

Двумерная краевая задача для эллиптического уравнения 2-го порядка с разрывным коэффициентом.

Гордин В.А. Шадрин Д.А.

НИУ ВШЭ & Гидрометцентр РФ, Москва, vagordin@mail.ru, shadrin.dmitry2010@yandex.ru

Многие стационарные явления (диффузии, теплопроводности, волновые) описываются эллиптическими уравнениями Пуассона или Гельмгольца:

$$-\operatorname{div}(\mathcal{G}(\vec{x}) \operatorname{grad}(u)) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G, \quad (1)$$

$$-\operatorname{div}(\mathcal{G}(\vec{x}) \operatorname{grad}(u)) + \rho(\vec{x})u = f(\vec{x}). \quad (2)$$

В некоторых задачах среда неоднородна, причем ее свойства (описываемые коэффициентом $\mathcal{G}(\vec{x})$) меняются скачком.

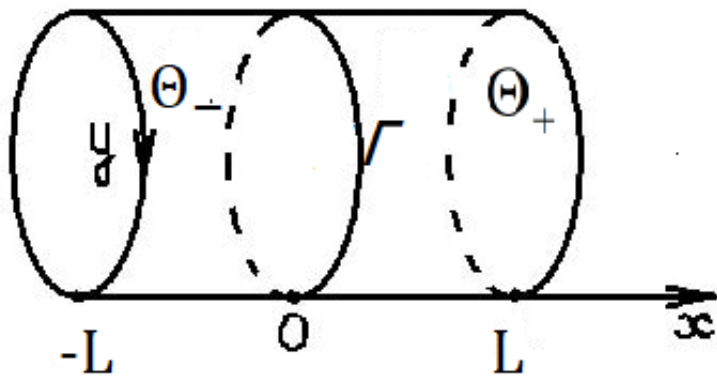


Рис. 1. модельный пример: область G – поверхность цилиндра, линия Γ – его центральная окружность при $x=0$, \mathcal{G} – кусочно-постоянная функция: в левой половине цилиндра \mathcal{G}_- , в правой \mathcal{G}_+ .
 $x \in [-L, L], y \in [0, 2\pi)$

На внешней границе цилиндра – гран. условия Дирихле, на линии Γ – стыковки (Кирхгофа):

$$[u] = 0, \quad (3a) \quad [\mathcal{D}_n u] = 0. \quad (3b)$$

Здесь $[]$ - амплитуда скачка на линии Γ , $\partial_n u$ - производная по нормали к линии Γ .

Компактная аппроксимация: Цилиндр разбивается равномерной сеткой с N точками на окружности и $N+1$ точкой на образующей. Для каждой точки двумерной сетки $\langle x_i, y_i \rangle$ определяется пара шаблонов: для u и f . Ищем коэффициенты разностных операторов A_i и P_i на этих шаблонах. A_i и P_i должны быть точны на наборе тестовых функций: (u_k, f_k) , где $k=1, \dots, M$, $f_k = L[u_k]$, u_k – мономы, L - дифференциальный оператор из левой части уравнения (1), т.е. $\forall k A_i u_k = P_i f_k$.

Коэффициенты A_i и P_i находим из СЛАУ порядка $M+1$. Из коэффициентов A_i и P_i составляем i -ые строки “глобальной” СЛАУ $\mathbf{A}\vec{U} = \mathbf{P}\vec{F}$ для решения $u(\vec{x})$ в точках двумерной сетки $N \times (N-1)$. Операторы A_i и P_i , имеют ненулевые коэффициенты только на M точках шаблона. В остальных элементах строки “глобальной” СЛАУ нули. Поскольку $M \ll N$, матрицы СЛАУ разреженные.

Точки сетки разделим на 4 типа:

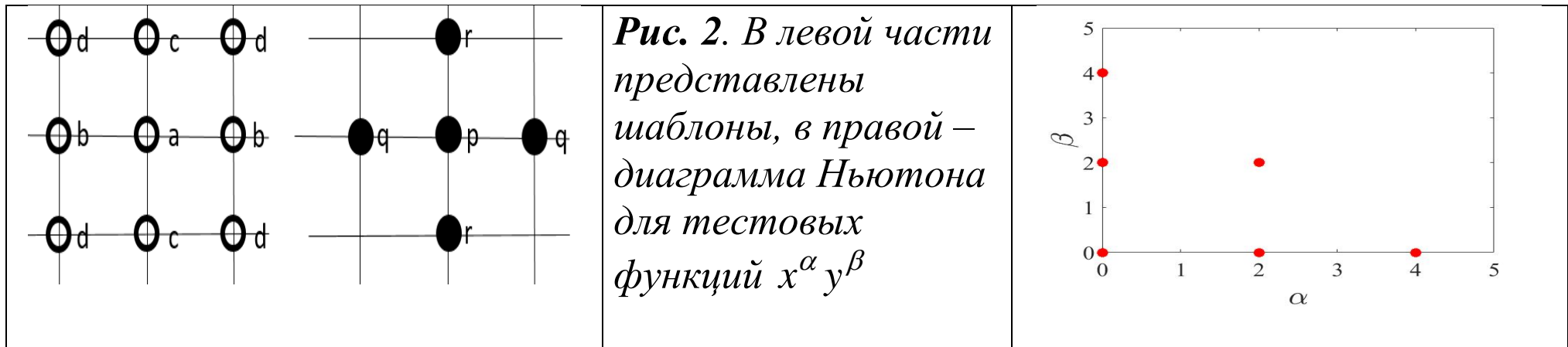
Точки типа I – находятся далеко и от внешней границы, и от линии раздела сред.

Точки типа II –находятся рядом с линией Γ .

Точки типа III –находятся на линии Γ .

Точки типа IV –на внешней границе G . В них аппроксимируем граничные условия.

Точки типа I.



Вдали от границы сред решение эллиптического уравнения u – аналитическая функция, поэтому в качестве тестовых использованы мономы: $x^\alpha y^\beta$.

Шаблоны симметричны относительно вертикали и горизонтали, поэтому мономы имеют только четные степени.

Решение малой СЛАУ - коэффициенты: $a = 1, b = c = -0.2, d = -0.05, p = 0.2, q = 0.025$.

Точки типа II.

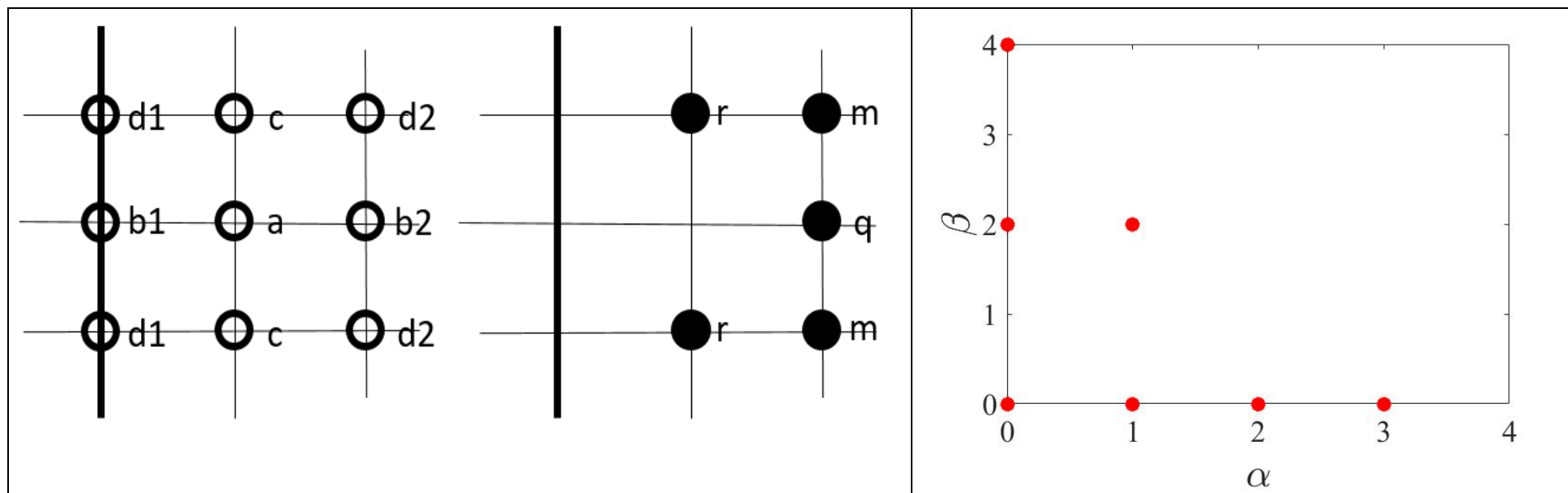


Рис. 3. В левой части шаблон для точек типа II ;(жирная линия - Γ), в правой – диаграмма Ньютона для тестовых функций $x^\alpha y^\beta$, разложение Тейлора справа от Γ .

Шаблоны симметричны только относительно горизонтали, поэтому у тестовых мономов при y стоят четные степени, а при x – все.

Решение малой СЛАУ - численные значения коэффициентов:
 $a = 44, b_1 = b_2 = -10, c = -10, d_1 = d_2 = -1, r = 6, m = -5, q = 10.$

Точки типа III, симметрия как и для II

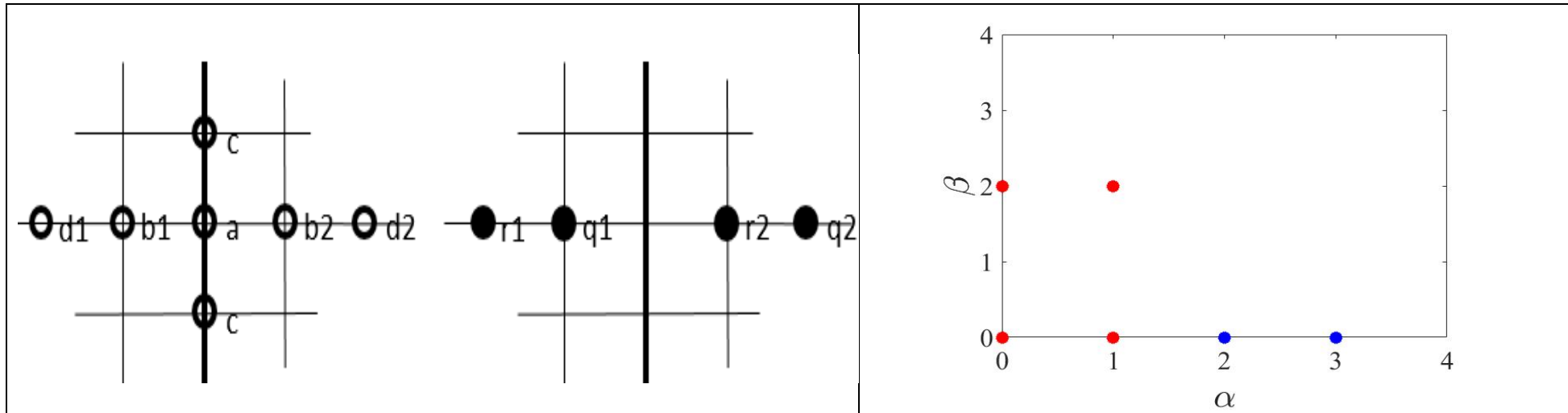


Рис.4. Шаблон и диаграмма Ньютона для точек типа III. Синие точки на диаграмме Ньютона обозначают пару тестовых функций (с сигнумом и без).

