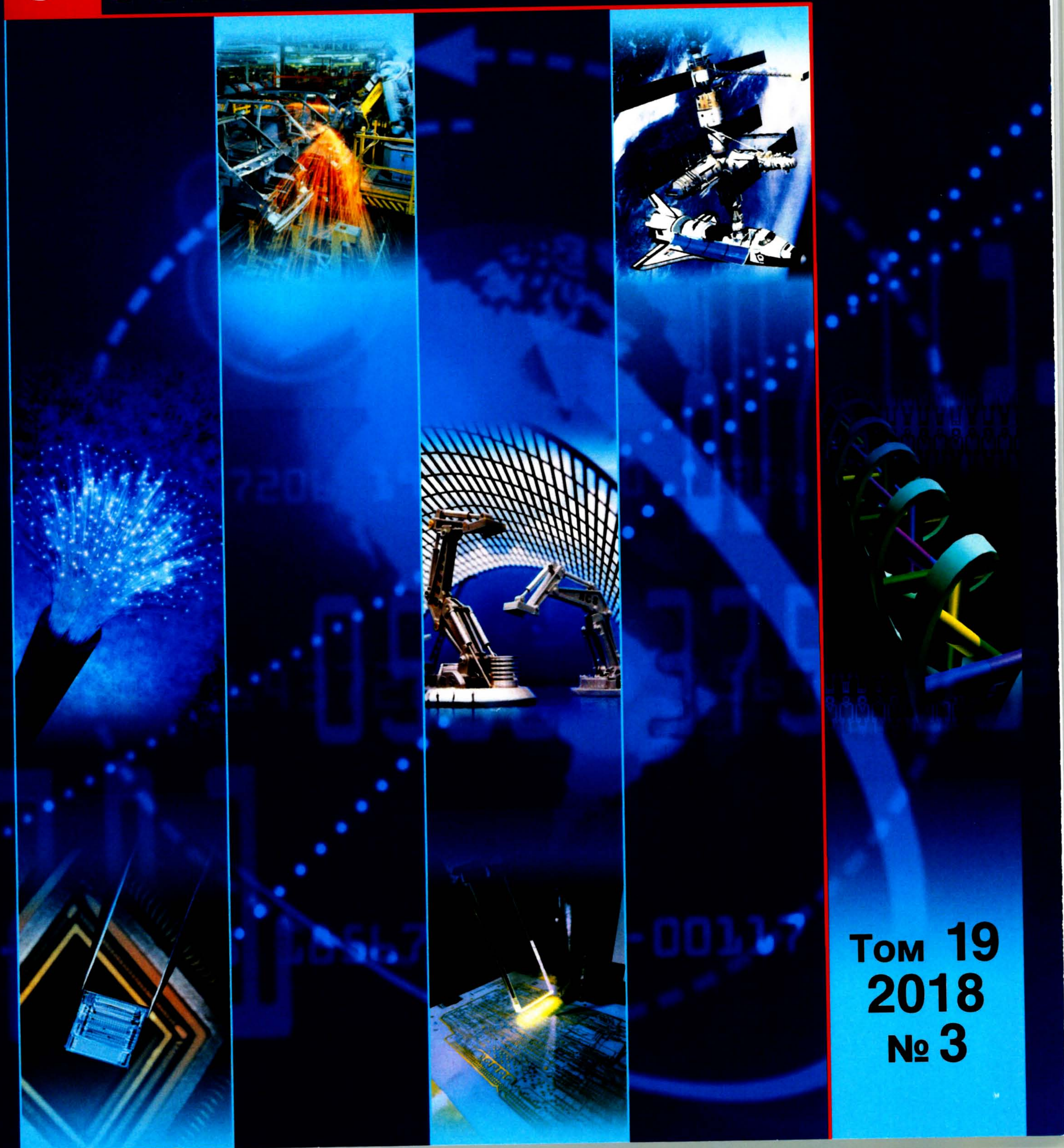
DOI 10.17587/issn.1684-6427
ISSN 1684-6427
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ



Том 19
2018
№ 3

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 19
2018
№ 3

Издается с ноября 2000 года
ISSN 1684-6427
DOI 10/17587/issn.1684-6427

СОДЕРЖАНИЕ

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу: http://novtex.ru/mech, e-mail: mech@novtex.ru

УДК 681.511.4 DOI: 10.17587/mau.19.153-159

В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук, проф., afanval@mail.ru,
А. П. Преснова, аспирант, anechkar1@yandex.ru,
Московский институт электроники и математики НИУ ВШЭ, Москва

Формирование алгоритмов оптимизации нестационарных систем управления на основе необходимых условий оптимальности*

Рассматриваются алгоритмы оптимизации нестационарных систем управления, основанные на применении уравнения Гамильтона — Якоби. Построенные алгоритмы могут использоваться как для оптимизации самих нестационарных объектов, если для этой цели выделены соответствующие параметры, так и для оптимизации всей управляемой системы с помощью соответствующей параметрической настройки регуляторов. Эффективность разработанных алгоритмов продемонстрирована на примере управления подачей антиретровирусных препаратов в организм человека при наличии ВИЧ.

