

Двумерная краевая задача для эллиптического уравнения 2-го порядка с разрывным коэффициентом.

Гордин В.А. Шадрин Д.А.

НИУ ВШЭ & Гидрометцентр РФ, Москва, vagordin@mail.ru, shadrin.dmitry2010@yandex.ru

Многие стационарные явления (диффузии, теплопроводности, волновые) описываются эллиптическими уравнениями Пуассона или Гельмгольца:

$$-\operatorname{div}(\vartheta(\vec{x}) \operatorname{grad}(u)) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G, \quad (1)$$

$$-\operatorname{div}(\vartheta(\vec{x}) \operatorname{grad}(u)) + \rho(\vec{x})u = f(\vec{x}). \quad (2)$$

В некоторых задачах среда неоднородна, причем ее свойства (описываемые коэффициентом $\vartheta(\vec{x})$) меняются скачком.

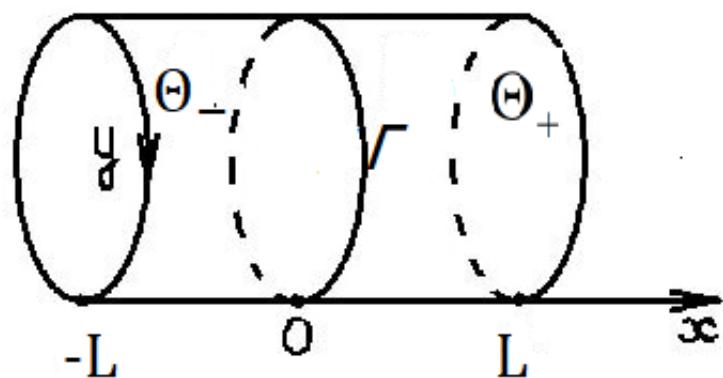


Рис. 1. модельный пример: область G – поверхность цилиндра, линия Γ – его центральная окружность при $x=0$, ϑ - кусочно-постоянная функция: в левой половине цилиндра ϑ_- , в правой ϑ_+ .
 $x \in [-L, L], y \in [0, 2\pi)$

На внешней границе цилиндра – гран. условия Дирихле, на линии Γ – стыковки (Кирхгофа):

$$[u] = 0, \quad (3a)$$

$$[\mathcal{D}_n u] = 0. \quad (3b)$$

Здесь $[]$ - амплитуда скачка на линии Γ , $\partial_n u$ - производная по нормали к линии Γ .

Компактная аппроксимация: Цилиндр разбивается равномерной сеткой с N точками на окружности и $N+1$ точкой на образующей. Для каждой точки двумерной сетки $\langle x_i, y_i \rangle$ определяется пара шаблонов: для u и f . Ищем коэффициенты разностных операторов A_i и P_i на этих шаблонах. A_i и P_i должны быть точны на наборе тестовых функций: (u_k, f_k) , где $k=1, \dots, M$, $f_k = L[u_k]$, u_k – мономы, L - дифференциальный оператор из левой части уравнения (1), т.е. $\forall k A_i u_k = P_i f_k$.

Коэффициенты A_i и P_i находим из СЛАУ порядка $M+1$. Из коэффициентов A_i и P_i составляем i -ые строки “глобальной” СЛАУ $\mathbf{A}\vec{U} = \mathbf{P}\vec{F}$ для решения $u(\vec{x})$ в точках двумерной сетки $N \times (N-1)$. Операторы A_i и P_i , имеют ненулевые коэффициенты только на M точках шаблона. В остальных элементах строки “глобальной” СЛАУ нули. Поскольку $M \ll N$, матрицы СЛАУ разреженные.

Точки сетки разделим на 4 типа:

Точки типа I – находятся далеко и от внешней границы, и от линии раздела сред.

Точки типа II – находятся рядом с линией Γ .

Точки типа III – находятся на линии Γ .

Точки типа IV – на внешней границе G . В них аппроксимируем граничные условия.

Точки типа I.

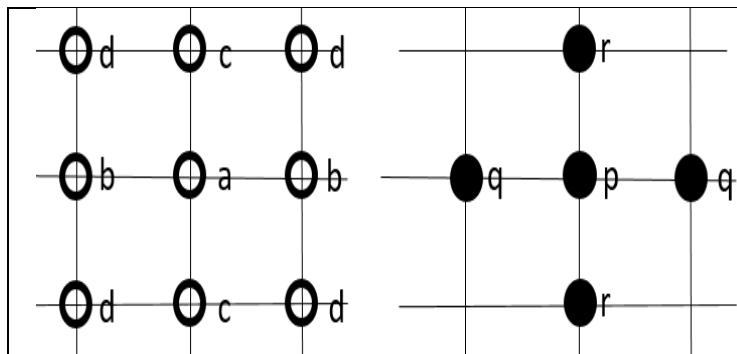
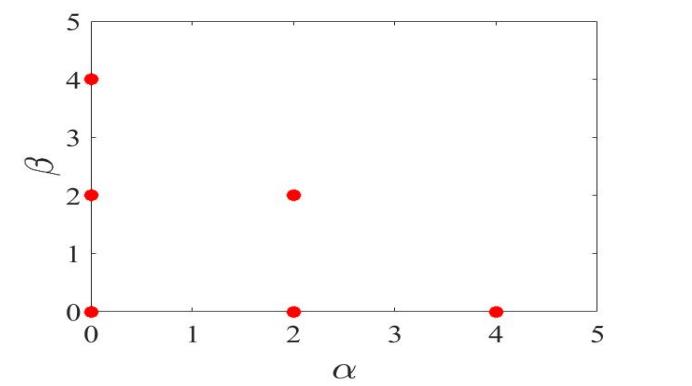


Рис. 2. В левой части представлены шаблоны, в правой – диаграмма Ньютона для тестовых функций $x^\alpha y^\beta$



Вдали от границы сред решение эллиптического уравнения u – аналитическая функция, поэтому в качестве тестовых использованы мономы: $x^\alpha y^\beta$.

Шаблоны симметричны относительно вертикали и горизонтали, поэтому мономы имеют только четные степени.

Решение малой СЛАУ - коэффициенты: $a = 1, b = c = -0.2, d = -0.05, p = 0.2, q = 0.025$.

Точки типа II.

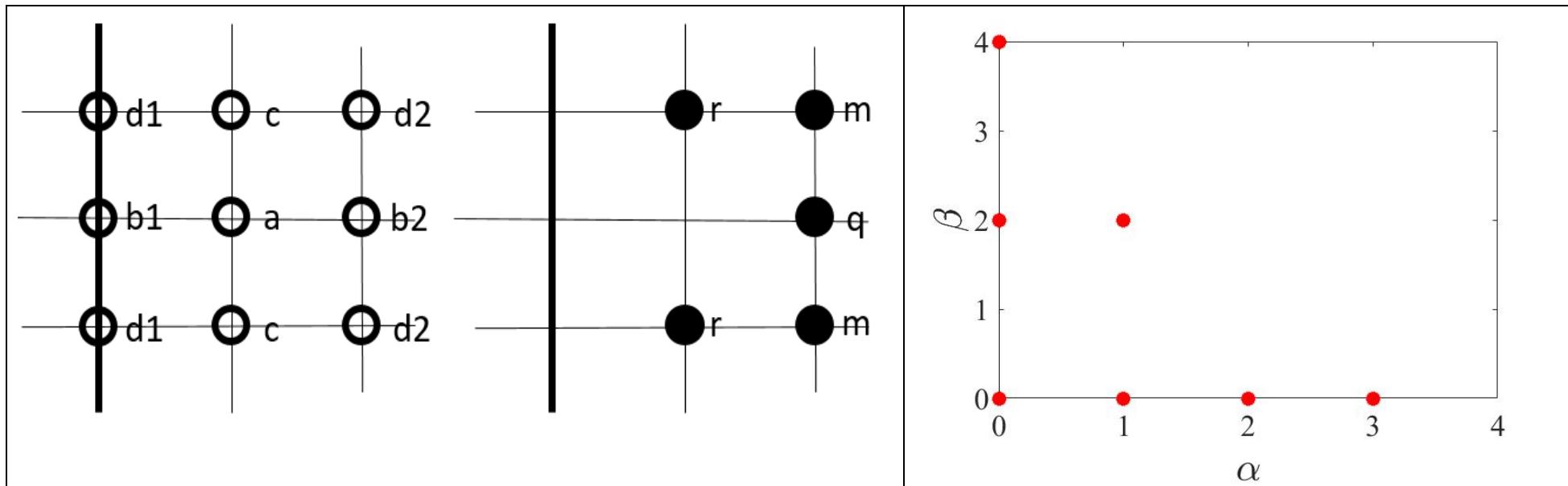


Рис. 3. В левой части шаблон для точек типа II ;(жирная линия - Γ), в правой – диаграмма Ньютона для тестовых функций $x^\alpha y^\beta$, разложение Тейлора справа от Γ .

Шаблоны симметричны только относительно горизонтали, поэтому у тестовых мономов при y стоят четные степени, а при x – все.