Правая часть уравнения может быть не определена на линии Γ , и ее точки не входят в шаблон для правой части f . Тестовые функции: $1, \frac{x}{g}, x^2, \text{sign}(x)x^2, x^3, \text{sign}(x)x^3, y^2, \frac{y^2x}{g}$.

Решение малой СЛАУ - численные значения коэффициентов:

$$a = 1, c = -0.4, b_1 = 0, b_2 = 0, d_1 = \frac{-18}{99}, d_2 = \frac{-18}{990}, r_1 = \frac{12}{990}, r_2 = \frac{12}{990}, q_1 = \frac{48}{990}, q_2 = \frac{12}{990}.$$

Для точек типа IV – обычное условие Дирихле

Составление матриц “глобальной” СЛАУ

После определения коэффициентов разностных операторов для каждой точки составляются глобальные матрицы \mathbf{A} и \mathbf{P} , в i -й строке которых стоят коэффициенты разностных операторов A_i и P_i . Коэффициенты \mathbf{A} и \mathbf{P} для j -й точки шаблона обозначим a_{ij} и p_{ij} . После добавления уравнений, аппроксимирующих граничные условия Дирихле, получаем глобальную СЛАУ на значения функции U в точках сетки: $\mathbf{A}\vec{U} = \mathbf{P}\vec{F}$. Здесь \vec{F} – значения правой части f в точках сетки.

При решении этой системы, матрица \mathbf{A} обращаем, - необходимо обеспечить её хорошую обусловленность. Оператор A_i точен на константе, поэтому $\sum_j a_{ij} = 0$. Если $a_{ii} > 0$, а остальные веса отрицательные, то имеем:

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| = a_{ii} . \quad (4)$$

Нуль лежит на краю кругов Гершгорина, содержащих спектр матрицы \mathbf{A} . В уравнениях СЛАУ, отвечающих граничным точкам цилиндра, диагональ доминирует. Поэтому есть основания полагать, что нуль не войдет в спектр \mathbf{A} , и ее можно будет обратить.

Тесты, подтверждающие порядок схемы.

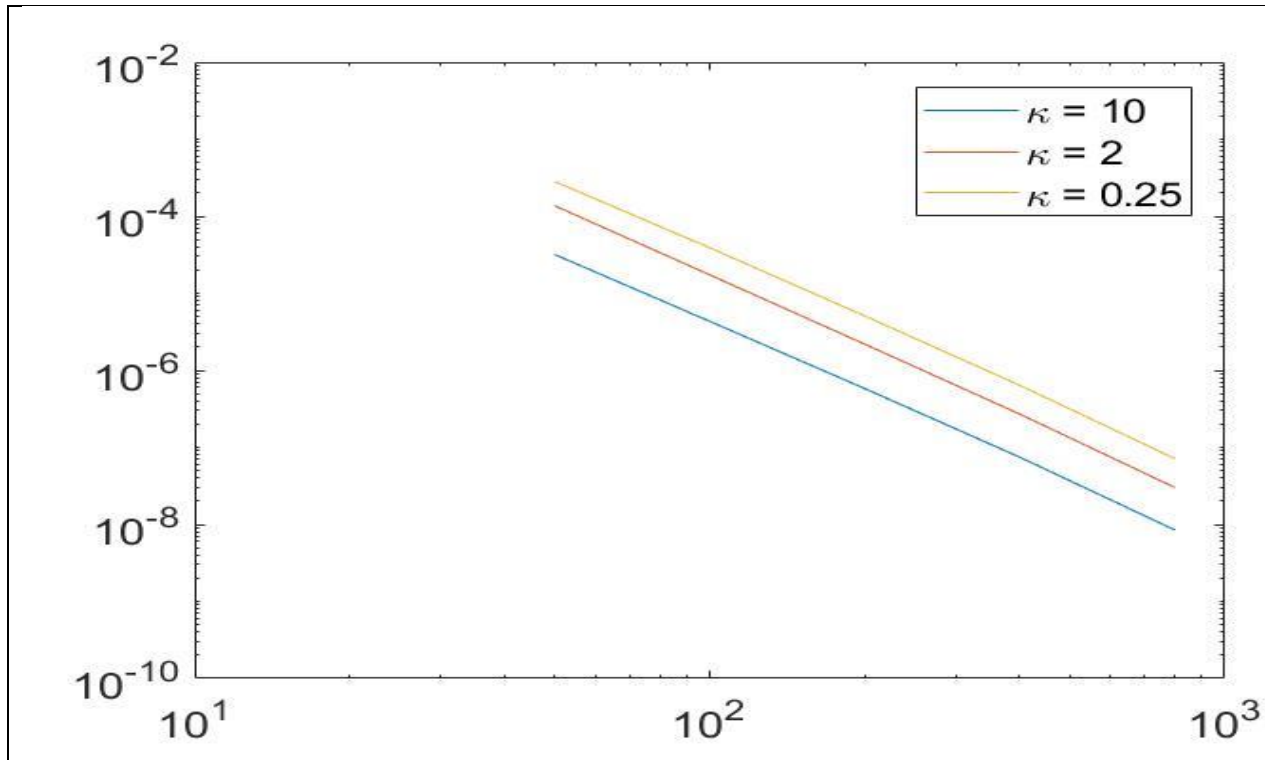


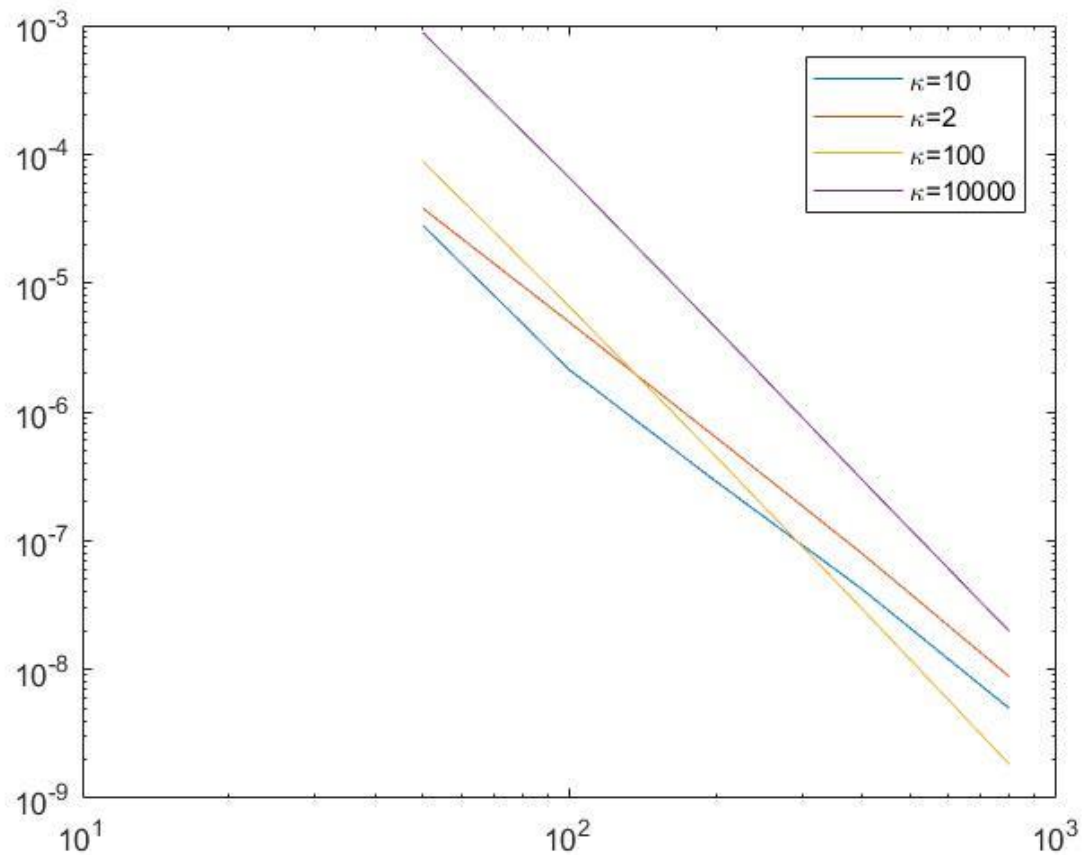
Рис.5.2. Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в lg-системе при разных значениях $\kappa = \frac{\mathcal{G}_-}{\mathcal{G}_+}$.

. Правая часть $f = x \cos(y)$.

