

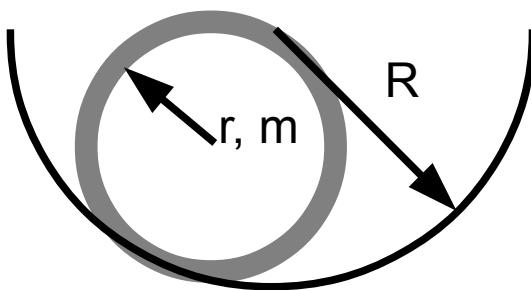
Задачи тестирования для студентов, переводящихся на Факультет физики НИУ ВШЭ

Ф.И.О. _____

1	2	3	4	5	Σ

Все задачи оцениваются по 5 баллов. При отсутствии численного ответа там, где он возможен, задача не считается полностью решенной. При решении задач ЗАПРЕЩАЕТСЯ пользоваться литературой и средствами связи. Для приема на бюджетное место необходимо набрать минимум 10 баллов.

Задача 1



В цилиндрическом желобе радиуса $R=50\text{ см}$ стоит колесо радиуса $r=R/2=25\text{ см}$ и массой $m=1\text{ кг}$. Колесо слегка отклоняют от положения равновесия и отпускают. Найти период колебаний вблизи положения равновесия. Считать, что колесо катится по желобу без проскальзывания, вся масса колеса распределена по ободу (радиуса r).

Задача 2

Нобелевская премия 2019 года по физике была в том числе вручена за открытие экзопланет: планет, вращающихся по орбите вокруг других звёзд. Одним из способов обнаружения экзопланет является наблюдение в спектре звезды периодических изменений длины волны одной из спектральных линий водорода, связанных с эффектом Доплера. Гипотетический инопланетный астроном мог бы таким же способом убедиться в наличии у Солнца планет.

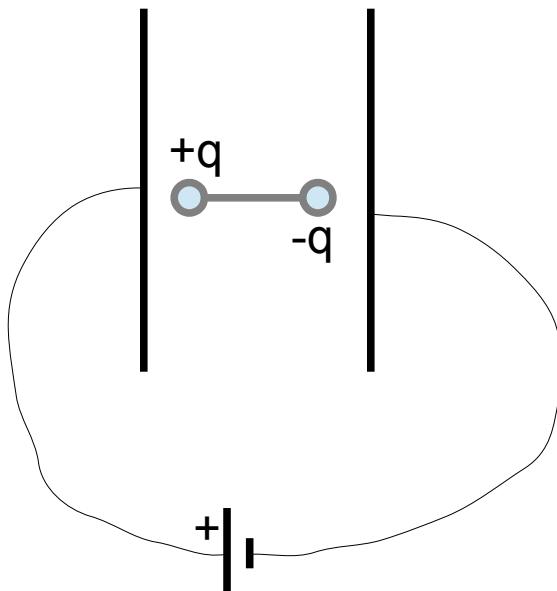
Определить величину максимального относительного сдвига спектральных линий $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ для системы Солнце-Юпитер, которую мог бы увидеть инопланетный астроном. Масса Солнца $M_C=2\times 10^{30}\text{ кг}$, масса Юпитера $M_{Ю}=1.9\times 10^{27}\text{ кг}$, период обращения Юпитера вокруг Солнца $\tau=11.9\text{ года}$. Орбиту считать круговой, наличие других планет не учитывать.

Задача 3

Считая человека тепловой машиной, работающей с КПД близким к максимальному, оценить какой путь может регулярно проходить за день человек, суточный рацион которого имеет энергетическую ценность 2000 килокалорий. Считать что на каждом шаге центр масс поднимается на 5 см. Температуру окружающей среды считать равной $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, температуру тела $36\text{ }^{\circ}\text{C}$. Недостающие параметры задачи оценить из своего опыта.

Указание: одна калория — это количество тепла, необходимое для нагрева 1 грамма воды на 1 градус. Теплоёмкость воды $C=4.2\text{ кДж}/(\text{кг}\cdot{}^{\circ}\text{C})$.

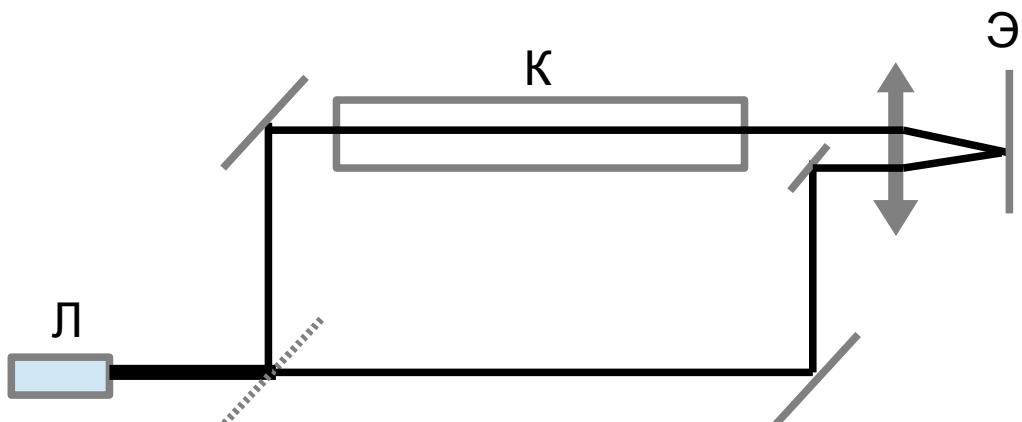
Задача 4



В плоском конденсаторе с воздушным зазором $d=5\text{ см}$, на пластинах которого поддерживается разность потенциалов $U=1000\text{ В}$, находится «гантелька» из двух маленьких шариков, соединенных непроводящей перекладиной. На шары помещены заряды $\pm q$, $q=10^{-10}\text{ Кл}$, масса каждого шарика $m=1\text{ г}$, длина перекладины $l=4\text{ см}$. В начальный момент времени «гантельку» сориентировали как показано на рисунке, так что перекладина «гантельки» почти точно перпендикулярна к пластинам конденсатора, а потом отпустили. Найти максимальную скорость шариков.