Решение малой СЛАУ – численные значения коэффициентов:
 $a = 44, b_1 = b_2 = -10, c = -10, d_1 = d_2 = -1, r = 6, m = -5, q = 10.$

Точки типа III, симметрия как и для II

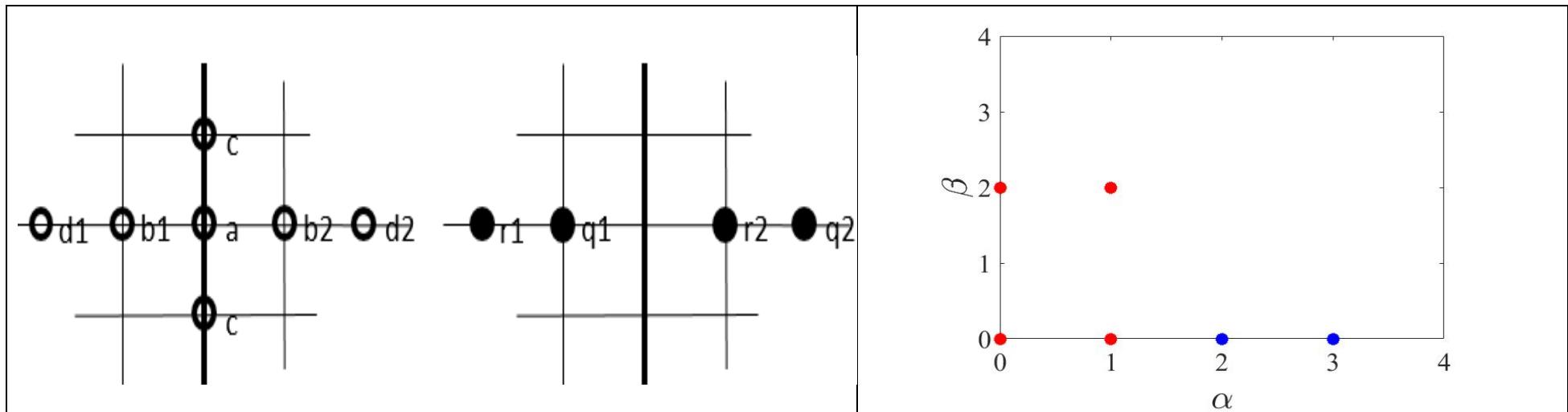


Рис.4. Шаблон и диаграмма Ньютона для точек типа III. Синие точки на диаграмме Ньютона обозначают пару тестовых функций (с сигнумом и без).

Правая часть уравнения может быть не определена на линии Γ , и ее точки не входят в шаблон для правой части f . Тестовые функции: $1, \frac{x}{g}, x^2, sign(x)x^2, x^3, sign(x)x^3, y^2, \frac{y^2x}{g}$.

Решение малой СЛАУ - численные значения коэффициентов:

$$a = 1, c = -0.4, b_1 = 0, b_2 = 0, d_1 = \frac{-18}{99}, d_2 = \frac{-18}{990}, r_1 = \frac{12}{990}, r_2 = \frac{12}{990}, q_1 = \frac{48}{990}, q_2 = \frac{12}{990}.$$

Для точек типа IV – обычное условие Дирихле

Составление матриц “глобальной” СЛАУ

После определения коэффициентов разностных операторов для каждой точки составляются глобальные матрицы \mathbf{A} и \mathbf{P} , в i -й строке которых стоят коэффициенты разностных операторов A_i и P_i . Коэффициенты \mathbf{A} и \mathbf{P} для j -й точки шаблона обозначим a_{ij} и p_{ij} . После добавления уравнений, аппроксимирующих граничные условия Дирихле, получаем глобальную СЛАУ на значения функции U в точках сетки: $\mathbf{A}\vec{U} = \mathbf{P}\vec{F}$. Здесь \vec{F} – значения правой части f в точках сетки.

При решении этой системы, матрица \mathbf{A} обращаем, - необходимо обеспечить её хорошую обусловленность. Оператор A_i точен на константе, поэтому $\sum_j a_{ij} = 0$. Если

$a_{ii} > 0$, а остальные веса отрицательные, то имеем:

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| = a_{ii}. \quad (4)$$

Нуль лежит на краю кругов Гершгорина, содержащих спектр матрицы \mathbf{A} . В уравнениях СЛАУ, отвечающих граничным точкам цилиндра, диагональ доминирует. Поэтому есть основания полагать, что нуль не войдет в спектр \mathbf{A} , и ее можно будет обратить.

Тесты, подтверждающие порядок схемы.

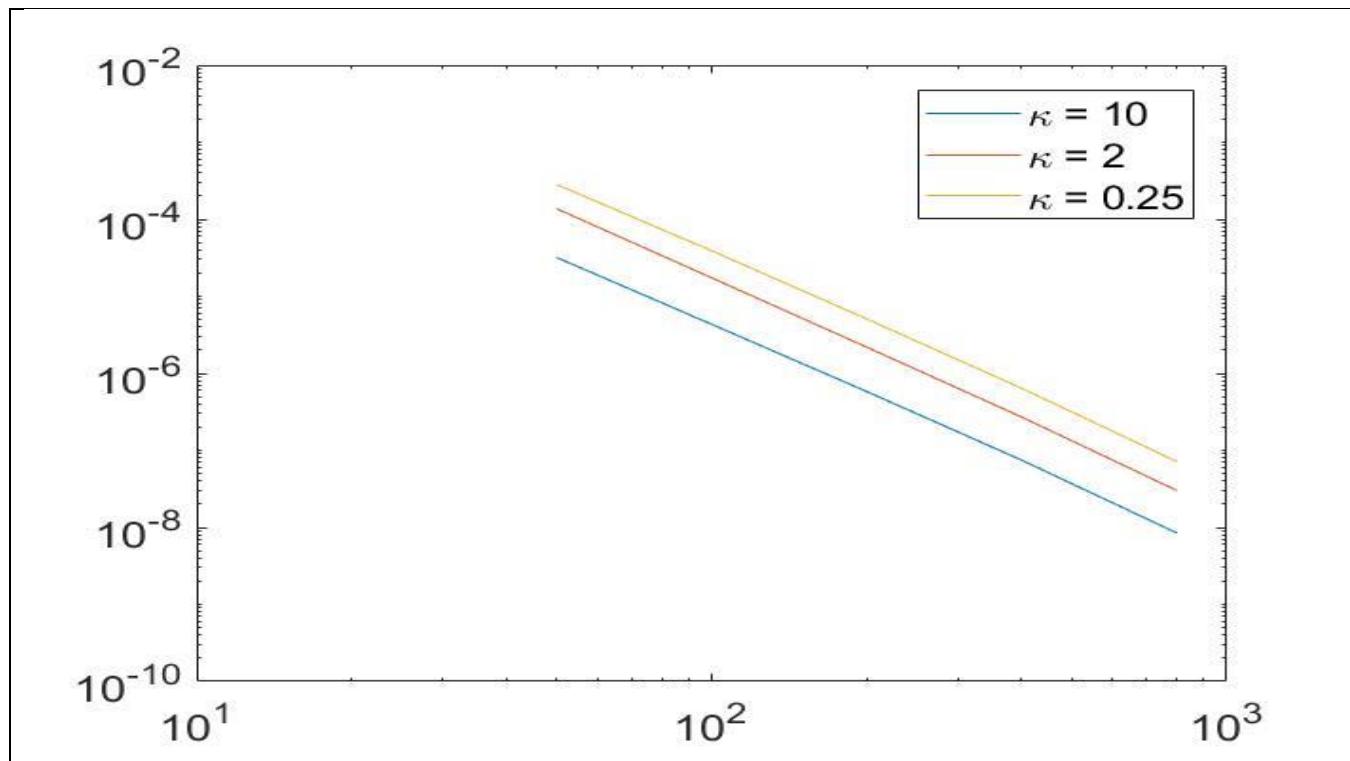


Рис.5.2. Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в lg -системе при разных значениях $\kappa = \frac{g_-}{g_+}$. Правая часть $f = x \cos(y)$. Границные условия Дирихле: $U(-L, y) = \sin(y)$, $U(L, y) = \cos(y)$.

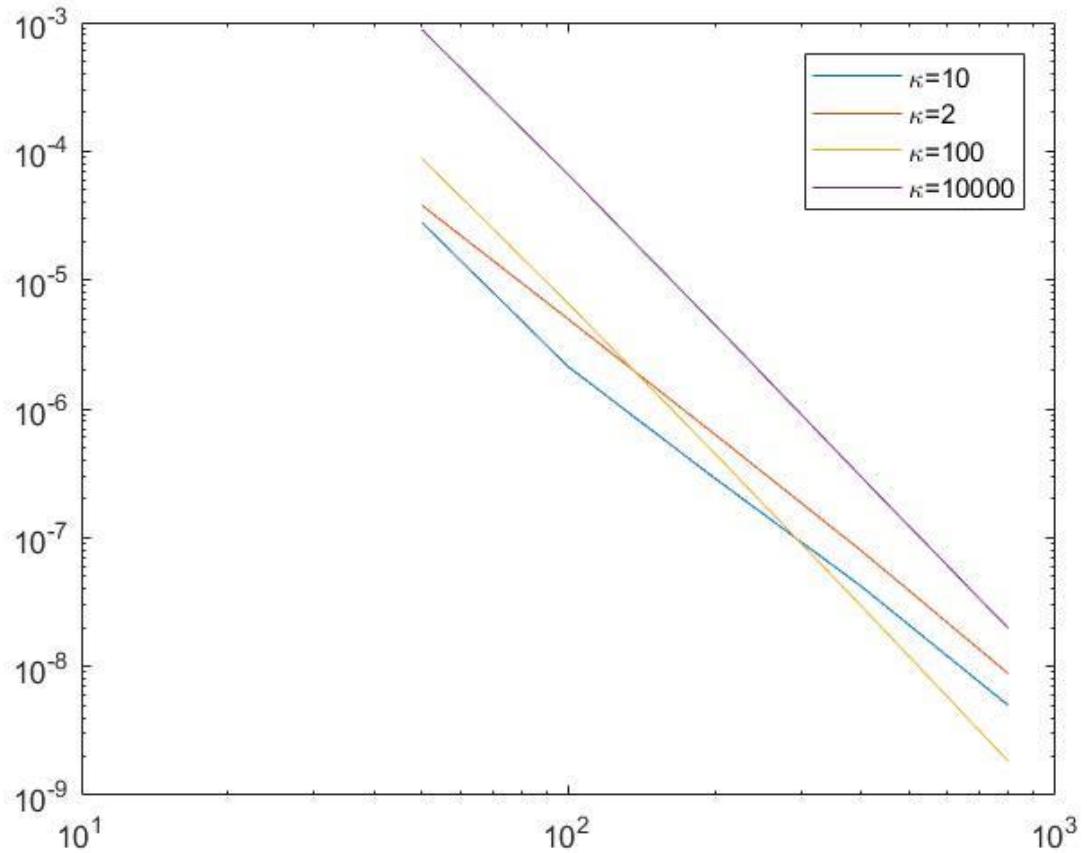


Рис.5.1. Погрешность схемы в зависимости от разрешения N в lg -системе при больших значениях $\kappa = \frac{\mathcal{G}_-}{\mathcal{G}_+}$. Правая часть $f = \cos(y)$.
Границные условия Дирихле:
 $U(-L, y) = \sin(y)$,
 $U(L, y) = \cos(y)$.