Граничные условия Дирихле:

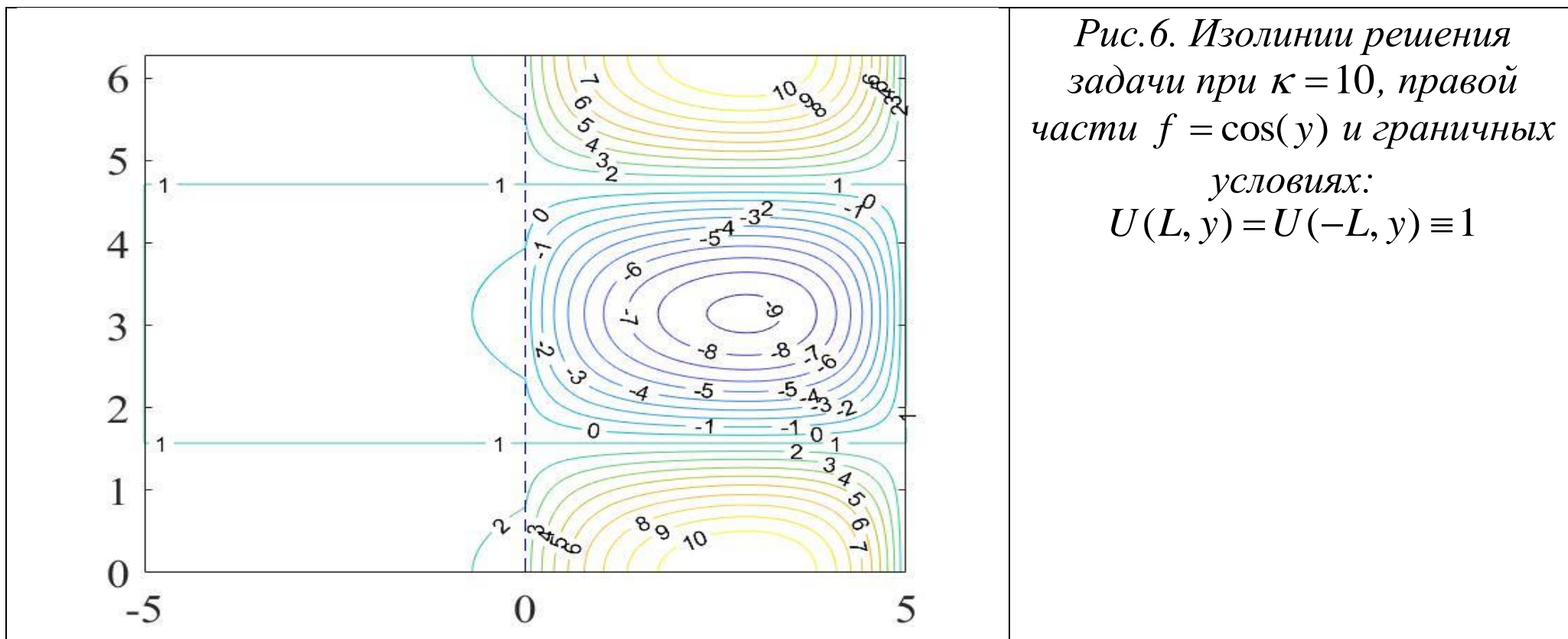
$$U(-L, y) = \sin(y),$$

$$U(L, y) = \cos(y).$$



*Рис.5.1. Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в lg-системе при больших значениях $\kappa = \frac{\mathcal{D}_-}{\mathcal{D}_+}$. Правая часть $f = \cos(y)$.
 Граничные условия Дирихле:
 $U(-L, y) = \sin(y)$,
 $U(L, y) = \cos(y)$.*

Пример решения задачи Дирихле.



Невозможность обеспечить условие (4) для аппроксимации 4-го порядка.

В точках сетки типа B порядок 4. Для точек типа B для обеспечения 4-го порядка необходимо добиться точности разностных операторов на наборе тестовых функций:

$$1, \frac{x}{g}, x^2, \text{sign}(x)x^2, x^3, \text{sign}(x)x^3, x^4, \text{sign}(x)x^4, y^2, \frac{y^2x}{g}, y^2x^2, \text{sign}(x)y^2x^2, y^4.$$

Для гарантии хорошей обусловленности матрицы A должно выполняться условие (4). Выберем шаблоны для решения и правой части, квадрат $2k$ на $2k$ с достаточно большим k . Если существует шаблон удовлетворяющий условию (4) и имеющий диаметр меньше $2k$, то оно будет вкладываться в большой шаблон. При данном наборе тестовых функций не было обнаружено коэффициентов большого шаблона, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| = a_{ii} \quad (4),$$

следовательно, их нет и для меньших шаблонов.

Экстраполяция Ричардсона для повышения порядка схемы

Пусть некий алгоритм, зависящий от шага сетки $h \sim \frac{1}{N}$, имеет порядок точности ν ,

т.е. имеет место разложение:

$$u_h(\vec{x}) = u(\vec{x}) + C(\vec{x})h^\nu + o(h^\nu) \quad (5)$$

При шаге $2h$ получаем:

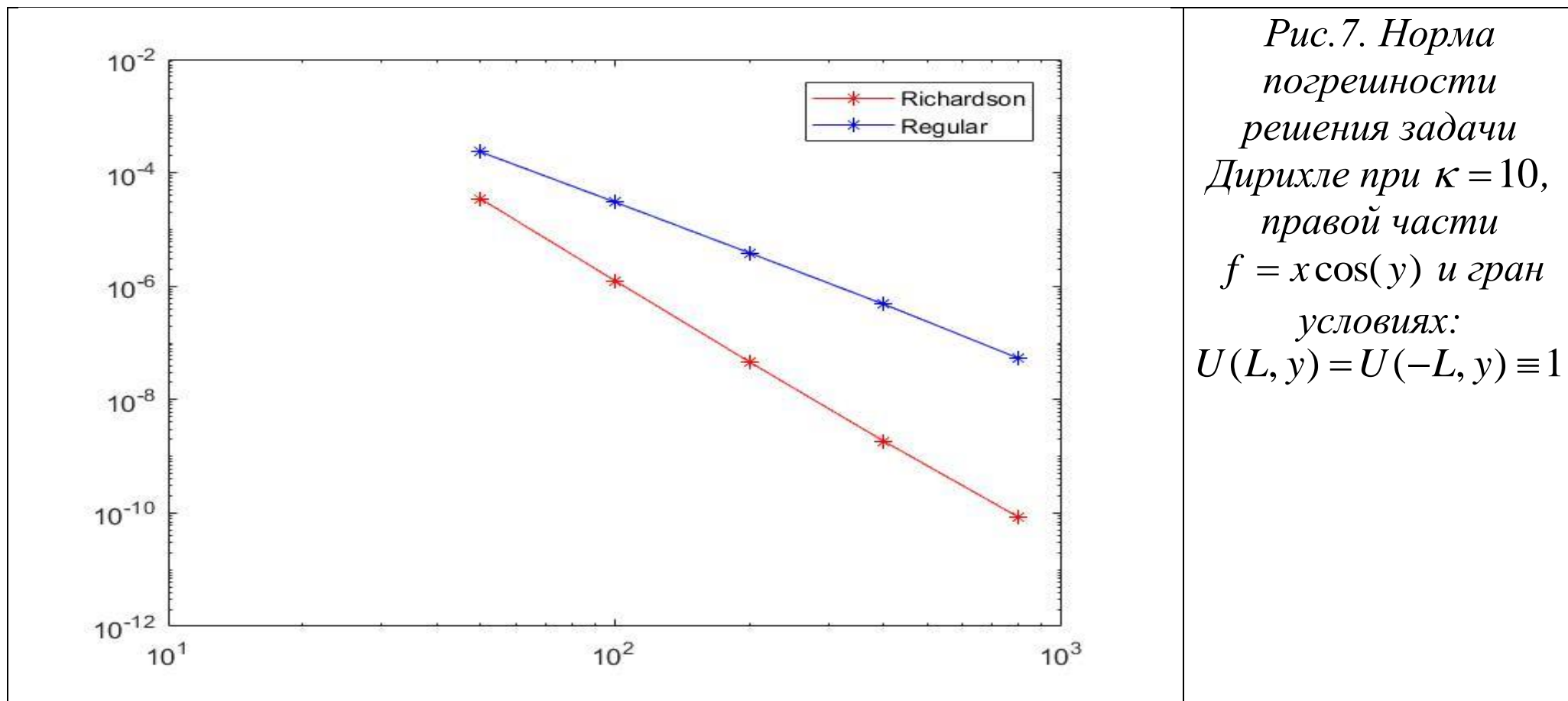
$$u_{2h}(\vec{x}) = u(\vec{x}) + C(\vec{x})2^\nu h^\nu + o(h^\nu) \quad (6)$$

Из (5-6) получаем $C(\vec{x}) = \frac{u_h(\vec{x}) - u_{2h}(\vec{x})}{1 - 2^\nu}$, $u(\vec{x}) = u_{2h}(\vec{x}) - C(\vec{x})(2h)^\nu + o(h^\nu)$.

Естественно, сравнивать значения $u_{2h}(\vec{x})$ и $u_h(\vec{x})$ можно только на крупной сетке с шагом $2h$.

Порядок компактной схемы примерно равен 3, поэтому в экспериментах брали $\nu = 3$.

Сравнение нормы погрешности решения с экстраполяцией Ричардсона и без



Экстраполяция Ричардсона в эксперименте увеличила порядок точности схемы с 3 до 4.5.

Решение уравнения Гельмгольца.

Компактная аппроксимация уравнения Гельмгольца (2) сводится к аппроксимации уравнения Пуассона заменой: $g = f - \rho(x, y)u$. Составим глобальную систему для u и g :

$Au = Pg \Leftrightarrow (A + P\rho)u = Pf \Leftrightarrow Bu = Pf$, здесь матрица $B = A + P\rho$, ρ -диагональная матрица со значениями коэффициента в диффуре (2) для соответствующей точки сетки.