Ключевые слова: *уравнение Гамильтона — Якоби, принцип минимума Понтрягина, моделирование ВИЧ, решение нелинейных нестационарных уравнений, оптимальное управление*

Введение

Развитие науки и техники сопровождается созданием управляемых объектов различного назначения, повышением требований к надежности и качеству выполняемой работы, усложнением целей, поставленных перед ними. Значительно расширился класс объектов, работающих в условиях неполной априорной и текущей информации об их состоянии, параметрах, взаимодействии со средой. В большинстве практических приложений достоверная априорная информация о модели исследуемого объекта вообще отсутствует, или ее построение связано с большими трудностями, а потому задачу построения управления приходится решать при неполном знании модели, а также в условиях стохастической неопределенности [1, 2].

В связи с этим задача конструирования нестационарных динамических систем, работающих в условиях неполной информации (иными словами, в условиях неопределенности), приобрела исключительное значение в современной теории автоматического управления. Это подтверждается большим числом публикаций и докладов на международных конференциях, посвященных как разработке научных основ конструирования нестационарных систем, так и результатам реализации разработанных методов для управления конкретными физическими объектами.

Значительное число методов конструирования и организации систем было разработано для управления подвижными объектами с неконтролируемо меняющимися в процессе функционирования параметрами, в том числе авиационно-космическими объектами [3, 4], а также для управления нестационарными технологическими объектами [5]. В последние годы большое внимание уделяется медицинской и биологической сферам приложения идей теории управления. В них нестационарными объектами являются биомедицинские процессы с их сложными динамическими моделями, зависящими от многих биологических факторов. На сегодняшний день синтезированные математические модели, использующие параметры, полученные из обработки реальных данных, позволяют, например, описывать процессы, происходящие в организме человека при таких заболеваниях, как сахарный диабет, рак или при наличии ВИЧ в организме [6—8].

Бурное развитие микроэлектроники и, в первую очередь, средств вычислительной техники, позволило реализовать сложные алгоритмы управления нестационарными объектами, что, несомненно, повышает их эффективность, надежность, снижает потребление энергоресурсов.

В статье развивается метод алгоритмического конструирования систем управления с неполной информацией о состоянии объекта, его параметрах и взаимодействии со средой, основанный на применении основных результатов аналитического конструирования [9], а именно, на применении в основе конструкций алгоритмов оптимизации необходимых (достаточных) условий минимума функционалов качества. Выработанный подход построения алгоритмов оптимизации может использоваться для построения систем идентификации, управления разнообразными нестационарными объектами.

При реализации данного метода нередко используются квадратичные функционалы, что существенно упрощает применение алгоритмов.

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (Проект 16-8-00522).

В настоящей статье в рамках алгоритмического конструирования [10] предложен алгоритм оптимизации нестационарных систем управления с неполной информацией о параметрах, основанный на применении принципа минимума Понтрягина и необходимых условий оптимальности (уравнение Гамильтона — Якоби). При выполнении сформулированных условий гарантируется успешное "отслеживание" изменений параметров объекта с выбранными алгоритмами изменения параметров модели. При этом обеспечивается "перевод" функционала качества из периферийных значений к его минимальному значению асимптотически.

В качестве примера использования разработанного алгоритма исследована задача управления подачей антиретровирусных препаратов ВААРТ в организм человека при наличии ВИЧ [11].

Постановка задачи управления нелинейным объектом с использованием SDC-линеаризации

Пусть нелинейный управляемый и наблюдаемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + B(x)u(t); \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — состояние системы; $x_0 \in X_0$, X_0 — область возможных начальных состояний системы; $x(t) \in \Omega_x$, где Ω_x — область (открытое связное множество) R^n, содержащая начало x_0; $u \in R^r$ — управление, подлежащее нахождению. Матрицы $f(x)$, $B(x)$ действительны и непрерывны, пара матриц $\langle f(x), B(x)\rangle$ является управляемой, кроме того, будем предполагать матрицы достаточно гладкими, чтобы через любые (t_0, x_0) проходило одно и только одно решение $x(t, t_0, x_0)$.