Пример решения задачи Дирихле.

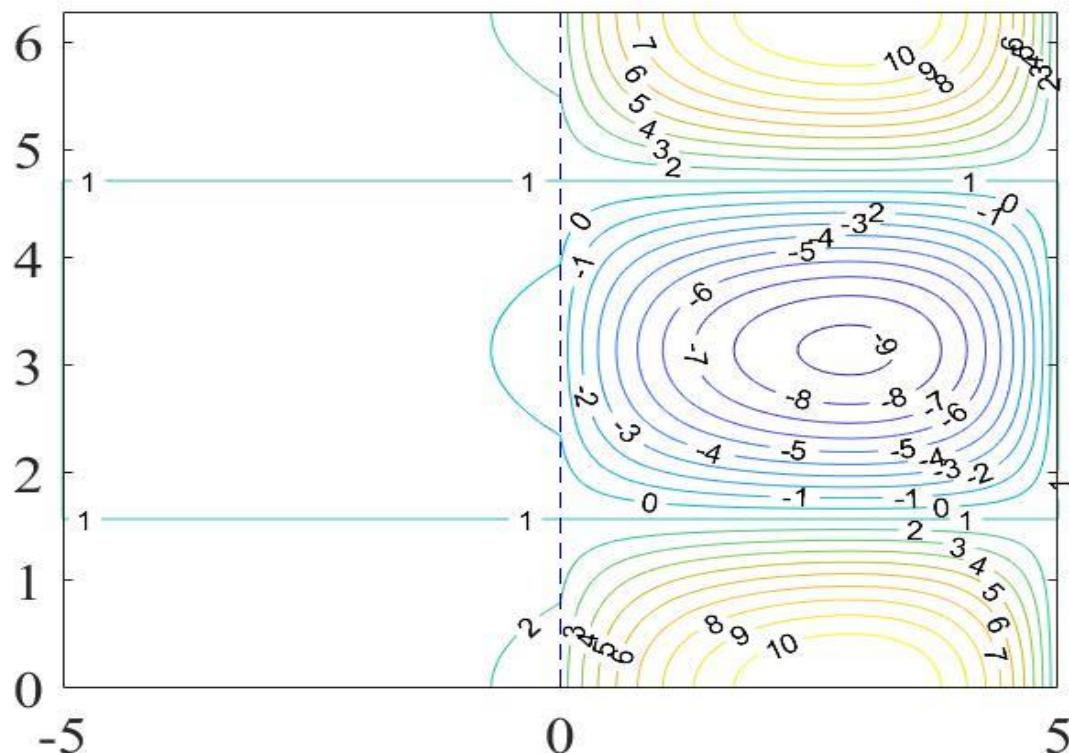


Рис.6. Изолинии решения задачи при $\kappa = 10$, правой части $f = \cos(y)$ и граничных условиях:
 $U(L, y) = U(-L, y) \equiv 1$

Невозможность обеспечить условие (4) для аппроксимации 4-го порядка.

В точках сетки типа B порядок 4. Для точек типа B для обеспечения 4-го порядка необходимо добиться точности разностных операторов на наборе тестовых функций:

$$1, \frac{x}{9}, x^2, sign(x)x^2, x^3, sign(x)x^3, x^4, sign(x)x^4, y^2, \frac{y^2x}{9}, y^2x^2, sign(x)y^2x^2, y^4.$$

Для гарантии хорошей обусловленности матрицы A должно выполняться условие (4). Выберем шаблоны для решения и правой части, квадрат $2k$ на $2k$ с достаточно большим k . Если существует шаблон удовлетворяющий условию (4) и имеющий диаметр меньше $2k$, то оно будет вкладываться в большой шаблон. При данном наборе тестовых функций не было обнаружено коэффициентов большого шаблона, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| = a_{ii} \quad (4),$$

следовательно, их нет и для меньших шаблонов.

Экстраполяция Ричардсона для повышения порядка схемы

Пусть некий алгоритм, зависящий от шага сетки $h \sim \frac{1}{N}$, имеет порядок точности ν ,

т.е. имеет место разложение:

$$u_h(\vec{x}) = u(\vec{x}) + C(\vec{x})h^\nu + o(h^\nu) \quad (5)$$

При шаге $2h$ получаем:

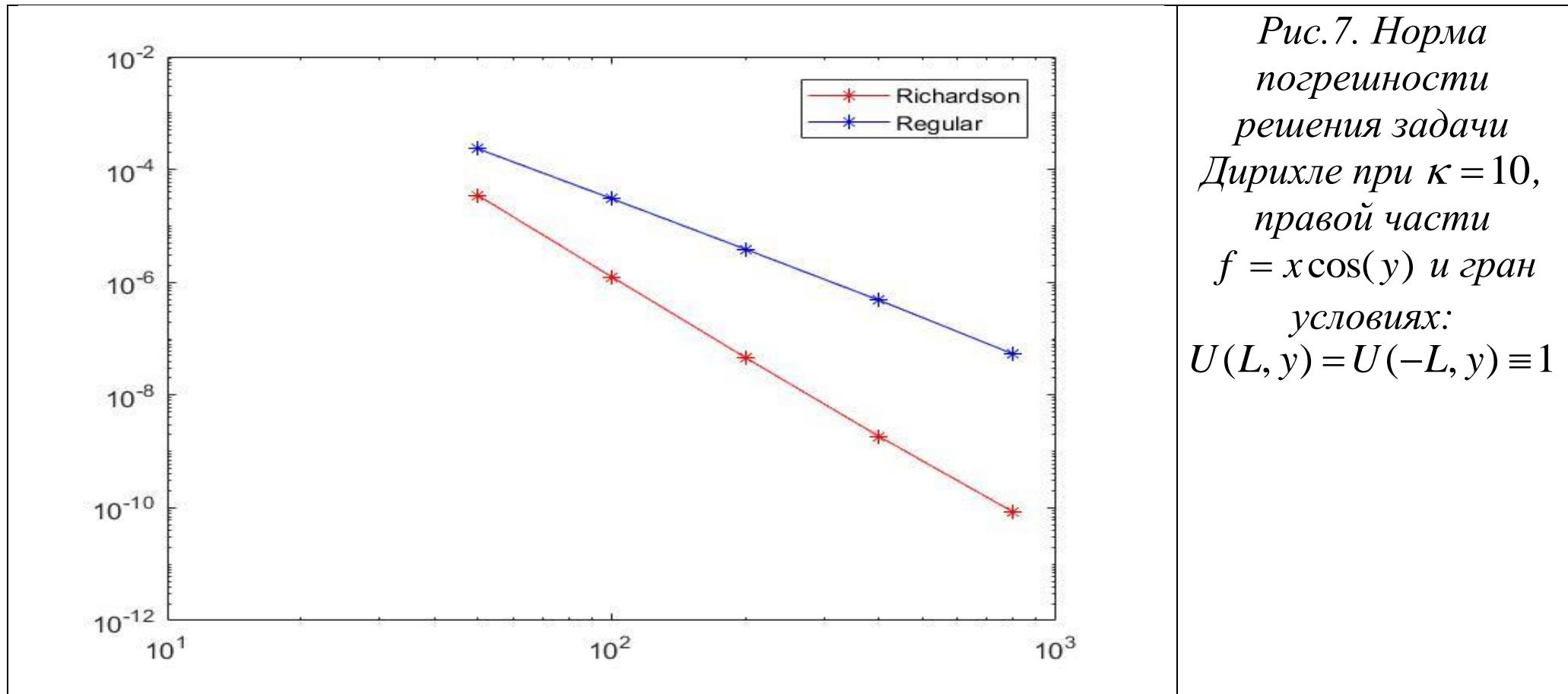
$$u_{2h}(\vec{x}) = u(\vec{x}) + C(\vec{x})2^\nu h^\nu + o(h^\nu) \quad (6)$$

Из (5-6) получаем $C(\vec{x}) = \frac{u_h(\vec{x}) - u_{2h}(\vec{x})}{1 - 2^\nu}$, $u(\vec{x}) = u_{2h}(\vec{x}) - C(\vec{x})(2h)^\nu + o(h^\nu)$.

Естественно, сравнивать значения $u_{2h}(\vec{x})$ и $u_h(\vec{x})$ можно только на крупной сетке с шагом $2h$.

Порядок компактной схемы примерно равен 3, поэтому в экспериментах брали $\nu = 3$.