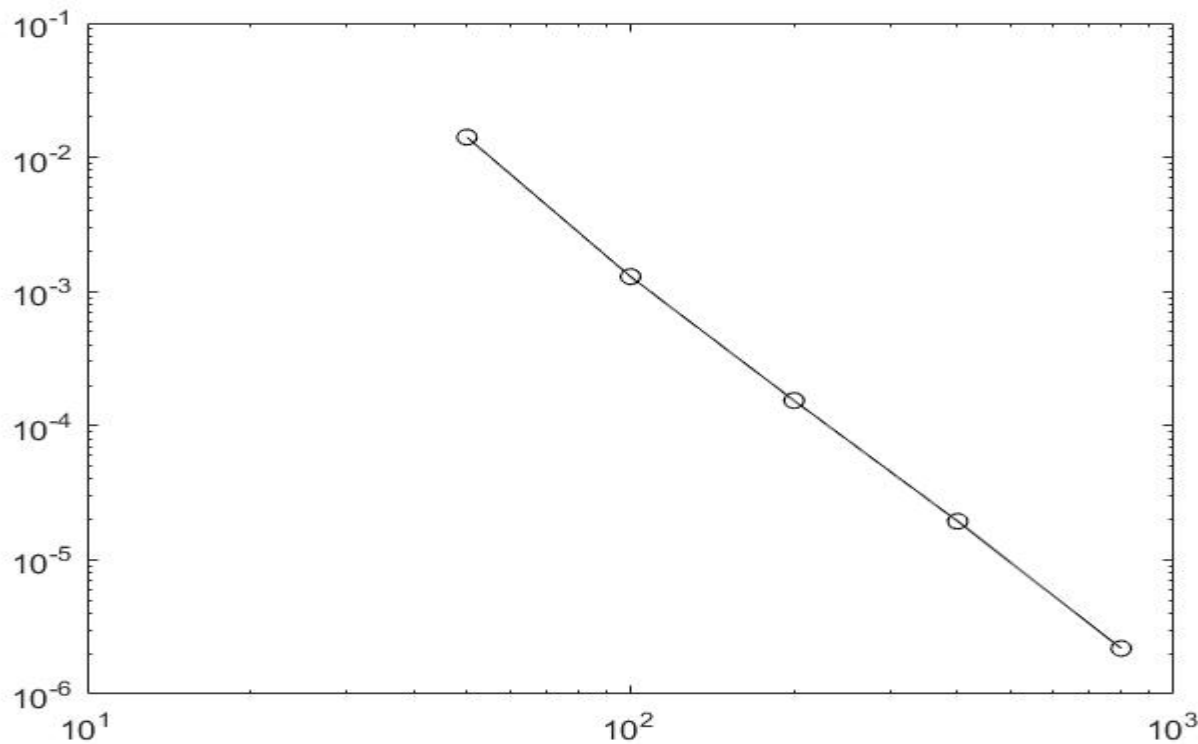


Рис.8. График погрешности схемы для уравнения Гельмгольца.

$\kappa = 10$,

$f = \cos(y)$,

граничные условия:

$U(L_x, y) = U(-L_x, y) \equiv 1$.

Коэффициент

$$\rho(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{y(y-2\pi)}\right)$$

положителен

Для случая мнимого коэффициента ρ также получаем 3-й порядок точности:

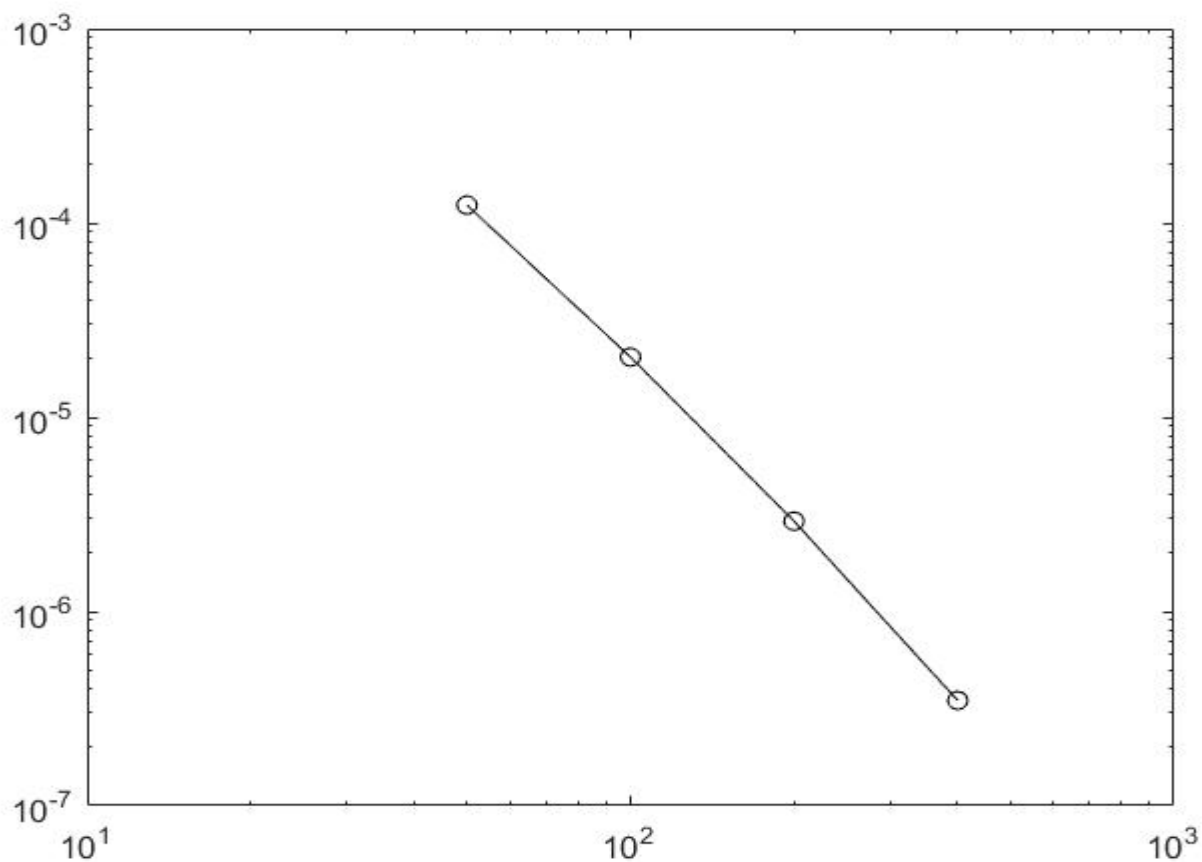


Рис.9. Норма погрешности схемы для уравнения Гельмгольца. $\kappa = 10$,
 $f = \cos(y)$,
граничные условия:
 $U(L, y) = U(-L, y) \equiv 1$.
Коэффициент постоянный:
 $\rho(x, y) = i + 10$.

Обобщенные собственные функции задачи при условиях Дирихле.

Обобщенными собственными функциями (ОСФ) краевой задачи для оператора (1) назовем функции u , такие что

$$-\operatorname{div} \mathcal{G}(x, y) \operatorname{grad}(u) = \lambda \mathcal{G}(x, y) u,$$

u – периодическая по y , удовлетворяющая стыковочным условиям (3) и граничным однородным условиям Дирихле ($u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0$). Из периодичности u получаем

$$u(x, y) = \exp(imy) Y_{\mu}(x),$$

где Y_{μ} – решение уравнения: $-d_x \mathcal{G}(x) d_x Y_{\mu}(x) = \mu^2 \mathcal{G}(x) Y_{\mu}(x)$. Решая это уравнение слева и справа от Γ , получаем общий вид ОСФ: $Y_{\pm} = a_{\pm} \sin \mu x + b_{\pm} \cos \mu x$.

Из стыковочных условий (3) выражаем $b_{+} = b_{-}, a_{+} = \frac{\mathcal{G}_{-}}{\mathcal{G}_{+}} a_{-}$.

Осталось определить значения μ из условий Дирихле на внешних границах:

$$\frac{\mathcal{G}_{-}}{\mathcal{G}_{+}} \cos(\pi\mu) \sin(\pi\mu) + \sin(\pi\mu) \cos(\pi\mu) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) решаем методом Ньютона, определяются численные значения μ , а затем значения a_{-}, b_{-} , по которым строятся обобщенные собственные функции.

Оценка точности схемы на обобщенных собственных функциях.

