[3] Gottwald S. *A Treatise on Many-Valued Logics.* Baldock: Research Studies Press, 2001.

[4] Karpenko, A.S. *The Development of Many-Valued Logic.* Moscow: LKI, 2010. (In Russian).

[5] Kubyshkina E., Zaitsev D. V. *Rational agency from a truth-functional perspective* // Logic and Logical Philosophy. 2016. Vol. 25. № 4. P. 499–520.

[6] Lewin R. A., Mikenberg I. F. *Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices* // Mathematical Logic Quarterly. 2006. Vol. 52. № 5. P. 478–493.

[7] Tomova N. E. *A lattice of implicative extensions of regular Kleene's logics* // Reports on Mathematical Logic. 2012. № 47. P. 173–182.

[8] Wójcicki R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations.* Dordrecht: Kluwer, 1988.

[9] `https://en.oxforddictionaries.com/word-of-the-year/word-of-the-year-2016`

Интерпретации арифметики Пресбургера в себя

Запрягаев А. А. (*Москва*)

In the talk we will discuss the interpretations of Presburger arithmetic in itself, we show that in the standard model $(\mathbb{N}, +)$ all the interpretations are isomorphic to $(\mathbb{N}, +)$ and in the case of one-dimensional interpretations we show that moreover, the isomorphism is definable.

Известно, что арифметика Пеано является *рефлексивной теорией* ([6], с. 13), то есть доказывает непротиворечивость каждой из своих конечно аксиоматизируемых подтеорий. Известно, что все секвенциальные теории с полной схемой индукции в своём языке (в частности, все расширения аксиомами арифметики Пеано **PA** и теории множеств **ZF**) также являются рефлексивными. Отметим, что из рефлексивности следует невозможность интерпретировать теорию ни в одной из своих конечно аксиоматизируемых подтеорий. А. Виссер первым предложил рассмотреть аналогичный вопрос для более слабых теорий с принципом индукции, которые не являются достаточно выразительными для формализации утверждения о непротиворечивости: в частности, для *арифметики Пресбургера* [7]. Введённая впервые М. Пресбургером ([5]) в 1929 г., она является элементарной теорией натурального ряда с операцией сложения, но не имеет умножения.

Й. Зутхаут произвёл исследование по гипотезе Виссера для случая одномерных интерпретаций [7] и установил, что положительный ответ на вопрос Виссера (невозможность интерпретировать арифметику Пресбургера ни в одной из своих конечно аксиоматизируемых подтеорий) вытекает из следующего утверждения, которое было впоследствии нами доказано:

Теорема 1. *(А. А. Запрягаев, Ф. Н. Пахомов, 2016) Пусть* $\iota\colon \mathbf{PrA} \to \mathbb{N}$ *– одномерная интерпретация арифметики Пресбургера в собственную стандартную модель* $(\mathbb{N}, +)$ *без параметров. Тогда*

1. *внутренняя модель, определяемая интерпретацией, изоморфна стандартной;*
2. *этот изоморфизм определим в* $(\mathbb{N}, +)$.

Функцию, осуществляющую изоморфизм интерпретации арифметики Пресбургера в себя тождественной, удаётся определить на основе анализа интерпретированного отношения порядка на основе идеи, предложенной Ф. Н. Пахомовым. Также отметим, что утверждение 1 Теоремы 1 было установлено ещё самим Зутхаутом.

Докладчиком был также рассмотрен вопрос о возможности обобщения этих результатов на случай многомерных интерпретаций. При решении этой проблемы естественно возникает задача об описании линейных порядков, интерпретируемых в арифметике Пресбургера в разном числе измерений. Было установлено, что все такие порядки являются *разреженными* (т. е. в них нельзя вложить плотный порядок).

Хорошо известно, что для разреженных линейных порядков может быть введено понятие ранга типа Кантора-Бендиксона [3]. В этих терминах нами был установлен следующий более точный результат:

Теорема 2. *(А. А. Запрягаев, Ф. Н. Пахомов, 2017) Все линейные порядки, интерпретируемые* m*-мерно в* $\mathbf{PrA}$, *имеют модифицированный ранг Кантора-Бендиксона* m *или ниже.*

Для доказательства этой теоремы с помощью геометрического подхода, с использованием результатов из [2], была показана возможность сопоставления всякому определимому в арифметике Пресбургера множеству его *арифметической размерности* n : арифметическая размерность указывает на существование определимого изоморфизма с декартовой степенью $\mathbb{N}^n$ натурального ряда.