Предположение 1. Вектор-функция $f(x)$ — непрерывная дифференцируемая по $x \in \Omega_x$, т. е. $f(\cdot) \in C^1(\Omega_x)$ и $B(\cdot) \in C^0(\Omega_x)$.

Предположение 2. Без потери общности положим, что условие $x = 0 \in \Omega_x$ есть точка равновесия системы при $u = 0$ так, что $f(0) = 0$ и $B(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega_x$.

При выполнении Предположений (используя SDC-линеаризацию [12]) исходная нелинейная система (1) может быть представлена в виде модели системы

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t); \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

которая имеет линейную структуру с параметрами, зависящими от состояния $A(x)x(t) = f(x)$.

Для синтеза управления $u(t)$ введем функционал качества

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)Q\,x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\right\}dt, \tag{3}$$

где "т" — знак транспонирования; t_0 и t_f — начальное и конечное время соответственно; матрицы Q и R — симметрические, положительно определенные.

Оптимальное управление определяется соотношением [9, 10]

$$u(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}(x)S(x)x(t), \tag{4}$$

где матрица $S(x)$ — решение уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния,

$$S(x)A(x) + A^{\mathrm{T}}(x)S(x) - S(x)B(x)R^{-1}B^{\mathrm{T}}(x)S(x) + Q = 0. \tag{5}$$

Основная проблема реализации управления вида (4) заключается в сложности нахождения матрицы $S(x)$ как решения уравнения (5) в темпе функционирования объекта. В данной работе будет предложен метод алгоритмического конструирования с использованием поведения гамильтониана на оптимальной траектории.

Метод синтеза алгоритма управления нестационарным объектом с использованием необходимых условий оптимальности

Пусть нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,\eta,\alpha);\\ &x(t_0) = x_0,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния объекта; $u \in R^r$ — вектор управляющих воздействий; $\eta \in R^k$ — вектор возмущаемых параметров; $\alpha \in R^p$ — вектор параметров, выделенных для оптимизации функционирования объекта. В общем случае $k \geqslant p$.

Оптимизация системы управления осуществляется соответствующей перестройкой как параметров объекта, так и параметров регулятора. Этот класс нестационарных систем управления с оптимизацией относят к системам координатно-параметрического управления.

Предполагается, что:

- вектор-функция $f(x, u, \eta, \alpha)$ гладкая и допускает необходимое число раз дифференцирования по совокупности переменных;
- параметрическая неопределенность имеет интервальный характер $\underline{\eta}_i \leqslant \eta_i(t) \leqslant \overline{\eta}_i$, $i = 1,\ldots,k$, где $\underline{\eta}_i$ и $\overline{\eta}_i$ — соответственно минимальное и

максимальное значение i-го параметра, причем известна также максимальная скорость изменения каждого из возмущенных параметров: $d\eta_i^*(t)/dt$. Таким образом, $(\eta(t), d\eta(t)/dt) \in \Lambda$, где Λ — область возможных значений параметров и скоростей их изменений;

- область параметров, предназначенных для оптимизации системы управления при соответствующем $u^0(t) \in U$, содержит те значения, при которых достигается поставленная цель, т. е. $\alpha^0(t) \in \Lambda$, где Λ — область изменения параметров оптимизации.

Синтез оптимального управления проведем в предположении о существовании оптимального управления и об отсутствии параметрических возмущений, т. е. для $\forall t \in [t_0, t_f]$ $\eta(t) = 0$ и $\alpha(t) = 0$ [2, 11].

Для системы управления с объектом (6) в предположении об отсутствии параметрических возмущений образуем гамильтониан

$$H(x,u,\lambda) = L(x,u) + \lambda^{\mathrm{T}}(t) f(x,u), \tag{7}$$

где $\lambda(t)$ — вспомогательная переменная, являющаяся решением дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial x(t)}\right\}^{\mathrm{T}}; \\ &\lambda(t_f) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Оптимальное управление отыскивается следующим образом:

- в случае, когда ограничения на управление не эффективны, т. е. оптимальное управление достигается внутри области допустимых управлений (не находится на границах замыкания заданного множества допустимых управлений U), то

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial u(t)} = 0; \tag{9}$$

- в случае, когда ограничения на управление эффективны, т. е. оптимальное управление достигается на границах области допустимых управлений U, то

$$H(x^0,u^0,\lambda) = \min_{u(t)\in U} H(x^0,u,\lambda), \ t \in [t_0, t_f]. \tag{10}$$

Таким образом, оптимальное управление выбирается из условия

$$u^0(t) = \arg\min_{u \in U} H(x^0,u,\lambda). \tag{11}$$

Следует отметить, что краевые условия на правом конце для переменной $\lambda(t)$ и поведение гамильтониана зависят от объекта, вида задаваемой области конечных значений состояния системы и задания (или не задания) времени переходного процесса.