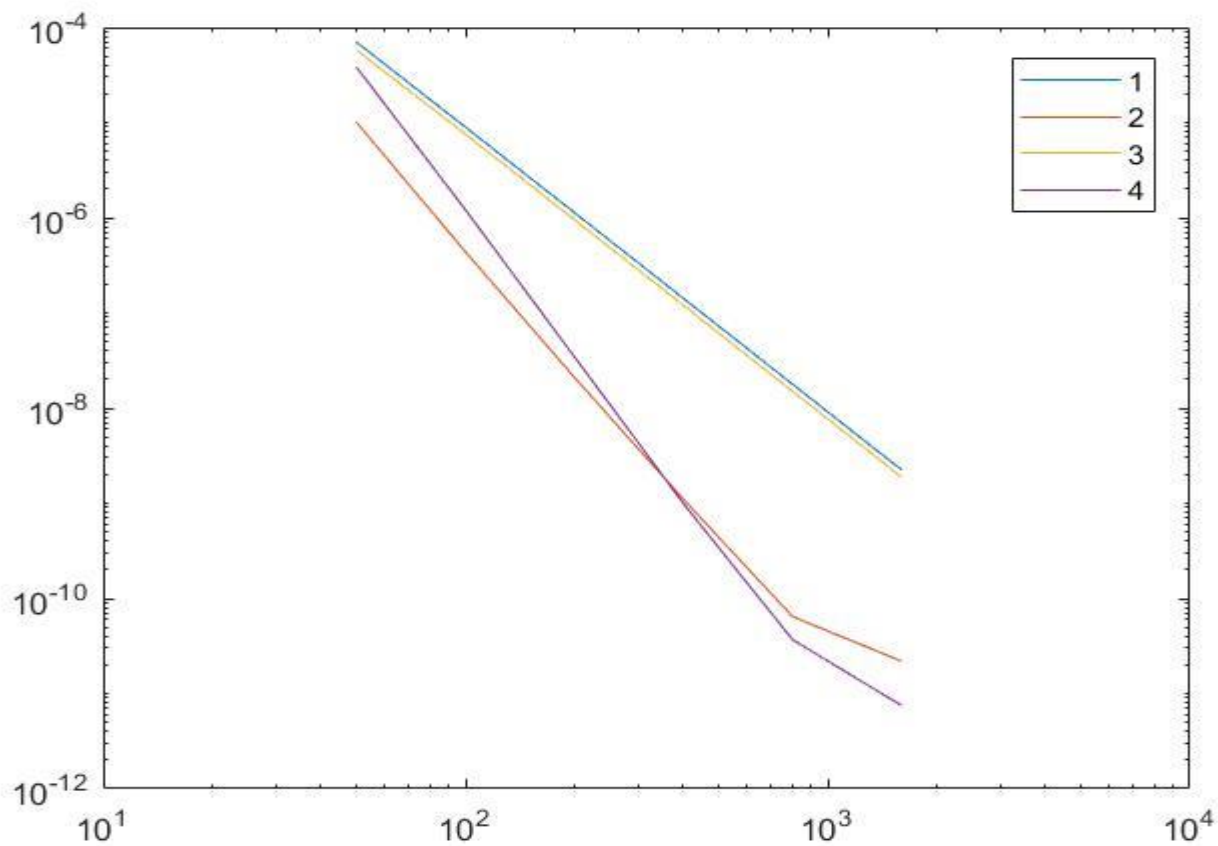


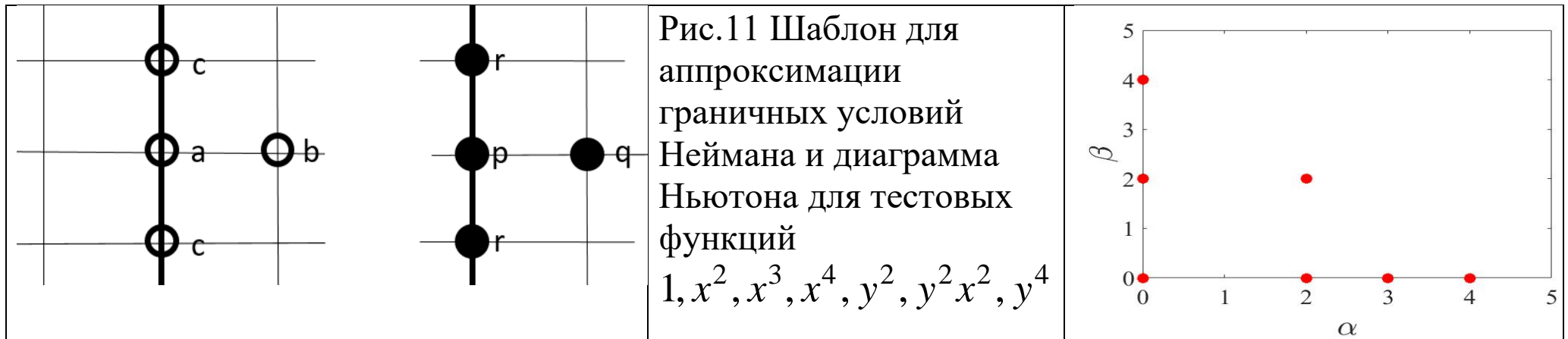
Рис. 10. Графики погрешности на первых 4-х обобщенных собственных функциях для однородной задачи Дирихле при правой части $f = \cos(y)$, $\kappa = 10$.

Другие внешние грани условия

Решаем дифференциальное уравнение (1). На левой внешней границе оставим условие Дирихле, на правой – поставим однородное условие Неймана:

$$\partial_x u(L, y) = 0. \quad (8)$$

Аппроксимация условия Неймана на шаблоне Рис. 11 и набора тестовых мономов, удовлетворяющих условиям 8.



Численные значения коэффициентов: $a = 1, c = -0.25, b = -0.5, p = -10, r = 5.0833, q = 0.08333$.

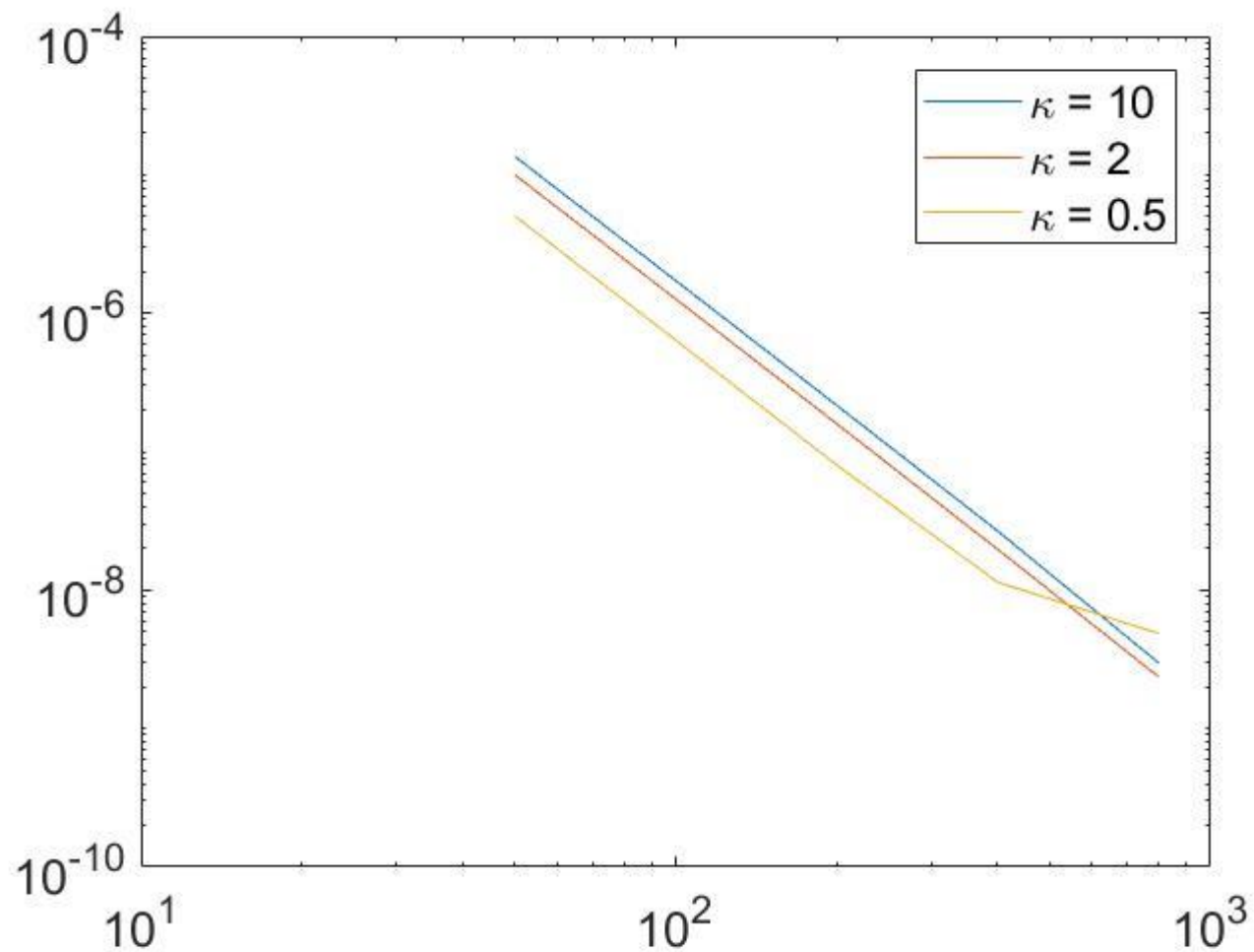


Рис. 12. Графики решения смешанной задачи для разных значений κ . Правая часть $f \equiv 1$. Граничные условия: $U(-L, y) = \sin(y)$.

Классическая дивергентная схема (для сравнения с компактной)

Идея дивергентной схемы состоит в замене частных производных разностными:

$$(u_x')_{i-1/2,j} = \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{h}, \quad (u_y')_{i,j-1/2} = \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{h}.$$

Получаем аппроксимацию для оператора Лапласа:

$$L[u]_{ij} = \frac{u_{ij-1} + u_{ij+1} + u_{i-1j} + u_{i+1j} - 4u_{ij}}{h^2}$$

В точках **I** и **II** аппроксимируется уравнение (1): $\mathcal{G}L[u]_{ij} = f_{ij}$.

В точках типа **III** аппроксимируем условия стыковки (3). Здесь рассмотрено два способа аппроксимации стыковки:

1) Аппроксимировать линейно с каждой стороны: $\mathcal{G}_- \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h} - \mathcal{G}_+ \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h} = 0$.

2) Аппроксимировать решение двумя парабололами слева и справа от линии Γ и записать условие стыковки (3). Получаем уравнение:

$$\mathcal{G}_- u_{i-2j} - 4\mathcal{G}_- u_{i-1j} + 3(\mathcal{G}_- + \mathcal{G}_+) - 4\mathcal{G}_+ + \mathcal{G}_+ = 0. \quad (9)$$

Численные эксперименты для 1)