Сравнение нормы погрешности решения с экстраполяцией Ричардсона и без

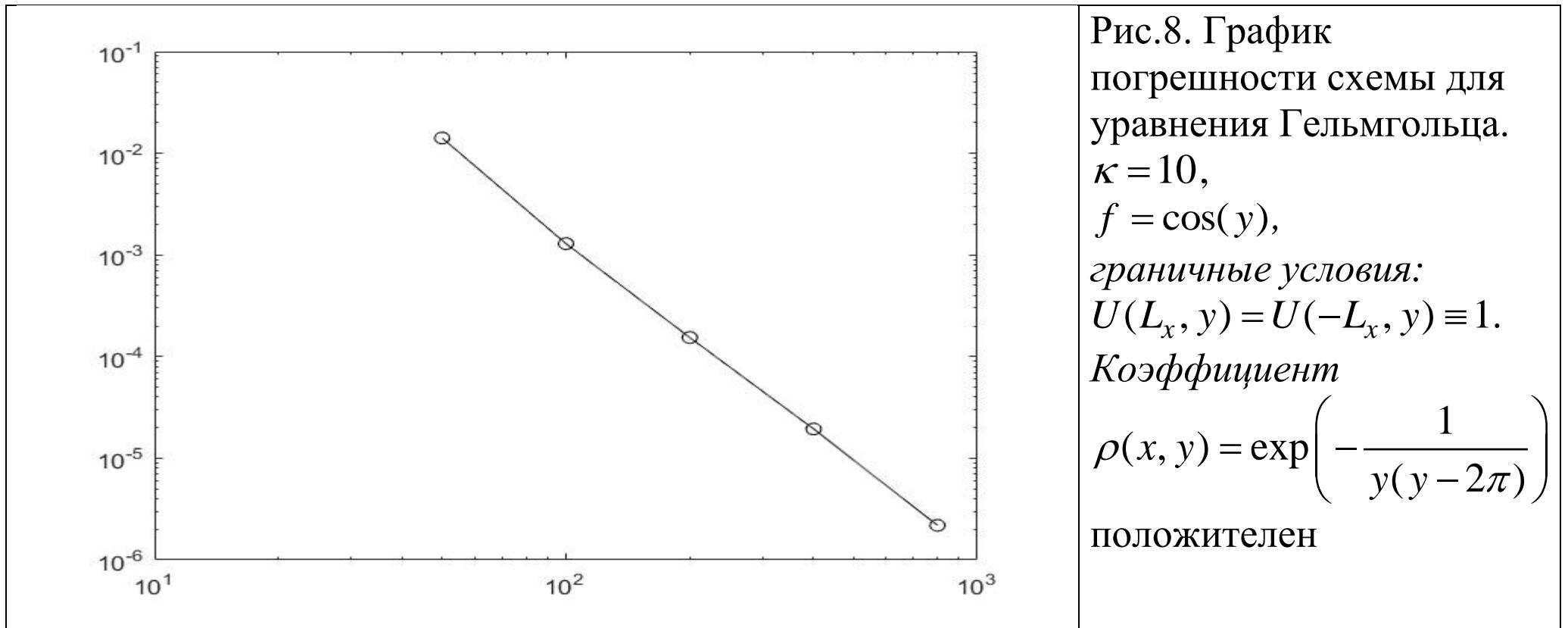


Экстраполяция Ричардсона в эксперименте увеличила порядок точности схемы с 3 до 4.5.

Решение уравнения Гельмгольца.

Компактная аппроксимация уравнения Гельмгольца (2) сводится к аппроксимации уравнения Пуассона заменой: $g = f - \rho(x, y)u$. Составим глобальную систему для u и g :

$Au = Pg \Leftrightarrow (A + P\rho)u = Pf \Leftrightarrow Bu = Pf$, здесь матрица $B = A + P\rho$, ρ -диагональная матрица со значениями коэффициента в диффуре (2) для соответствующей точки сетки.



Для случая мнимого коэффициента ρ также получаем 3-й порядок точности:

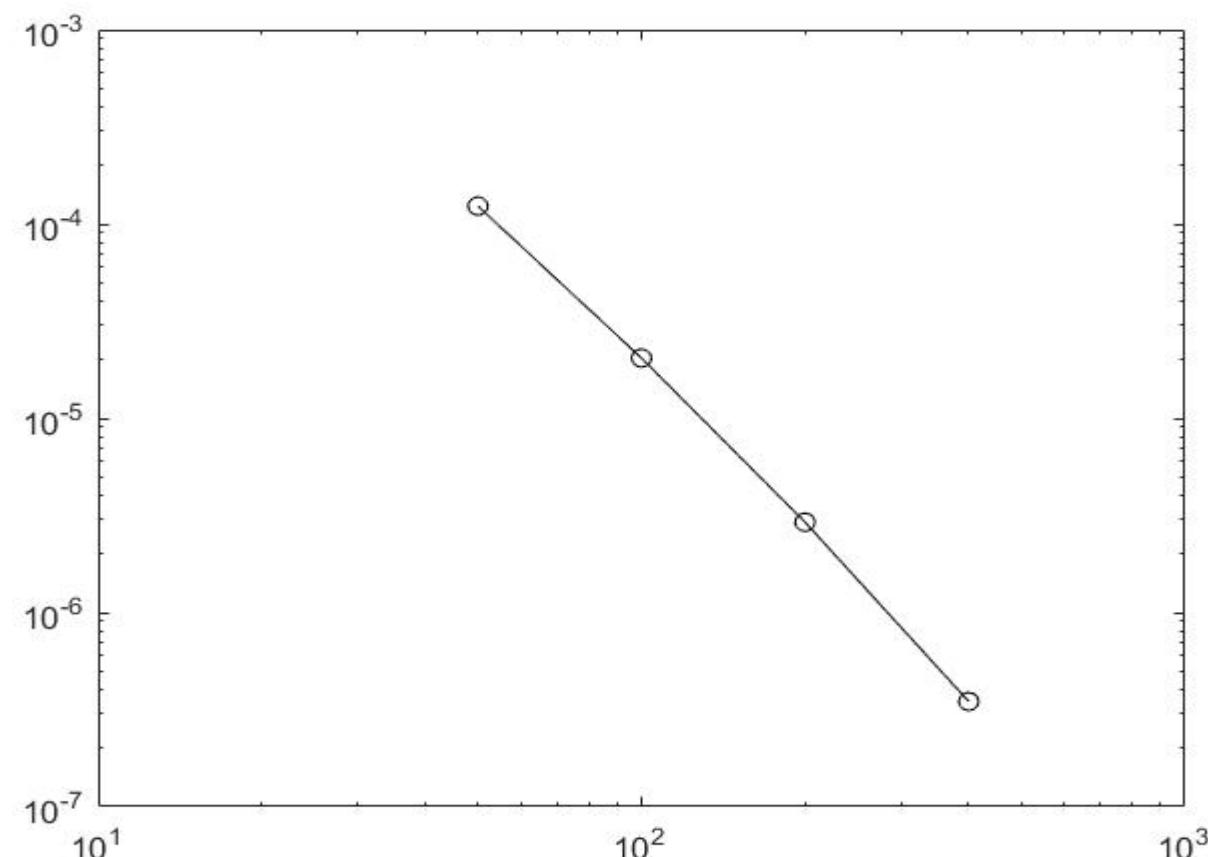


Рис.9. Норма
погрешности схемы для
уравнения Гельмгольца.
 $\kappa = 10$,
 $f = \cos(y)$,
граничные условия:
 $U(L, y) = U(-L, y) \equiv 1$.
Коэффициент
постоянный:
 $\rho(x, y) = i + 10$.

Обобщенные собственные функции задачи при условиях Дирихле.

Обобщенными собственными функциями (ОСФ) краевой задачи для оператора (1) назовем функции u , такие что

$$-\operatorname{div} \vartheta(x, y) \operatorname{grad}(u) = \lambda \vartheta(x, y) u,$$

u – периодическая по y , удовлетворяющая стыковочным условиям (3) и граничным однородным условиям Дирихле ($u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0$). Из периодичности u получаем

$$u(x, y) = \exp(ity) Y_\mu(x),$$

где Y_μ – решение уравнения: $-d_x \vartheta(x) d_x Y_\mu(x) = \mu^2 \vartheta(x) Y_\mu(x)$. Решая это уравнение слева и справа от Γ , получаем общий вид ОСФ: $Y_\pm = a_\pm \sin \mu x + b_\pm \cos \mu x$.

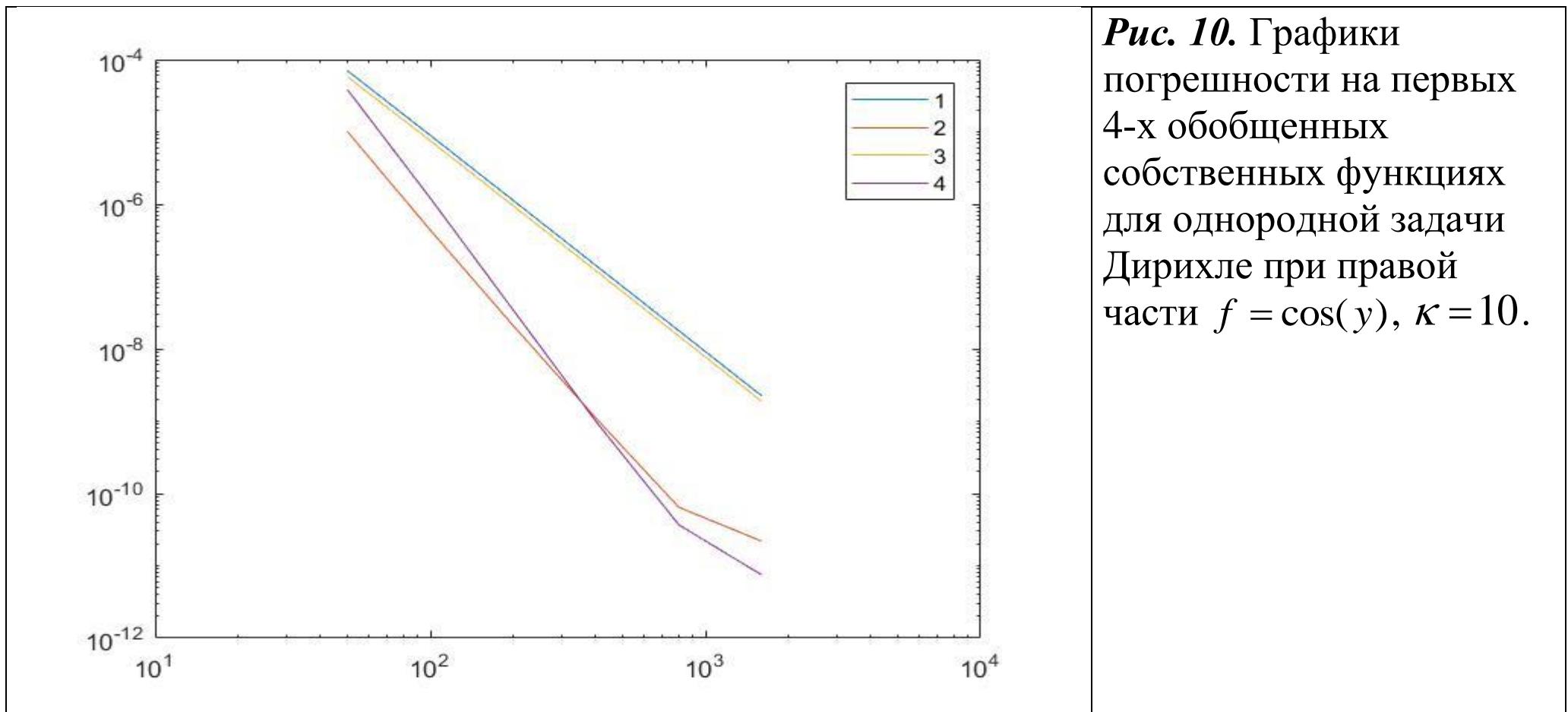
Из стыковочных условий (3) выражаем $b_+ = b_-$, $a_+ = \frac{\vartheta_-}{\vartheta_+} a_-$.