Условия оптимальности, сформулированные в виде двухточечной краевой задачи (6), (8) и условий выбора управления (9), (10), являются необходимыми условиями минимума функционала (3).

Продифференцировав $H(x, u, \lambda)$ (7) по времени, с учетом возможности перехода к открытой области управляющих воздействий, получим

$$\frac{d}{dt}H(x,u,\lambda) = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt}.$$

Учитывая, что дифференциальные уравнения (6) и (10) образуют каноническую форму, а также тот факт, что $\frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt} = 0$ (либо $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, либо $\frac{du}{dt} = 0$, либо $\frac{\partial H}{\partial u}$ и $\frac{du}{dt}$ — ортогональны), последнее выражение можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}H(x,u,\lambda) = \frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial t}. \tag{12}$$

Краевые условия для уравнения (12) задаются на правом конце и зависят от области конечных значений состояния системы управления.

Очевидно, что поведение гамильтониана при оптимальном управлении принимает вполне определенную траекторию, определяемую решением дифференциального уравнения с краевым условием на правом конце (за исключением стационарного случая, когда гамильтониан не зависит от времени). Это поведение положим в основу конструкции алгоритмов оптимизации системы управления.

Алгоритмы оптимизации

Запишем необходимые условия минимума функционала качества, выраженные в поведении гамильтониана на оптимальной траектории, в виде

$$\Re^0(t) = H^0(t) + \varphi(t) = 0, \tag{13}$$

здесь $\varphi(t)$ — поведение гамильтониана на оптимальной траектории.

Рассмотрим вначале случай, когда в соотношении (6) $p = k$ и с помощью параметров $\alpha(t)$ предполагается парировать соответствующие параметрические возмущения, т. е. предполагается, что возможно достижение следующего соотношения:

$$\alpha(t) = \eta(t). \tag{14}$$

При выполнении условия (14) уравнение объекта (6) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u); \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Очевидно, что если $\alpha(t) \neq \eta(t)$, то равенство (13) выполняться не будет, т. е. $\Re(t) = H(t) + \varphi(t) \neq 0$. Это обстоятельство положим в основу алгоритмов оптимизации. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова в таком виде:

$$V(\eta(\cdot), \alpha(\cdot)) = \frac{1}{2}\left\{\Re(t) - \Re^0(t)\right\}^2 = \frac{1}{2}\left\{\Re(t)\right\}^2. \quad (16)$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}V(\eta(\cdot), \alpha(\cdot)) = = \Re\left\{\frac{\partial H}{\partial \eta(t)}\frac{d}{dt}\eta(t) + \frac{\partial H}{\partial \alpha(t)}\frac{d}{dt}\alpha(t)\right\} \leqslant 0, \quad (17)$$

так как $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H^0}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial \eta(t)} = 0$ и $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial \alpha(t)} = 0$.

Пусть алгоритм параметрической оптимизации имеет вид

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\left\{\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \alpha(t)}\right\}^{\mathrm{T}} \Re(t); \quad (18)$$
$$\alpha(t_0) = \alpha_0.$$

Тогда неравенство (17) примет вид

$$\Re(t)\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \eta(t)}\frac{d}{dt}\eta(t) - -\Re^2(t)\left\|\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \alpha(t)}\right\|^2 \leqslant 0. \quad (19)$$

Из последнего неравенства следует, что параметрическая оптимизация будет успешной, если будет выполняться следующее неравенство:

$$\Re(t)\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \eta(t)}\frac{d}{dt}\eta^*(t) - -\Re^2(t)\left\|\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \alpha(t)}\right\|^2 < 0,$$

здесь $\frac{d}{dt}\eta^*(t)$ — наибольшая скорость изменения возмущающих параметров.

Назначение алгоритма параметрической оптимизации в виде (18) позволит получить условие успешной параметрической оптимизации:

$$\left\|\Re(t)\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \alpha(t)}\right\|^2 > > \left|\Re(t)\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \eta(t)}\frac{d}{dt}\eta^*(t)\right|, \quad t \in [t_0, T]. \quad (20)$$

Сформулируем следующее утверждение.

Утверждение. Пусть нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением вида (6). Тогда алгоритм градиентного типа (18), "парирующий" параметрические возмущения $\eta(t)$, обеспечит асимптотические свойства процессу параметрической оптимизации, если выполняется неравенство (20).