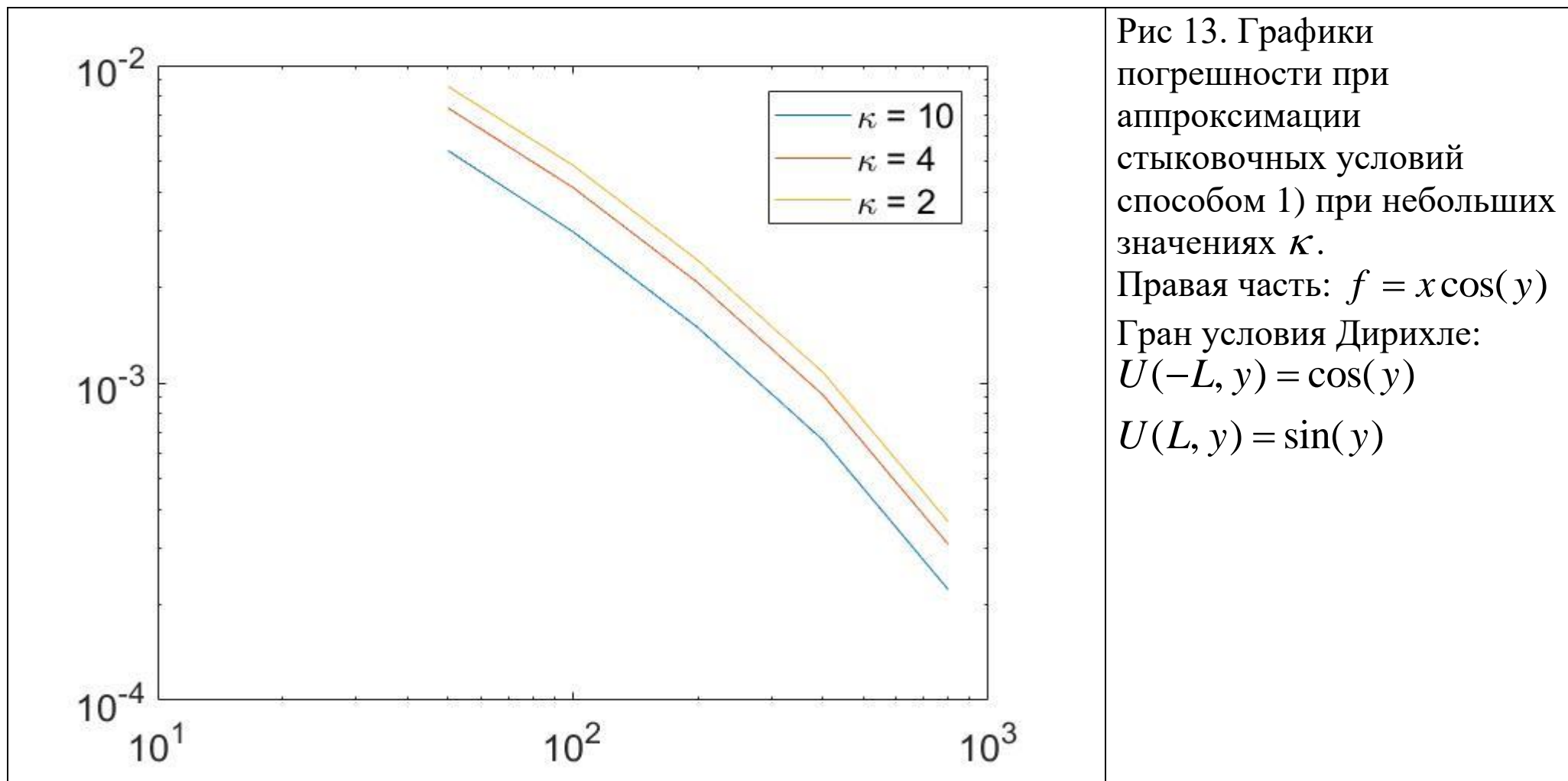


Рис 13. Графики погрешности при аппроксимации стыковочных условий способом 1) при небольших значениях κ .

Правая часть: $f = x \cos(y)$

Гран условия Дирихле:

$$U(-L, y) = \cos(y)$$

$$U(L, y) = \sin(y)$$

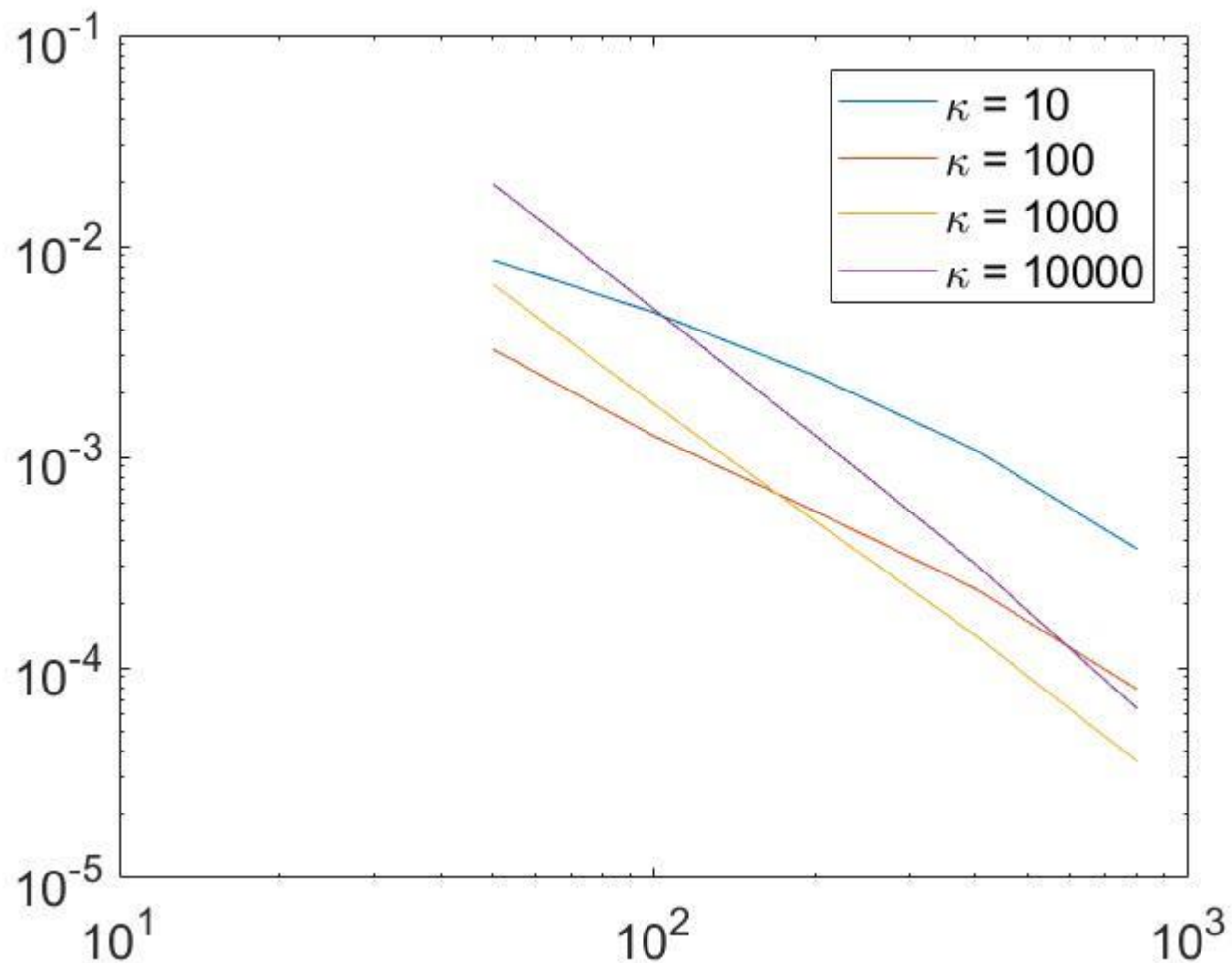


Рис 14. Графики погрешности при аппроксимации стыковочных условий способом 1) при больших значениях κ .
 Правая часть: $f = x \cos(y)$
 Граничные условия:
 $U(-L, y) = \cos(y)$
 $U(L, y) = \sin(y)$

Численные эксперименты для способа 2).

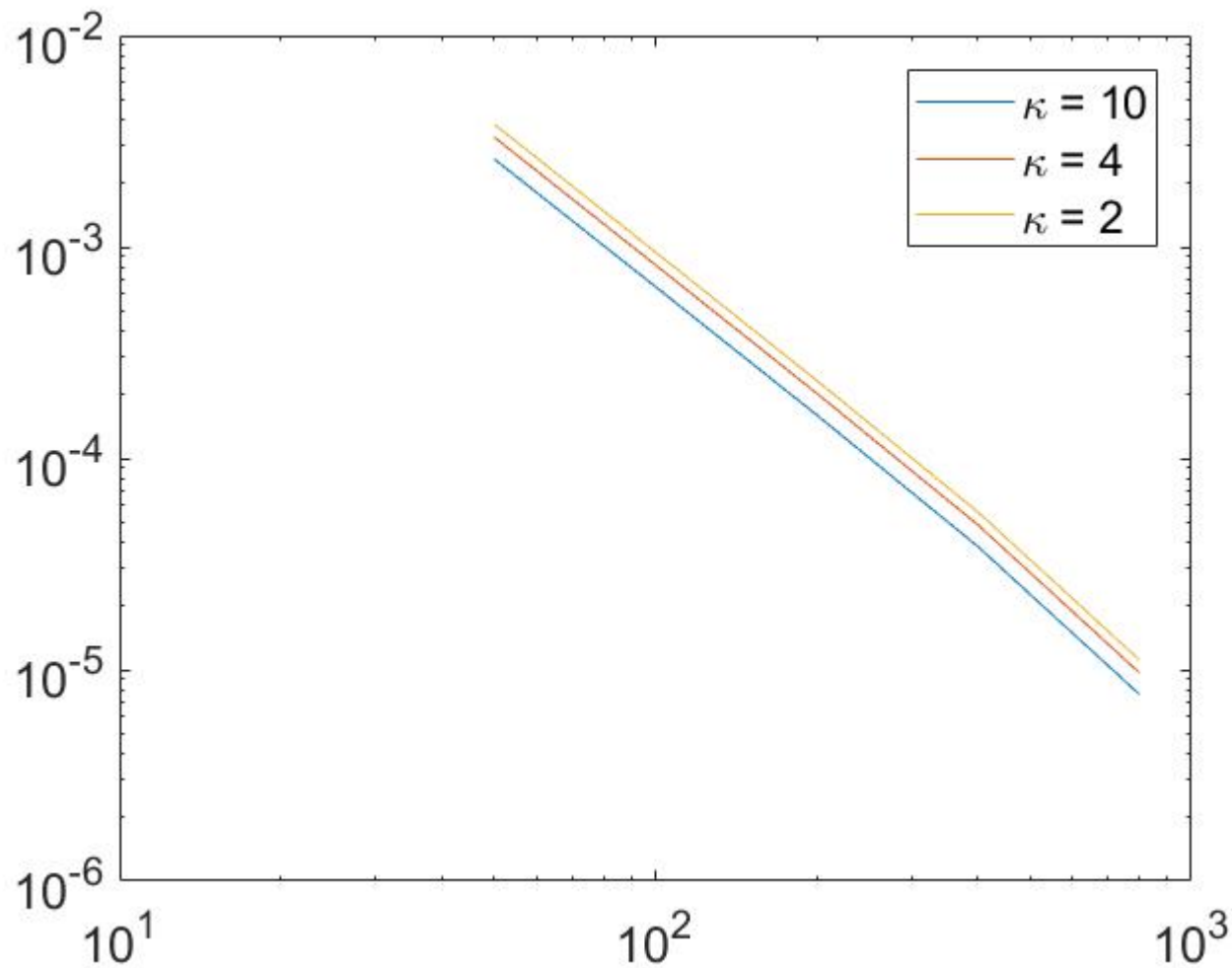


Рис 15. Графики погрешности при аппроксимации стыковочных условий способом 2).

