

О классификации M -распадающихся кривых степени 8

И.М. Борисов, Г.М. Полотовский

1) i.m.borisov@mail.ru; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

2) polotovskiy@gmail.com; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Аннотация

Мы продолжаем классификацию вещественных алгебраических кривых, распадающихся в произведение двух неособых кривых при выполнении некоторых условий максимальности и общего положения. В нашей работе рассматриваются взаимные расположения кривой степени 2 (коники) C_2 и кривой степени 6 (секстики) C_6 . Применением метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений, нам удалось доказать нереализуемость 230 схем расположений таких кривых.

Обозначим через $\mathbb{R}C_m$ множество точек кривой C_m степени m в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Будем считать, что выполняются следующие условия:

(i) C_6 и C_2 являются M -кривыми, то есть $\mathbb{R}C_2$ состоит из одного овала O_2 , а $\mathbb{R}C_6$, состоит из 11 овалов и, согласно классификации и кодировке Д.А. Гудкова (см. [1]), имеет одну из следующих схем расположения овалов: $\frac{1}{1}9$, $\frac{9}{1}1$ и $\frac{5}{1}5$;

(ii) $\mathbb{R}C_6$ и $\mathbb{R}C_2$ пересекаются в 12 действительных точках без касания;

(iii) все точки пересечения лежат на одной ветви кривой $\mathbb{R}C_6$ и на одной ветви кривой $\mathbb{R}C_2$;

(iv) точки пересечения лежат на пересекающихся ветвях в одном порядке.

К исследуемым схемам кривых мы применяем метод Оревкова, основанный на теории кос и зацеплений. Для этого выберем схемы, для которых существует максимальный пучок, то есть в $\mathbb{R}P^2$ есть точка такая, что любая прямая из пучка прямых с центром в этой точке пересекает исследуемую схему кривой степени 8 не менее, чем в 6 точках, и в этом пучке существует прямая, пересекающая эту схему в 8 точках. Таких схем оказалось 250. Суть метода Оревкова заключается в следующем (подробности см. в [2], [3]). Пусть $\mathbb{C}C_m$ – множество комплексных точек кривой C_m , $\mathbb{C}l_p$ ($\mathbb{R}l_p$) – пучок комплексных (вещественных) прямых с центром в точке p . Рассмотрим на комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ множество $\mathbb{C}C_m \cap \mathbb{C}l_p$, оно гомеоморфно набору окружностей, которые попарно склеены в двойных точках множества $\mathbb{R}C_m$ вещественных точек кривой и в точках касания прямых пучка $\mathbb{R}l_p$ с $\mathbb{R}C_m$. Устраняя все точки склейки некоторым стандартным образом, получим косу из m нитей. Известно, что если схема реализуется вещественной алгебраической кривой, то соответствующая коса квазиположительна. Необходимыми условиями квазиположительности косы являются неравенство Мурасуги-Тристрама и условие Фокса-Милнора. Если хотя бы одно из них не выполняется, то схема не реализуется вещественной алгебраической кривой.

Применение метода Оревкова к 250 схемам распадающихся кривых степени 8 позволило доказать нереализуемости 230 из них. Известно, что ещё 6 схем реализуются построением по методу Гильберта (см. например, [4]). Для оставшихся 14 схем вопрос о реализуемости их вещественными алгебраическими кривыми указанного вида остаётся открытым.

Ключевые слова: вещественные алгебраические кривые, распадающиеся алгебраические кривые, метод Оревкова

Список литературы

- [1] Гудков Д.А., *Топология вещественных проективных алгебраических многообразий*// УМН, 1974 – Т. 29. – №4. – С. 3–79.
- [2] Orevkov S.Yu., *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*// Topology, 1999 – V. 38. – P. 779–810.
- [3] Orevkov S.Yu., *Classification of flexible M-curves of degree 8 up isotopy*// GAFA, 2002 – V. 12. – no 4. – P. 723–755.
- [4] Виро О.Я. *Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией* // Алгебра и анализ. – 1989. – Т. 1. – Вып. 5. – С. 1–73.

On the classification of real decomposable curves of degree 8

I.M. Borisov, G.M. Polotovskiy

Abstract

We continue the classification of real algebraic curves which decompose into a product of two nonsingular curves under some conditions of maximality and general position. In our work we consider the arrangements of the curve of degree 2 (conic) C_2 and the curve of degree 6 (sextic) C_6 . Using the Orevkov method based on the theory of braids and links, we have proved the unrealizability of 230 schemes of such curves.

Keywords: real algebraic curves, real decomposable algebraic curves, Orevkov method