Пример синтеза алгоритма управления подачей препаратов при антиретровирусной терапии

Рассмотрим пример применения вышеописанного метода для синтеза управления нелинейным объектом. В качестве такого объекта была выбрана математическая модель, описывающая поведение иммунной системы человека при наличии ВИЧ. Синтезом и анализом этих математических моделей уже много лет занимаются не только биологи, но и математики. За последние 20 лет модель была усовершенствована от простой системы из двух дифференциальных уравнений, предложенной еще в 1993 г. [7], до современных моделей, учитывающих гораздо больше тонкостей иммунного ответа на вирус.

Математическая модель ВИЧ-инфекции. В данной статье используется следующая достаточно подробная модель, предложенная американскими учеными [11], которая отлично согласуется с клиническими данными:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}i(t) = \lambda - di(t) - \beta\eta(t)i(t)y(t);\\
&\frac{d}{dt}y(t) = \beta\eta(t)i(t)y(t) - \alpha y(t) -\\
&-\left[\rho_1 z_1(t) + \rho_2 z_2(t)\right]y(t);\\
&\frac{d}{dt}z_1(t) = \left[c_1 y(t) - b_1\right]z_1(t);\\
&\frac{d}{dt}w(t) = \left[c_2 i(t)y(t) - c_2 q y(t) - b_2\right]w(t);\\
&\frac{d}{dt}z_2(t) = c_2 q y(t) w(t) - h z_2(t).
\end{aligned} \quad (21)$$

Здесь i — концентрация неинфицированных клеток иммунной системы (Т-хелперы), λ — скорость производства Т-хелперов в организме, d — скорость естественной смерти Т-хелперов. При попадании вируса в кровь Т-хелперы со скоростью β заражаются и становятся инфицированными клетками (y), т. е. ВИЧ. Инфицированные клетки естественным образом умирают со скоростью α, кроме того, Т-киллеры (z_1) убивают их со скоростью ρ_1, а иммуноглобулины (z_2) убивают зараженные клетки со скоростью ρ_2 (подробнее см. работы [6, 11]). В-лимфоциты (w) активируются в организме со скоростью c_2, и со скоростью q они превращаются в иммуноглобулины. Функция лечения η описывает воздействие на систему лекарственных препаратов $\eta(t) = 1 - \eta^* u(t)$, где η^* — максимальное действие препарата, $u(t)$ — доза вводимого препарата, т. е. наше воздействие. Значения параметров взяты из работы [8].

Синтез алгоритма. Представим нашу систему (21) в виде

$$\frac{d}{dt}x = A(x)x(t) + B(x)u, \qquad (22)$$

здесь $x^{\mathrm{T}} = [i, y, z_1, w, z_2]$, при этом матрицы примут вид:

$$A = \begin{pmatrix} -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta\eta^* iy \\ -\beta\eta^* iy \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a^* = \alpha + \rho_1 z_1 + \rho_2 z_2, \quad b^* = b_2 - c_2 iy.$$

Для синтеза управления $u(t)$ используем функционал качества (3). Оптимальное управление будет определяться соотношением (4).

Как уже говорилось выше, матрицу $S(x)$, входящую в соотношение (4) как решение уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния объекта, отыскать в общем случае чрезвычайно сложно. Для поиска матрицы $S(x)$ был привлечен алгоритмический метод. Представим эту матрицу в виде

$$S(x) = S_0 + s(t), \qquad (23)$$

здесь матрица S_0 находится из решения уравнения Риккати с постоянными параметрами (при $x(t_0) = x_0$) с использованием оператора lqr в MATLAB:

$$S(x_0)A(x_0) + A^{\mathrm{T}}(x_0)S(x_0) -$$
$$-S(x_0)B(x_0)R^{-1}B^{\mathrm{T}}(x_0)S(x_0) + C^{\mathrm{T}}QC = 0.$$

В соответствии с изложенным выше способом формирования алгоритма параметрической оптимизации (18) запишем для нахождения $s(t)$:

$$\frac{d}{dt}s(t) = -\left\{\frac{\partial H\left\{x, u, \left[S_0 + s\right]\right\}}{\partial s(t)}\right\}^{\mathrm{T}} \Re(t), \qquad (24)$$
$$s(t_0) = 0.$$

Здесь

$$\Re(t) = H\left\{x^0, u^0, S(x^0)\right\} - H\left\{x, u, \left[S_0 + s(t)\right]\right\}.$$

В данной задаче $H\left\{x^0, u^0, S(x^0)\right\} = 0$. Поскольку при $S_0 + s(t) \neq S(x)$ гамильтониан имеет вид

$$H\left\{x, u, \left[S_0 + s(t)\right]\right\} = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) +$$
$$+\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) + x^{\mathrm{T}}(t)\left[S_0 + s(t)\right]\frac{d}{dt}x(t)$$