Правая часть:

$$f = x \cos(y)$$

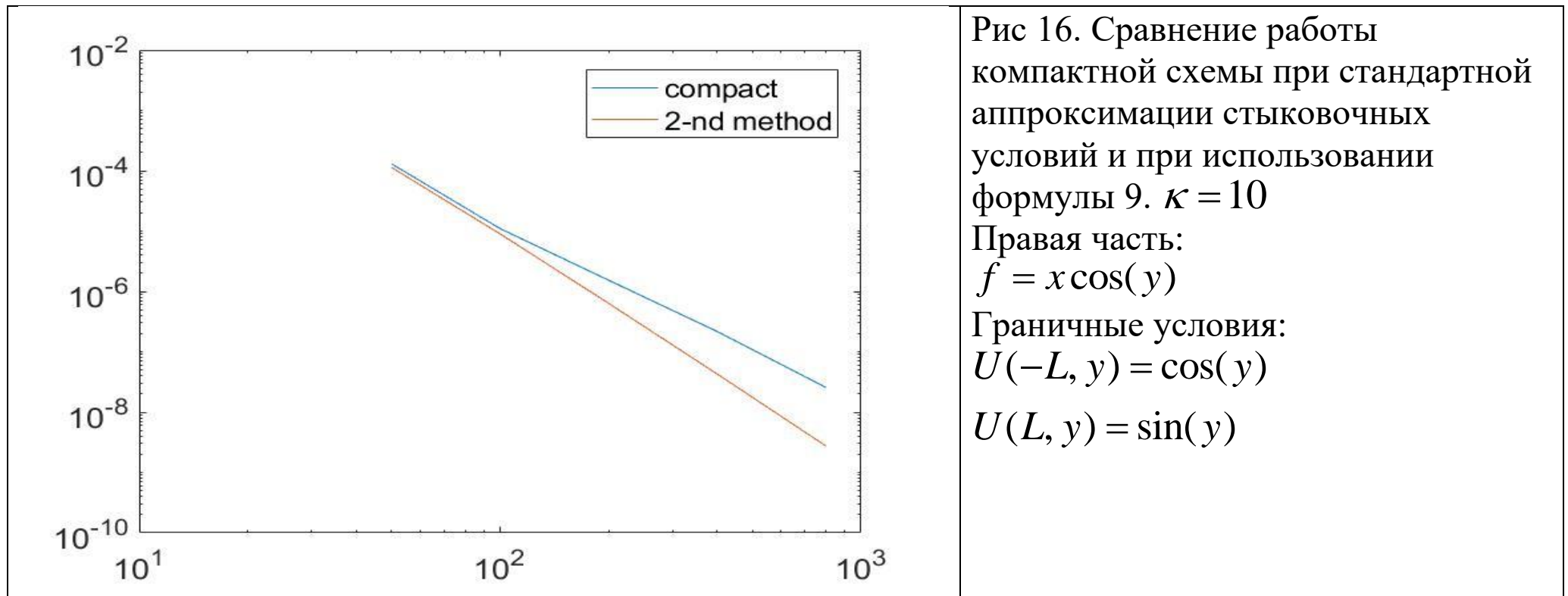
Граничные условия:

$$U(-L, y) = \cos(y)$$

$$U(L, y) = \sin(y)$$

Увеличение порядка компактной схемы.

Как видно с Рис. 13 – 15, аппроксимация граничных условий вторым способом, в сравнении с первым, увеличивает порядок схемы с 1,5 до 2. Для компактной схемы замена компактной аппроксимации в точках типа В на аппроксимацию по формуле 9 также позволила повысить порядок с 3 до 3,5.



Из Рис. 16 видно, что использование формулы (9) позволяет сильно повысить порядок при небольшом κ . При больших κ (Рис.17) это различие становится менее существенным.

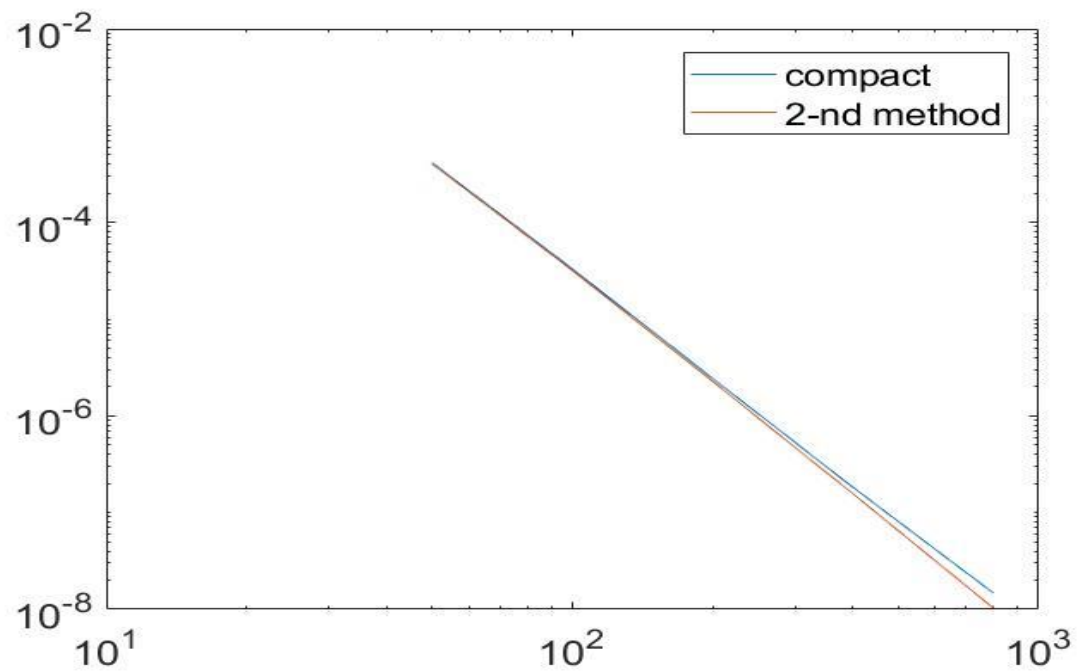


Рис 17. Сравнение компактной схемы при стандартной аппроксимации стыковочных условий и при использовании формулы 9. $\kappa = 100$

Правая часть:

$$f = x \cos(y)$$

Граничные условия:

$$U(-L, y) = \cos(y)$$

$$U(L, y) = \sin(y)$$

Получение аппроксимации 4-го порядка.

В предыдущих подходах к компактным схемам считалось, что правая часть не определена на Γ , поэтому в шаблонах для f точки на линии Γ не учитывались. Если предположить существование левого и правого предела правой части (f_+, f_-) , то можно добавить в шаблон пары точек на линии Γ , в которых значения правой части определяются через пределы (f_+, f_-) . Такой подход позволяет существенно повысить порядок схемы с 3-го до 4-го.

Точки типа II.

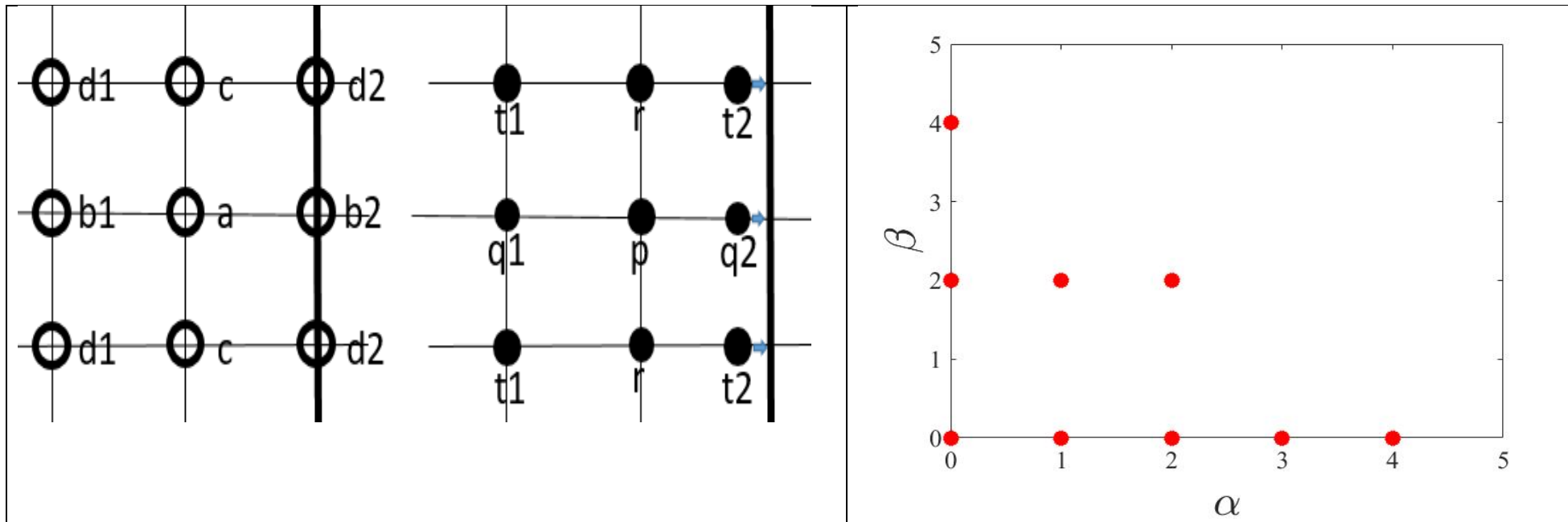


Рис. 18. В левой части представлены шаблоны, в правой – диаграмма Ньютона для тестовых функций $x^\alpha y^\beta$