Осталось определить значения μ из условий Дирихле на внешних границах:

$$\frac{\vartheta_-}{\vartheta_+} \cos(\pi\mu) \sin(\pi\mu) + \sin(\pi\mu) \cos(\pi\mu) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) решаем методом Ньютона, определяются численные значения μ , а затем значения a_-, b_- , по которым строятся обобщенные собственные функции.

Оценка точности схемы на обобщенных собственных функциях.

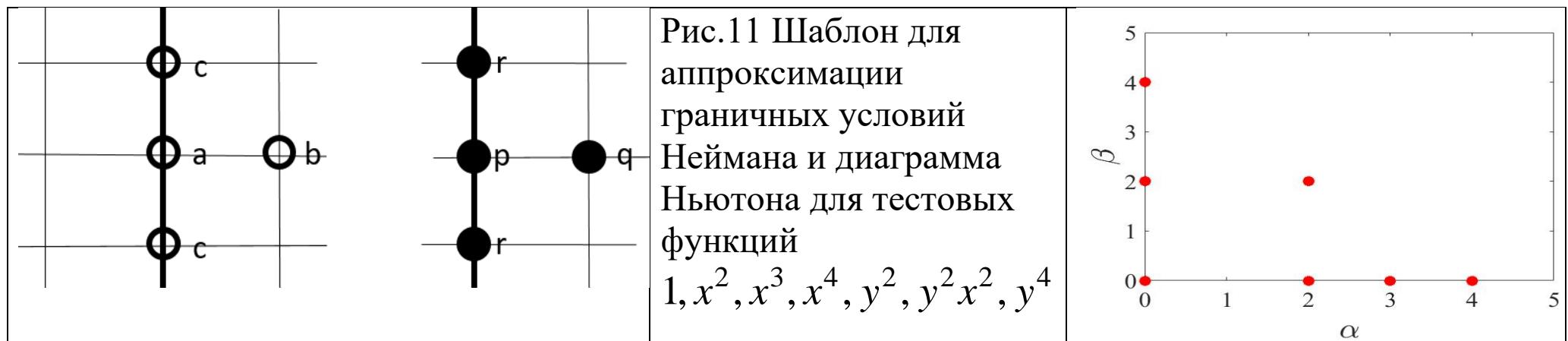


Другие внешние гран условия

Решаем дифференциальное уравнение (1). На левой внешней границе оставим условие Дирихле, на правой – поставим однородное условие Неймана:

$$\partial_x u(L, y) = 0. \quad (8)$$

Аппроксимация условия Неймана на шаблоне Рис. 11 и набора тестовых мономов, удовлетворяющих условиям 8.



Численные значения коэффициентов: $a = 1$, $c = -0.25$, $b = -0.5$, $p = -10$, $r = 5.0833$, $q = 0.08333$.

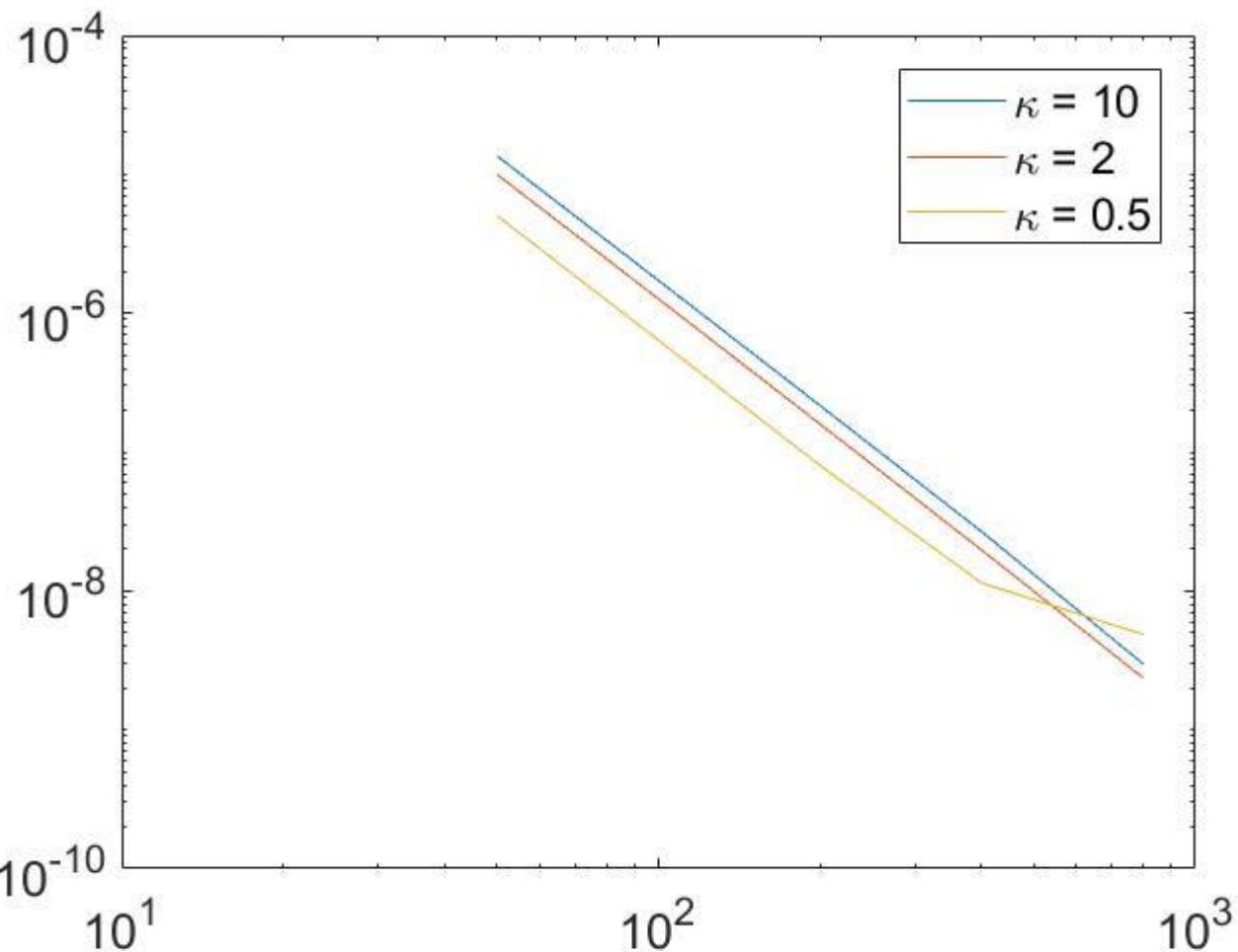


Рис. 12. Графики решения смешанной задачи для разных значений κ .
Правая часть $f \equiv 1$.
Границные условия:
 $U(-L, y) = \sin(y)$.

Классическая дивергентная схема (для сравнения с компактной)

Идея дивергентной схемы состоит в замене частных производных разностными:

$$(u_x')_{i-1/2,j} = \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{h}, (u_y')_{i,j-1/2} = \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{h}.$$

Получаем аппроксимацию для оператора Лапласа:

$$L[u]_{ij} = \frac{u_{ij-1} + u_{ij+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{ij}}{h^2}$$

В точках **I** и **II** аппроксимируется уравнение (1): $\vartheta L[u]_{ij} = f_{ij}$.

В точках типа **III** аппроксимируем условия стыковки (3). Здесь рассмотрено два способа аппроксимации стыковки:

- 1) Аппроксимировать линейно с каждой стороны: $\vartheta_- \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{h} - \vartheta_+ \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h} = 0$.
- 2) Аппроксимировать решение двумя параболами слева и справа от линии Γ и записать условие стыковки (3). Получаем уравнение:

$$\vartheta_- u_{i-2,j} - 4\vartheta_- u_{i-1,j} + 3(\vartheta_- + \vartheta_+) - 4\vartheta_+ + \vartheta_+ = 0. \quad (9)$$

Численные эксперименты для 1)