или

$$H\{x, u, [S_0 + s(t)]\} = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)\{Q - [S_0 + s(t)]\times$$
$$\times BR^{-1}B^{\mathrm{T}}[S_0 + s(t)] + [S_0 + s(t)]A(x) + \qquad (25)$$
$$+A^{\mathrm{T}}(x)\left[S_0 + s(t)\right]\}x(t),$$

функция чувствительности

$$\{\partial H\{x, u, [S_0 + s(t)]\}/\partial s(t)\}^{\mathrm{T}}$$

определяется выражением

$$\left\{\frac{\partial H\{x, u, [S_0 + s(t)]\}}{\partial s(t)}\right\}^{\mathrm{T}} =$$
$$= [-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(S_0 + s(t)) + A^{\mathrm{T}}(x)]x(t)x(t)^{\mathrm{T}}. \qquad (26)$$

Таким образом, алгоритм принимает вид

$$\frac{d}{dt}s(t) = -\left\{\frac{\partial H\{x, u, [S_0 + s(t)]\}}{\partial s(t)}\right\}^{\mathrm{T}} \times$$
$$\times H\{x, u, [S_0 + s(t)]\}, \quad s(t_0) = 0, \qquad (27)$$

где функция чувствительности

$$\{\partial H\{x, u, [S_0 + s(t)]\}/\partial s(t)\}^{\mathrm{T}}$$

определяется выражением (26), а гамильтониан — выражением (25).

Управление с параметрической оптимизацией принимает вид

$$u(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}(x)[S_0 + s(t)]x(t). \qquad (28)$$

Таким образом, из соотношения (27) получим выражение для $s(t)$. Используя этот результат, а также матрицу S_0, можем организовать управление в виде (28), подаваемое на нашу систему (21) для ее оптимизации.

Компьютерная реализация алгоритма. Пусть начальные условия соответствуют очень слабому пациенту, имеющему вирус ВИЧ (концентрация клеток иммунной системы у здорового человека обычно в интервале от 0,8 до 1 мл$^{-1}$), i_0 = 0,2 мл$^{-1}$, y_0 = 0,8 мл$^{-1}$.

На рис. 1 показана динамика здоровых клеток при построенном нами лечении и при его отсутствии. Для случая, когда начальное состояние пациента критическое, синтезированное управление справляется с задачей и выводит концентрацию здоровых клеток иммунной системы человека на приемлемый уровень. На рис. 2 видно, что при наличии лечения концентрация ВИЧ в организме достаточно быстро снижается до минимально возможного. На рис. 3 представлены значения матрицы переходных процессов $s(t)$, рассчитываемой по алгоритму (27), предложен-

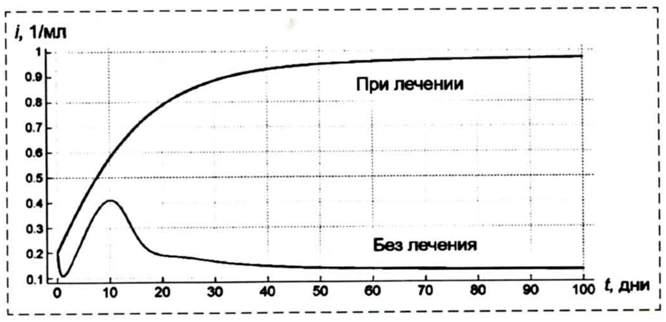


Рис. 1. Поведение здоровых клеток иммунной системы человека при наличии ВИЧ в организме

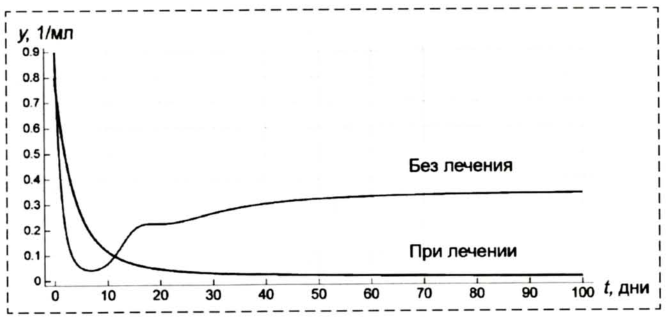


Рис. 2. Концентрация ВИЧ в организме человека

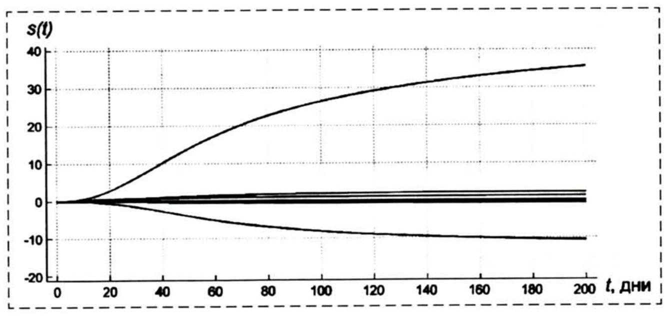


Рис. 3. Матрица переходных процессов *s*(*t*)

