	<i>Из внутренней сети университета (договор)</i>

V.4 Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа
<i>Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы</i>		
1.	Электронно-библиотечная система Юрайт	URL: https://biblio-online.ru/
<i>Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)</i>		
1.	Открытое образование	URL: https://openedu.ru/

V.5 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

- ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);
- мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для лабораторных и самостоятельных занятий по дисциплине оснащены компьютерами, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.