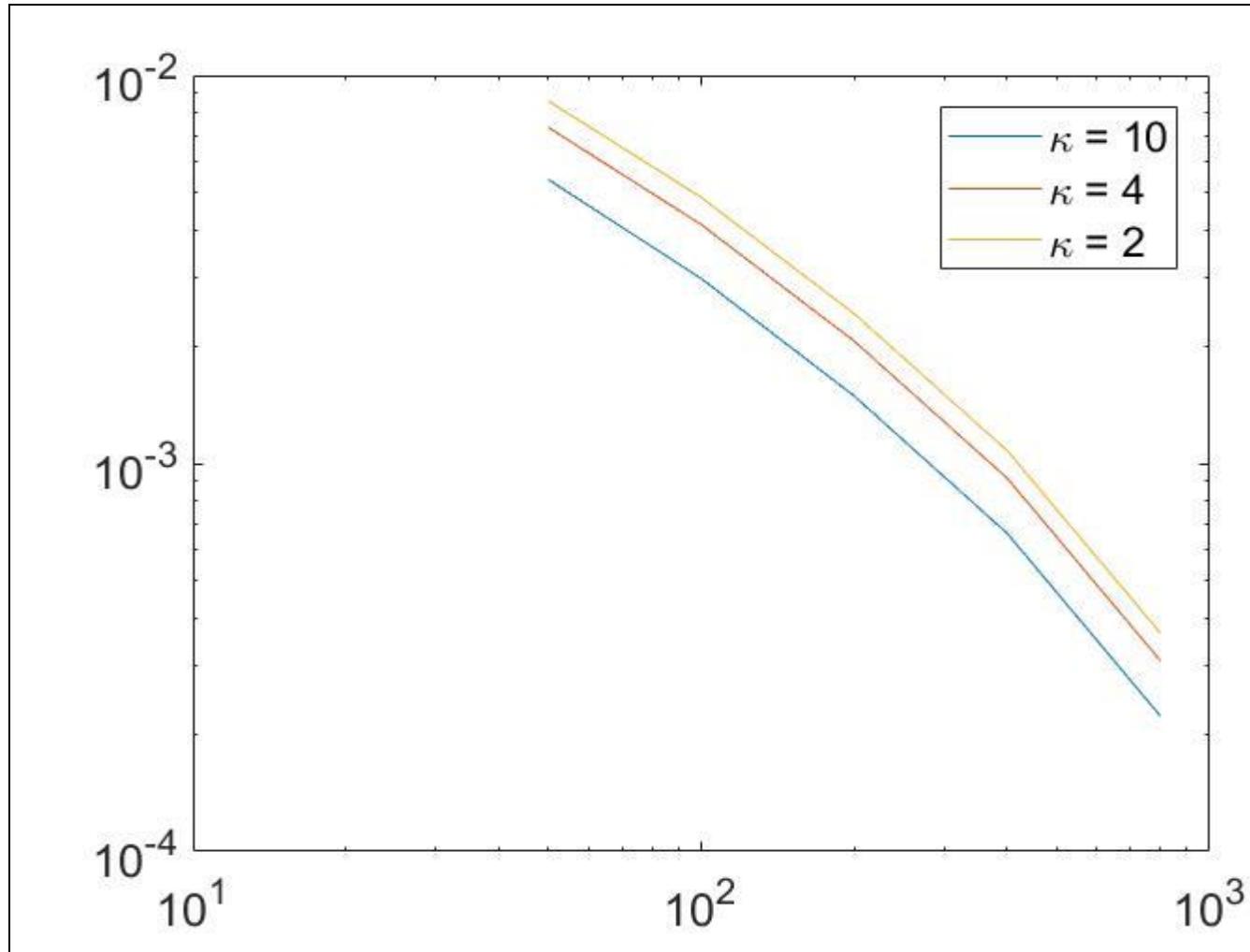


Рис 13. Графики погрешности при аппроксимации стыковочных условий способом 1) при небольших значениях κ .
Правая часть: $f = x \cos(y)$
Гран условия Дирихле:
 $U(-L, y) = \cos(y)$
 $U(L, y) = \sin(y)$

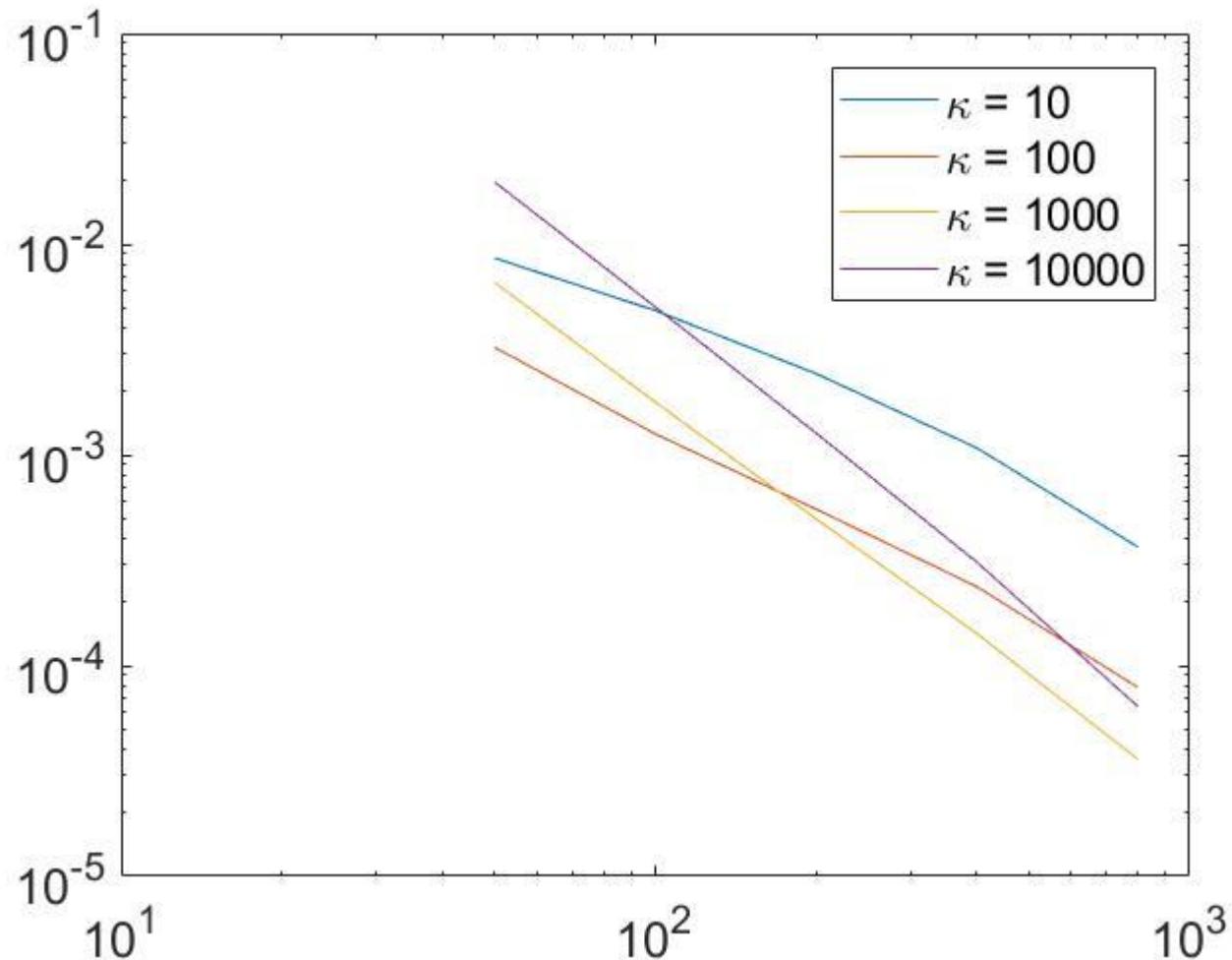
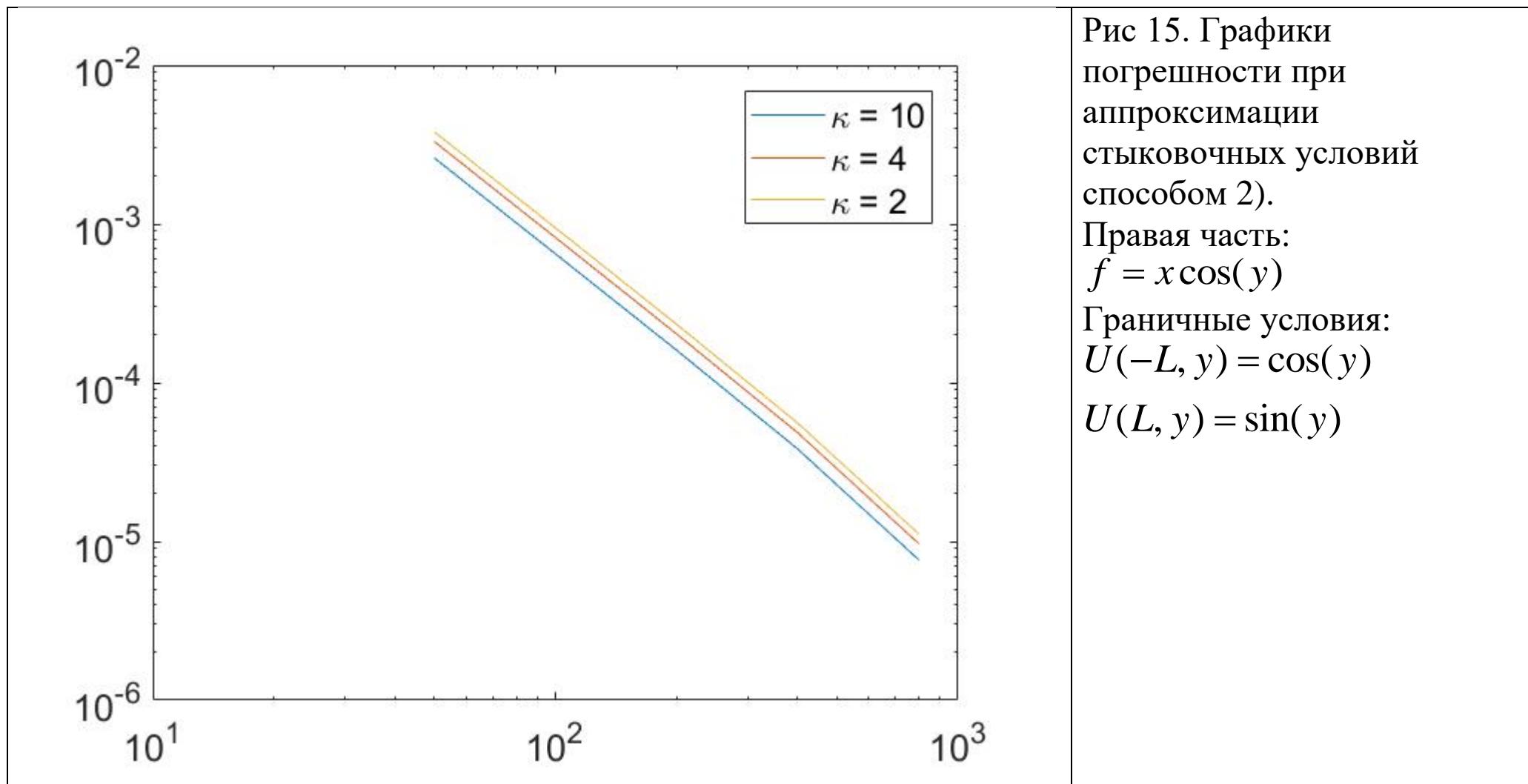