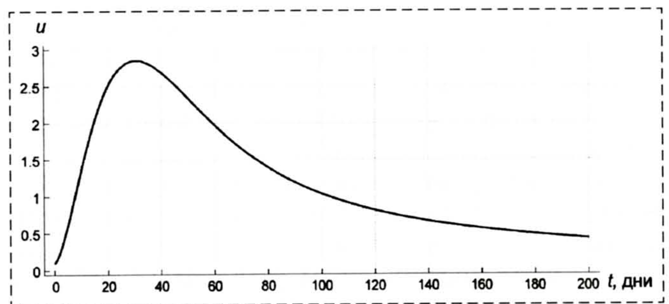


Рис. 4. Управление, синтезированное алгоритмическим методом

ному в данной работе. На рис. 1 и рис. 2 видно, что в отсутствие лечения, т. е. без применения каких-либо воздействий на организм концентрация вируса увеличивается, а здоровые клетки иммунной системы погибают, и, таким образом, организм не справляется с ситуацией самостоятельно. На рис. 4 представлен график синтезированного субоптимального управления. Видно, что в начальный период лекарственная нагрузка резко возрастает, но после того как число здоровых клеток становится в пределах нормы, лечение лишь поддерживает их необходимый уровень. При реальном медицинском применении данной модели можно с помощью регулировки матрицы R снизить суточную дозу лекарства до допустимого уровня.

Результаты математического моделирования в пакете MATLAB подтверждают правильность выбранного нами метода синтеза управления и соответствующего алгоритмического поиска матрицы $s(t)$. Наше воздействие на иммунную систему помогает стабилизировать уровень клеток иммунной системы и контролировать концентрацию вируса.

Заключение

В данной работе, основываясь на методе алгоритмического конструирования, были представлены и исследованы алгоритмы оптимизации нестационарных систем управления с квадратичным функционалом качества в условиях неполной априорной информации. В основу всех полученных алгоритмов положены уравнение Гамильтона — Якоби и свойство поведения гамильтониана на соответствующей траектории.

Результаты математического моделирования для выбранной системы нелинейных уравнений подтверждают правильность построенного субоптимального управления и возможность его применения в отдельных задачах. Таким образом, предложенный алгоритм SDC-параметризации, позволяющий переходить от решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана к уравнению Риккати с параметрами, зависящими от состояния, и предложенный алгоритм нахождения матрицы $S(x)$ могут быть использованы при необходимости построения нелинейных регуляторов.

Список литературы

1. **Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 430 с.

2. **Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 615 с.

3. **Буков В. Н.** Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 230 с.

4. **Мирошник И. В., Никифоров В. О.** Адаптивное управление пространственным движением объектов // Автоматика и телемеханика. 1991. № 9. С. 78—87.

5. **Тимофеев А. В.** Построение адаптивных систем управления программным движением. Л.: Энергия, 1980. 88 с.

6. **Chang H., Astrofi F.** Control of HIV Infection Dynamics by the Enhancement of the Immune System // Proc. 17th World Conf. IFAC, Seoul, Korea, 2012. P. 12217—12222.

7. **Perelson A. S.** Dynamics of hiv infection of CD4 + T cells // Math. Biosciences, 1993. Vol. 114. P. 81—125.

8. **Zurakowski R., Teel A.** A model predictive control based scheduling method for HIV therapy // Journal of Theoretical Biology, 2006. Vol. 238. P. 368—382.

9. **Афанасьев В. Н.** Аналитическое конструирование детерминированных конечномерных систем управления. М.: МИЭМ, 2003. 160 с.

10. **Афанасьев В. Н.** Алгоритмическое конструирование систем управления с неполной информацией. М.: МИЭМ, 2004. 148 с.

11. **Wodarz D., Nowak M. A.** Specific therapy regimes could lead to long-term immunological control of HIV // Proceedings of the National Academy of Sciences, 1999. Vol. 96. № 6. P. 14464—14469.

12. **Афанасьев В. Н.** Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: URSS, 2015. 224 с.