Точки типа III, симметрия как и для II

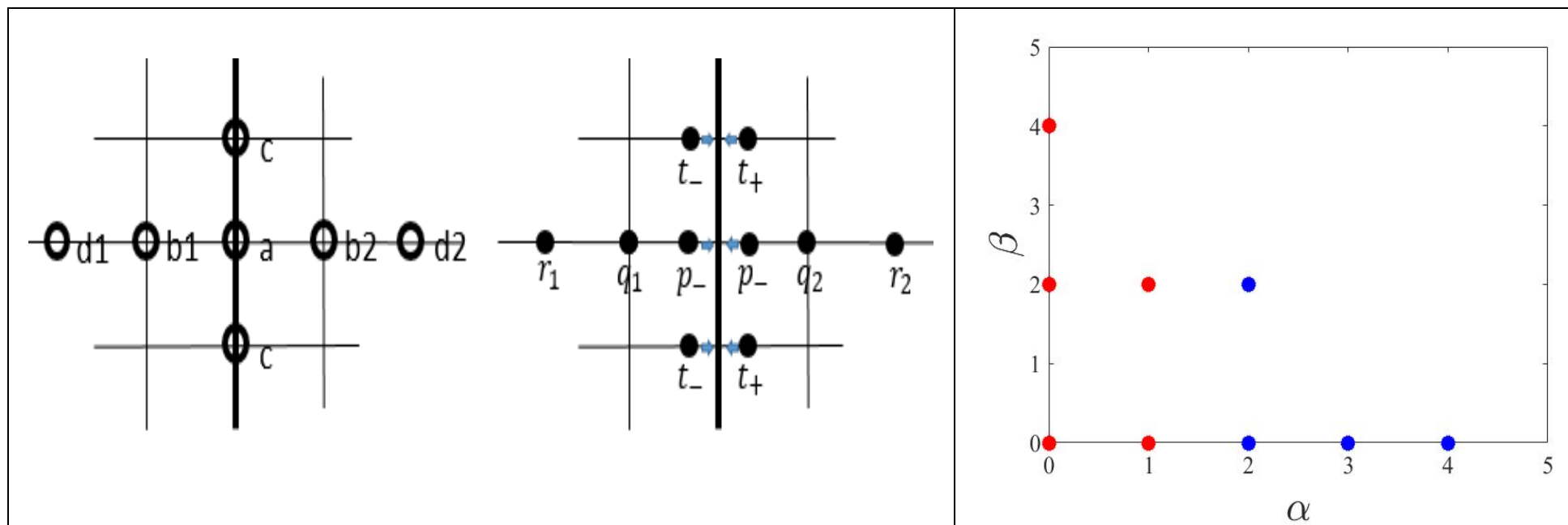


Рис.19. Шаблон и диаграмма Ньютона для точек типа III. Синие точки на диаграмме Ньютона обозначают пару тестовых функций (с сигнумом и без).

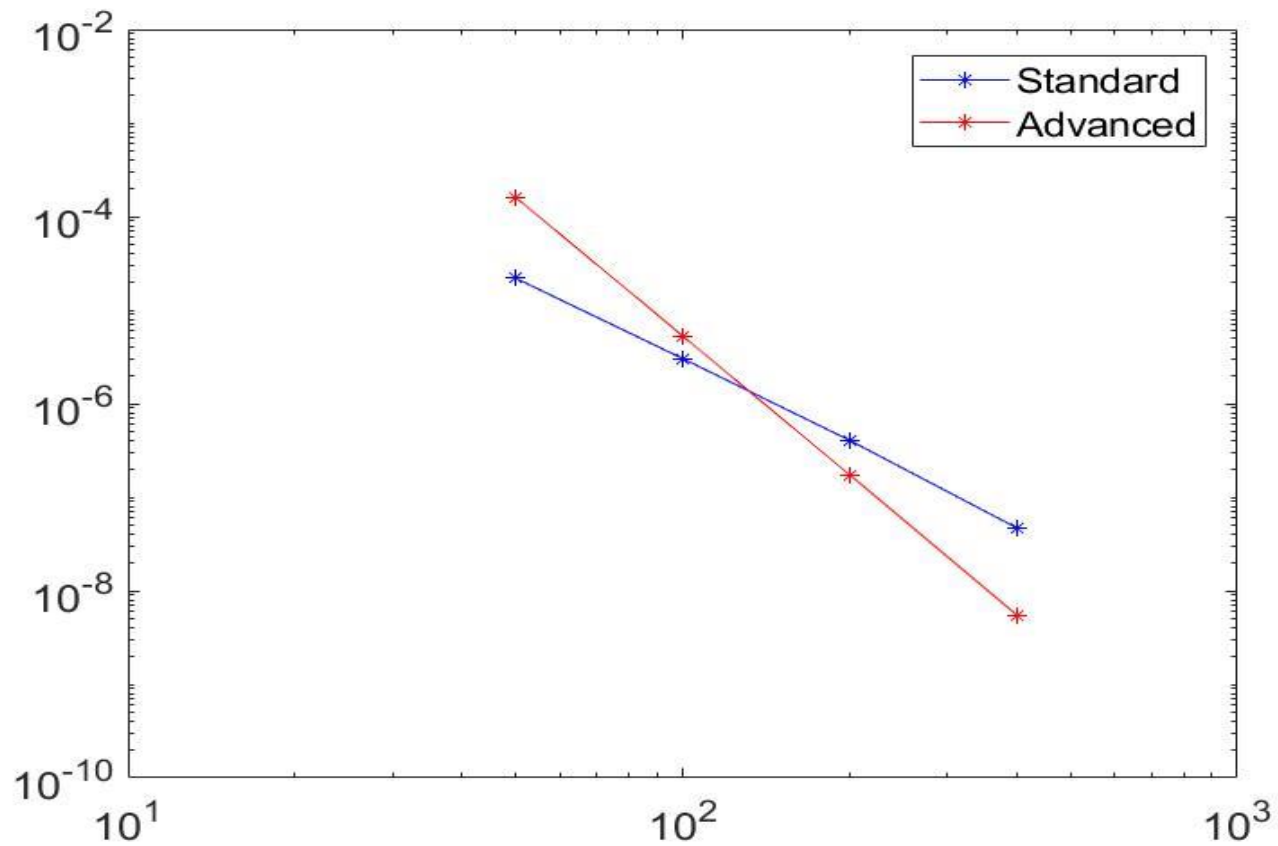


Рис 20. Сравнение стандартной компактной схемы и схемы, учитывающей пределы правой части. $\kappa = 100$

Правая часть:
 $f = x \cos(y)$

Граничные условия:
 $U(-L, y) = \cos(y)$
 $U(L, y) = \sin(y)$

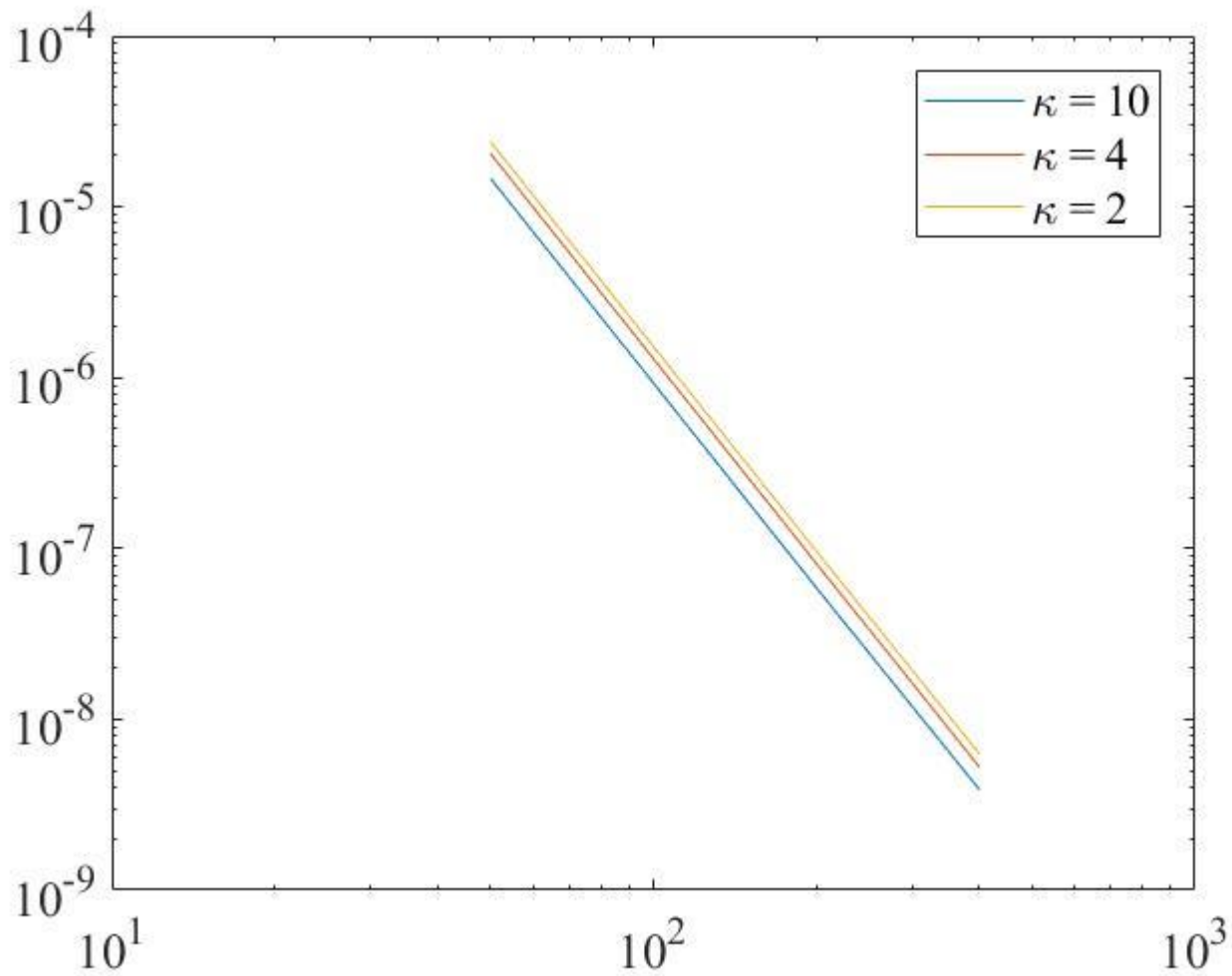


Рис 21. Графики погрешности схемы 4-го порядка при разрывной правой части при разных κ . Правая часть:

$$f = \begin{cases} (x + \pi)^2 & x \leq 0 \\ (x + \pi)^3 & x > 0 \end{cases}$$

Граничные условия:

$$U(-L, y) = \cos(y)$$

$$U(L, y) = \sin(y)$$

1. Гордин В. А., Цымбалов Е. А. Компактная разностная схема для дифференциального уравнения с кусочно-постоянным коэффициентом. Математическое моделирование. 2017, т.29, № 2 , с.16-28.
2. А.А.Самарский. Теория разностных схем. М., «Наука», 1977.

Доклад подготовлен в результате проведения исследования в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета „Высшая школа экономики“ (НИУ ВШЭ)» в (грант № 20-04-021) и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».