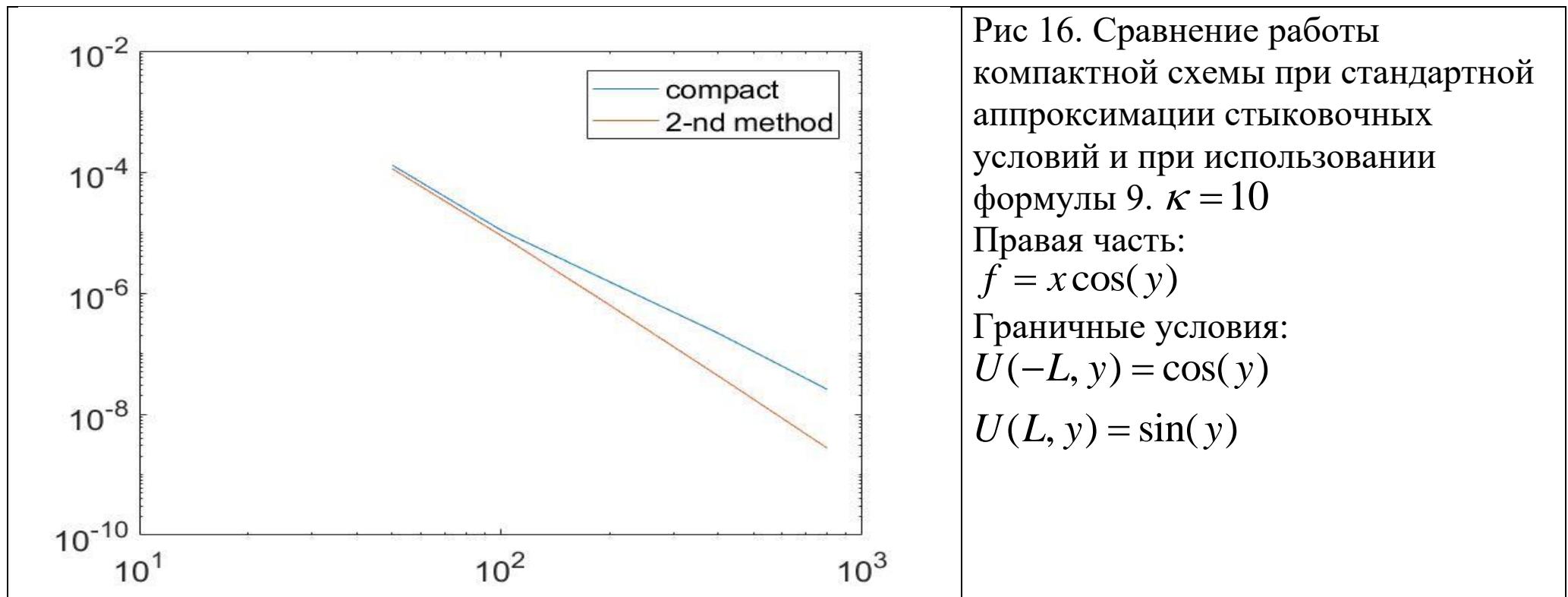
Рис 14. Графики погрешности при аппроксимации стыковочных условий способом 1) при больших значениях κ .
Правая часть: $f = x \cos(y)$
Границные условия:
 $U(-L, y) = \cos(y)$
 $U(L, y) = \sin(y)$

Численные эксперименты для способа 2).



Увеличение порядка компактной схемы.

Как видно с Рис. 13 – 15, аппроксимация граничных условий вторым способом, в сравнении с первым, увеличивает порядок схемы с 1,5 до 2. Для компактной схемы замена компактной аппроксимации в точках типа В на аппроксимацию по формуле 9 также позволила повысить порядок с 3 до 3,5.



Из Рис. 16 видно, что использование формулы (9) позволяет сильно повысить порядок при небольшом κ . При больших κ (Рис.17) это различие становится менее существенным.

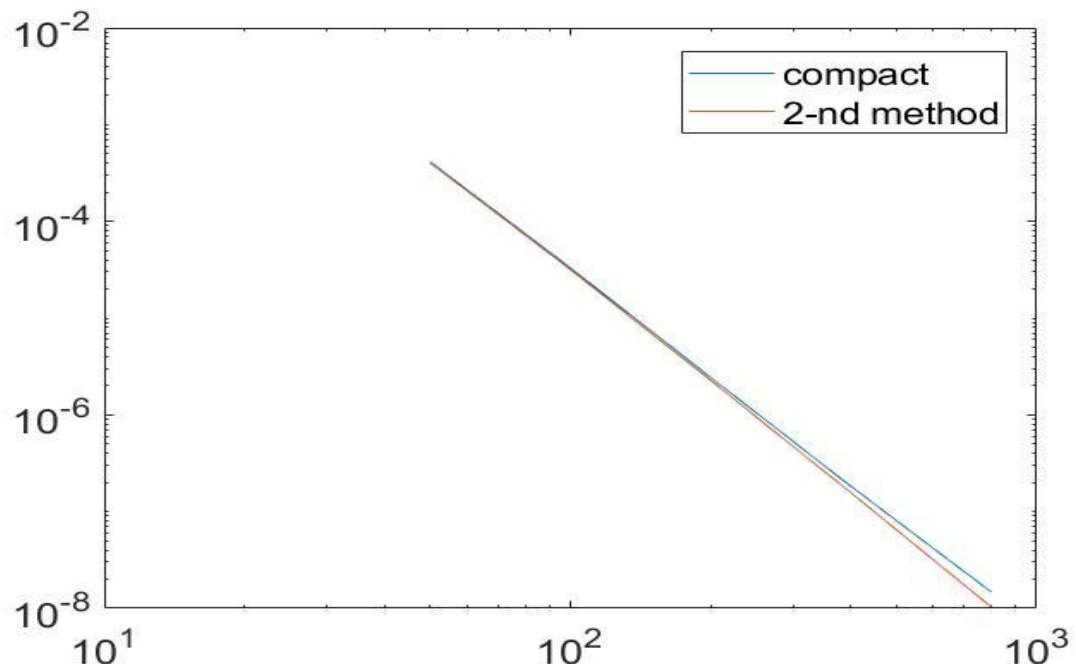


Рис 17. Сравнение компактной схемы при стандартной аппроксимации стыковочных условий и при использовании формулы 9. $\kappa = 100$

Правая часть:
 $f = x \cos(y)$

Границные условия:
 $U(-L, y) = \cos(y)$
 $U(L, y) = \sin(y)$

Получение аппроксимации 4-го порядка.

В предыдущих подходах к компактным схемам считалось, что правая часть не определена на Γ , поэтому в шаблонах для f точки на линии Γ не учитывались. Если предположить существование левого и правого предела правой части (f_+, f_-) , то можно добавить в шаблон пары точек на линии Γ , в которых значения правой части определяются через пределы (f_+, f_-) . Такой подход позволяет существенно повысить порядок схемы с 3-го до 4-го.

Точки типа II.

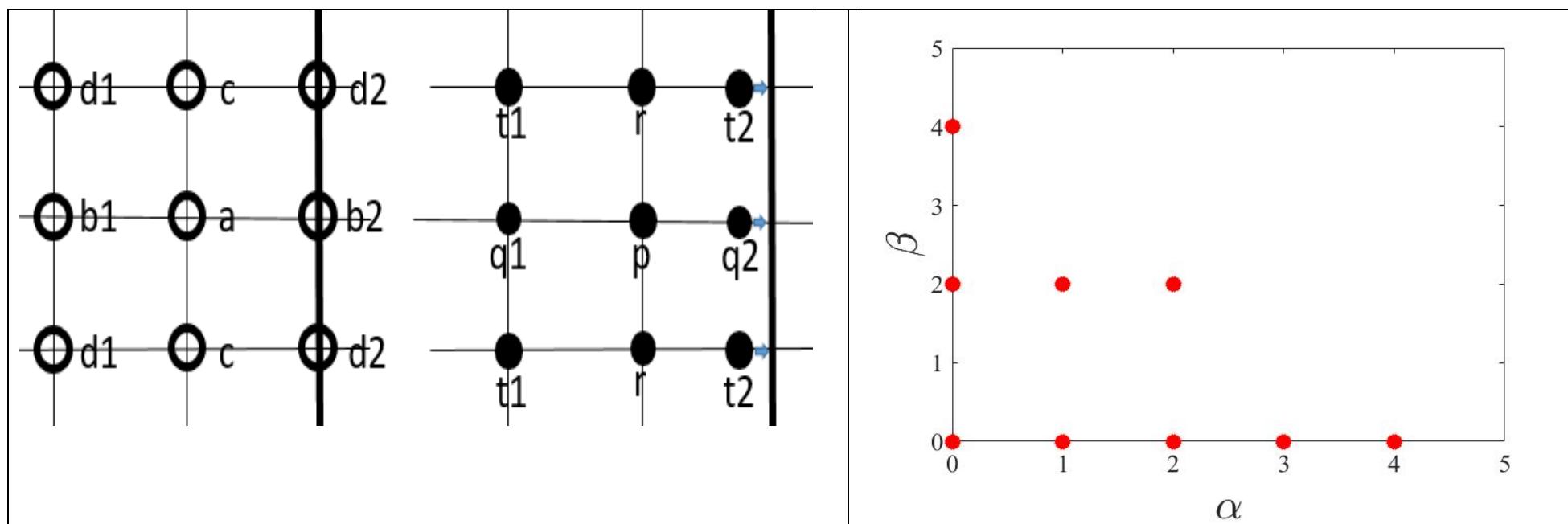


Рис. 18. В левой части представлены шаблоны, в правой – диаграмма Ньютона для тестовых функций $x^\alpha y^\beta$