Minimum's Principe in Tasks of Optimization Design Algorithms

V. N. Afanasyev, afanval@mail.ru, **A. P. Presnova**, anechkar1@yandex.ru,
National Research University Higher School of Economics, Moscow, 123458, Russian Federation

Corresponding author: **Presnova Anna P.**, Postgraduate, National Research University Higher School of Economics, Moscow, 123458, Russian Federation, e-mail: anechkarl@yandex.ru

Accepted on August 27, 2017

The method of forming optimization algorithms for non-stationary control systems is developed in the article, based on the application of the Hamilton-Jacobi equation and the Pontryagin minimum principle. In this article, the original nonlinear differential equation that describes the original control system is transformed into a system with a linear structure, but with State Dependent Coefficient (SDC) parameters. The use of the quadratic quality criterion in problems with unlimited time of the transient process makes it possible, in the synthesis of control for the transformed system, to move from the need to search for the solution of a scalar partial differential equation (the Hamilton-Jacobi-Bellman equation) to a Riccati-type equation with state-dependent parameters. However, solving the resulting equation in the rate of the object's operation is no less difficult. For its solution, an algorithmic method for the synthesis of controls is proposed. The behavior of the Hamiltonian under optimal control changes during the transient process along a well-defined trajectory. This property of the Hamiltonian was used as the basis for the design of algorithms for optimizing the control system. When the formulated conditions are met, a "transfer" of the quality functional from peripheral values to its minimum value is guaranteed asymptotically. The effectiveness of the developed algorithms is demonstrated by the example of the synthesis of control controlling the supply of antiretroviral drugs HAART to the human body in the presence of HIV. The simulation was carried out in the MATLAB package.

Keywords: *Hamilton-Jacobi equation, the Pontryagin minimum principle, Riccati equation with parameters depending on the state, algorithmic construction, mathematical model of HIV*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 16-8-00522.

For citation:

Afanasyev V. N., Presnova A. P. Minimum's Principe in Tasks of Optimization Design Algorithms, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 3, pp. 153—159.

DOI: 10.17587/mau.19.153-159

References

1. **Alekseev V. M., Tihomirov V. M., Fomin S. V.** *Optimalnoe upravlenie* (Optimal control), Moscow, Nauka, 1979, 430 p. (in Russian).

2. **Afanasyev V. N., Kolmanovskij V. B., Nosov V. R.** *Matematicheskaj teoriya konsruirovaniya system upravleniya* (Mathematical theory of control system design), Moscow, Vysshaya Shkola, 2003, 615 p. (in Russian).

3. **Bukov V. N.** *Adaptivnie prognoziruyushhie sistemy upravleniya poletom* (Adaptive Predictive Flight Control Systems), Moscow, Nauka, 1987, 230 p. (in Russian).

4. **Miroshnik I. V., Nikiforov V. O.** *Adaptivnoe upravlenie prostranstvennim dvizheniem objectov* (Adaptive control of spatial motion of objects), *Avtomatika i Telemechanika*, 1991, no. 9, pp. 78—87 (in Russian).

5. **Timofeev A. V.** *Postroenie adaptivnih system upravleniya programmnim dvizheniem* (Construction of adaptive control systems by software movement), St. Petersburg, Energiya, 1980, 88 p. (in Russian).

6. **Chang H., Astrofi F.** Control of HIV Infection Dynamics by the Enhancement of the Immune System, *IFAC 2012 — 17th World Conf. IFAC.* Seoul, 2012, pp. 12217—12222.

7. **Perelson A. S., Kirschner D. E., Boer B.** Dynamics of hiv infection of CD4 + T cells, *Math.Biosciences*, 1993, vol. 114, pp. 81—125.

8. **Zurakowski R., Teel A.** A model predictive control based scheduling method for HIV therapy, *Journal of Theoretical Biology*, 2006, vol. 238, pp. 368—382.

9. **Afanasyev V. N.** *Analiticheskoe konstruirovanie determinirovannih konechnomernih system upravleniya* (Analytical construction of deterministic finite-dimensional control systems), Moscow, MIEM, 2004, 148 p. (in Russian).

10. **Afanasyev V. N.** *Algoritmicheskoe konstruirovanie system upravleniya s nepolnoj informaciei* (Algorithmic design of control systems with incomplete information), Moscow, MIEM, 2004, 148 p. (in Russian).

11. **Wodarz D., Nowak M. A.** Specific therapy regimes could lead to long-term immunological control of HIV, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1999, vol. 96, no. 6, pp. 14464—14469.

12. **Afanasyev V. N.** *Upravleniye nelineynymi neopredelennymi dinamicheskimi ob"yektami* (Control of nonlinear undefined dynamic objects), Moscow, URSS, 2015, 224 p. (in Russian).