Данная теорема немедленно влечёт следующий результат, аналогичный доказанному Зутхаутом для одномерного случая:

Теорема 3. *Пусть* $\iota\colon \mathbf{PrA} \to \mathbb{N}$ – m*-мерная интерпретация арифметики Пресбургера в собственную стандартную модель* $(\mathbb{N}, +)$ *без параметров* $(m > 1)$. *Тогда внутренняя модель, определяемая интерпретацией, изоморфна стандартной.*

Является ли этот изоморфизм непременно пресбургерово определимым, остаётся открытым вопросом для дальнейшего исследования.

Литература

[1] Hodges W. *Model theory.* Cambridge University Press, 1993. Т. 42.

[2] Ito R. *Every semilinear set is a finite union of disjoint linear sets* // Journal of Computer and System Sciences. 1969. Т. 3. № 2. С. 221–231.

[3] Khoussainov B., Rubin S., Stephan F. *Automatic linear orders and trees.* // ACM Transactions on Computational Logic (TOCL). 2005. Т. 6. № 4. С. 675–700.

[4] Muchnik A. A. *The definable criterion for definability in Presburger arithmetic and its applications.* // Theoretical Computer Science. 2003. T. 290. № 3. C. 1433–1444.

[5] Presburger M. *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt.* // Comptes Rendus du I congrès de Mathématiciens des Pays Slaves 92–101, Warszawa, 1929.

[6] Visser A. *An overview of interpretability logic.* // Kracht M., de Rijke M., Wansing H., Zakharyaschev M., ed., Advances in Modal Logic. T. 1. CSLI Lecture Notes. № 87. C. 307–359. Center for the Study of Language and Information, Stanford, 1998.

[7] Zoethout J. *Interpretations in Presburger Arithmetic.* Bachelor Thesis under the supervision of Albert Visser. Utrecht: Utrecht University. 2015.

Объединения модально определимых классов моделей

Золин Е. Е. (*Москва*)

Our main result: a class of pointed Kripke models (respectively, a class of Kripke models) is representable as the union of classes that are definable by some sets of modal formulas if and only if it is closed under bisimulation (respectively, surjective bisimulation) and ultrafilter extensions and its complement is closed under ultrafilter extensions.

При изучении какого-либо логического языка $\mathcal{L}$ и класса структур $\mathcal{S}$, служащих для интерпретации формул языка $\mathcal{L}$, интересен вопрос о том, как «охарактеризовать» (в терминах замкнутости относительно отношений или операций над структурами) классы структур $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$, задаваемые одной формулой или множеством формул (то есть представимые в виде пересечения классов, задаваемых одной формулой) языка $\mathcal{L}$. Однако, есть еще один естественный «вид» классов — классы структур $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{S}$, представимые в виде объединения пересечений классов, задаваемых одной формулой языка $\mathcal{L}$. Удивительный, но простой факт состоит в том, что на этом «иерархия видов» классов исчерпывается [1, Ch. 7].

В логике предикатов известны критерии для всех трех «видов» классов [1, Ch. 7]. В модальной же логике они известны (автору) лишь для первых двух «видов»; в настоящей работе даются критерии для третьего «вида».

Базовые определения см., например, в [2]. *Отмеченной моделью* мы называем пару (M, a), где $M = (W, R, V)$ — модель (Крипке) и $a \in W$.

Определение 1. Для класса моделей $\mathbb{K}$ мы будем (условно) писать:
– $\mathbb{K} \in \mathbb{M}$, если $\mathbb{K} = \{M \mid M \models A\}$ для некоторой модальной формулы A;
– $\mathbb{K} \in \Cap\mathbb{M}$, если $\mathbb{K} = \{M \mid M \models \Gamma\}$ для некоторого множества формул Γ; это равносильно тому, что $\mathbb{K} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{K}_i$ для некоторых классов $\mathbb{K}_i \in \mathbb{M}$;
– $\mathbb{K} \in \Cup\Cap\mathbb{M}$, если $\mathbb{K} = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J_i} \mathbb{K}_{i,j}$ для некоторых классов $\mathbb{K}_{i,j} \in \mathbb{M}$.

Легко дать аналогичные определения для классов отмеченных моделей, а также для $\Cap\Cup\mathbb{M}$ и так далее. Как говорилось выше, $\Cup\Cap\mathbb{M} = \Cap\Cup\mathbb{M}$.