Точки типа III, симметрия как и для II

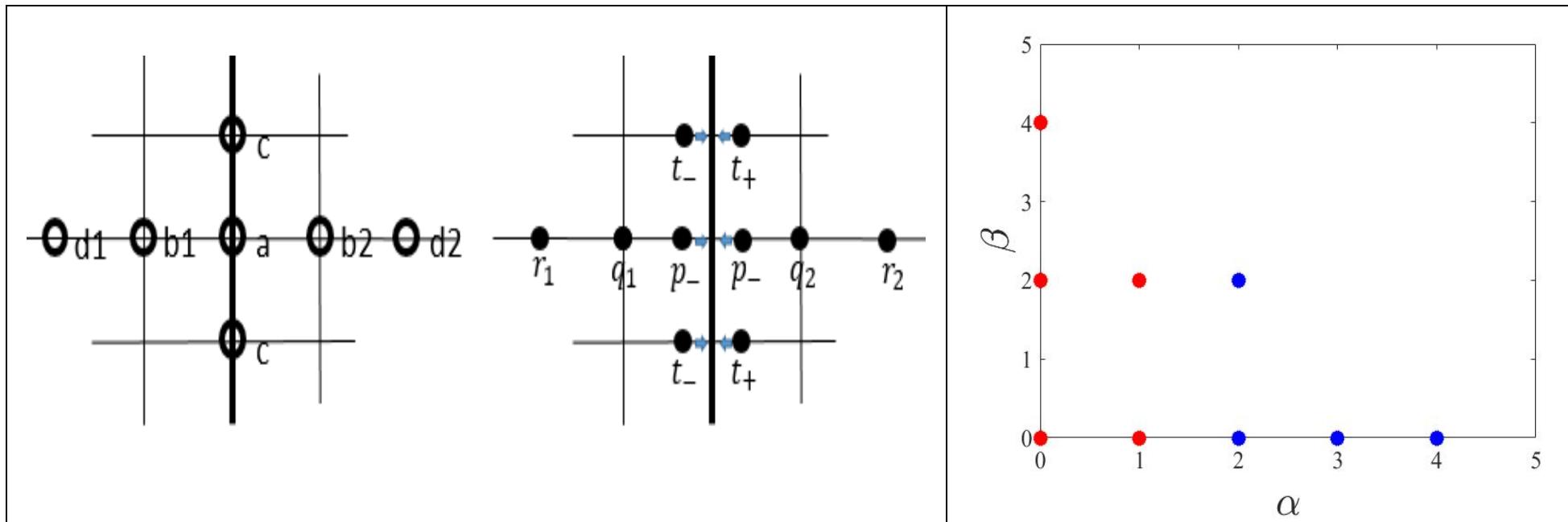


Рис.19. Шаблон и диаграмма Ньютона для точек типа III. Синие точки на диаграмме Ньютона обозначают пару тестовых функций (с сигнумом и без).

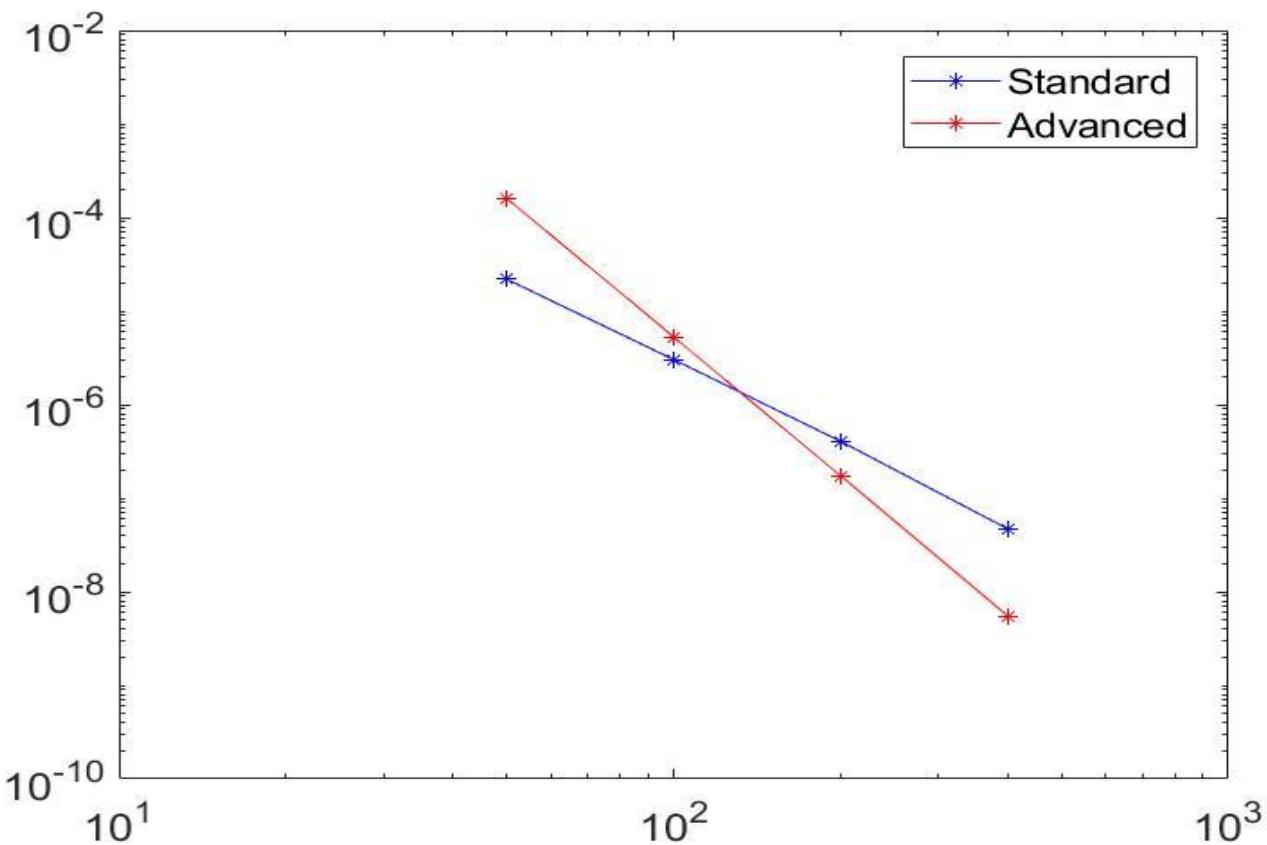


Рис 20. Сравнение стандартной компактной схемы и схемы, учитывающей пределы правой части. $\kappa = 100$
Правая часть:
 $f = x \cos(y)$
Границные условия:
 $U(-L, y) = \cos(y)$
 $U(L, y) = \sin(y)$

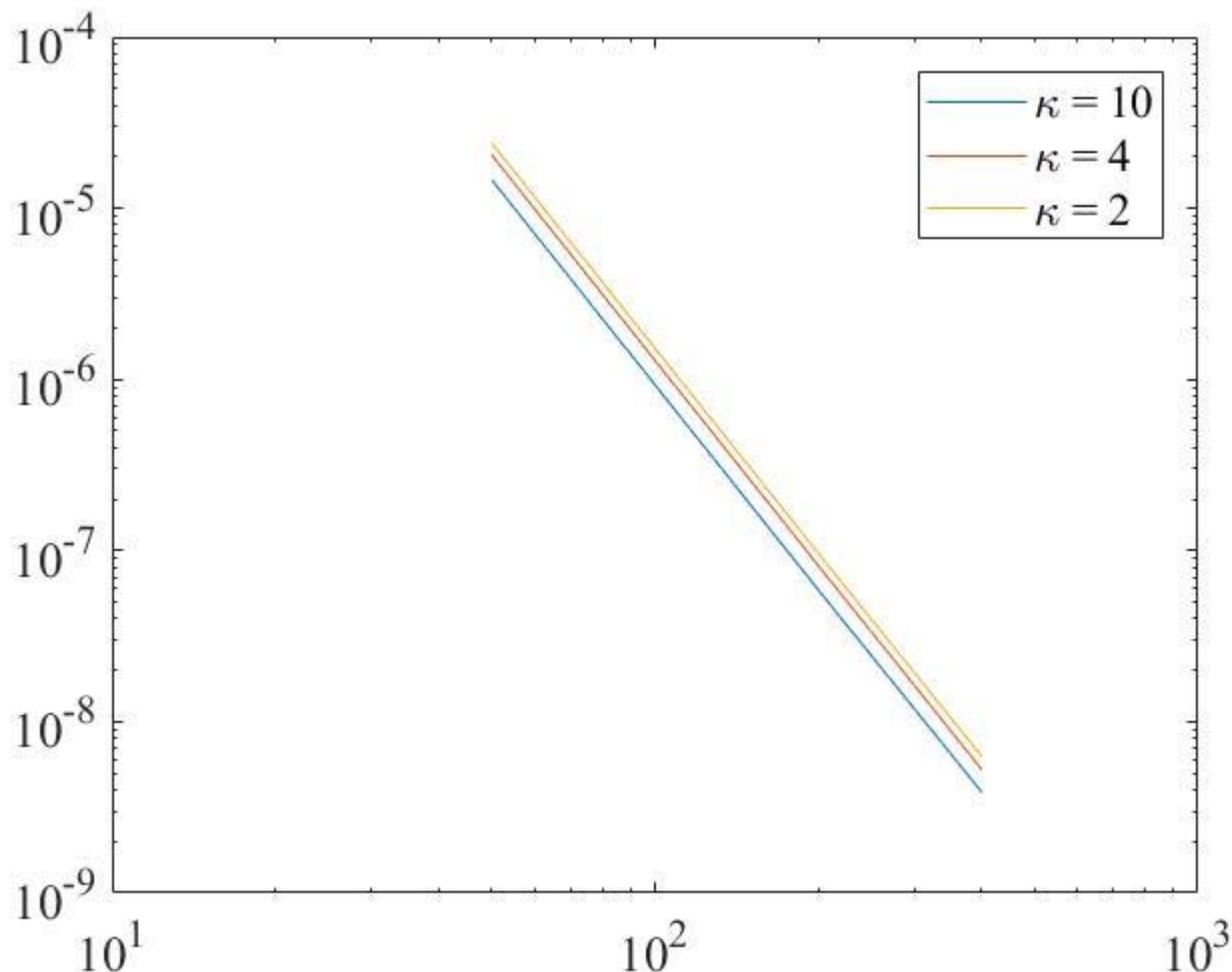


Рис 21.Графики
погрешности схемы 4-го
порядка при разрывной
правой части при разных κ .
Правая часть:

$$f = \begin{cases} (x + \pi)^2 & x \leq 0 \\ (x + \pi)^3 & x > 0 \end{cases}$$

Границные условия:
 $U(-L, y) = \cos(y)$
 $U(L, y) = \sin(y)$

1. Гордин В. А., Цымбалов Е. А. Компактная разностная схема для дифференциального уравнения с кусочно-постоянным коэффициентом. Математическое моделирование. 2017, т.29, № 2 , с.16-28.
2. А.А.Самарский. Теория разностных схем. М., «Наука», 1977.

Доклад подготовлен в результате проведения исследования в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета „Высшая школа экономики“ (НИУ ВШЭ)» в (грант № 20-04-021) и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».