Указание: размер шариков считать малым по сравнению с длиной перекладины, поляризацию шариков и перекладины не учитывать. Перекладина нерастяжимая и невесомая. Потери на трение о воздух отсутствуют, начальная скорость пренебрежимо мала.

Задача 5



Для точного измерения показателя преломления газов используют интерферометрический метод. Упрощенная модельная схема установки показана на рисунке. Вся установка находится в воздухе с показателем преломления $n_b=1.000292$, изучаемый газ занимает кювету К с прозрачными стенками. Луч лазера Л делится на два луча равной интенсивности полупрозрачным зеркалом, один луч проходит через кювету, другой проходит весь путь в воздухе. Оба луча сводятся в одну точку на экране Э, где наблюдается интерференция. Установка настроена так, что при наполненной воздухом кювете наблюдается максимальная яркость точки в центре экрана.

Определить минимальную длину кюветы L , при которой при наполнении кюветы азотом при нормальных условиях с показателем преломления $n_{a_3}=1.000297$ в центре экрана будет интерференционный минимум. Длина волны лазера $\lambda=600\text{ нм}$.

Решение задачи 1

Пусть колесо отклонили так, что прямая, проведенная из центра желоба через центр колеса составит угол φ с вертикалью. Сразу воспользуемся тем, что $r=R/2$ для упрощения рассуждений. Центр масс колеса движется по окружности радиуса $R/2$, он поднимется на $h=\frac{R}{2}(1-\cos\varphi)\approx\frac{R}{4}\varphi^2$. Отсюда изменение потенциальной энергии $\Pi=mg R \frac{\varphi^2}{4}$.

Для подсчёта кинетической энергии надо учесть и движение центра масс, и вращение вокруг центра масс (либо только вращение вокруг точки опоры (результат не меняет)). Угловая скорость находится из отсутствия проскальзывания: $R\dot{\varphi}=r\omega$, $\omega=2\dot{\varphi}$. Отсюда:

$$K=\frac{m}{2}\left(\dot{\varphi}\frac{R}{2}\right)^2+\frac{m(R/2)^2}{2}(2\dot{\varphi})^2=\frac{5}{8}mR^2\dot{\varphi}^2.$$

Далее стандартно пользуемся сохранением энергии и дифференцированием переходим к уравнению колебаний, ответ от массы не будет зависеть:

$$mg R \frac{\varphi^2}{4} + \frac{5}{8}mR^2\dot{\varphi}^2 = const$$

$$\frac{1}{2}g\varphi\dot{\varphi} + \frac{5}{4}R\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{5}\frac{g}{R}\varphi = 0$$

откуда $\omega=\sqrt{\frac{2g}{5R}}\approx2.83\text{ c}^{-1}$ и период $T=2\pi/\omega=2.22\text{ c}$.

Решение задачи 2

Юпитер и Солнце вращаются вокруг общего центра масс. Если R и r радиусы орбит Юпитера и Солнца, то $\frac{R}{r}=\frac{M_C}{M_{J\odot}}\gg 1$. Орбитальные скорости Юпитера и Солнца также относятся как их обратные массы. Найдём орбитальную скорость Юпитера:

$$M_{J\odot}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 R = G \frac{M_{J\odot}M_C}{R^2}$$

$$R^3 = \left(\frac{V}{2\pi/\tau}\right)^3 = G \frac{M_C}{(2\pi/\tau)^2}$$

$$V = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM_C}{\tau}} \approx 13 \text{ км/сек}$$

Отсюда орбитальная скорость движения Солнца вокруг общего центра масс примерно 12 м/сек и искомый доплеровский сдвиг

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V_C}{c} = 4 \times 10^{-8}.$$

Решение задачи 3

Если бы сложную биофизику и биохимию человека можно было заменить тепловой машиной, то потребляемая пища поступала бы в «топку» нагревателя этой машины и шла бы

частично на совершение работы, частично отдавалась бы в окружающую среду. Для оценки возьмем КПД цикла Карно: $\eta = \frac{T_h - T_x}{T_h} \approx 0.052$.

Полезная работа: $A = \eta Q$, $Q = 8.4 \text{ МДж}$. Совершаемая работа тратится на подъём на каждом шаге центра масс на величину $h = 5 \text{ см}$. Берем для оценки массу человека $m = 80 \text{ кг}$, длину шага $l = 50 \text{ см}$.

Получаем, что потребляемый рацион позволит выполнить $N = \frac{A}{mgh}$ шагов, при этом будет пройден путь

$$L = \frac{Al}{mgh} = \frac{\eta Q l}{mgh} \approx 11 \text{ км}.$$

Оценка получается на удивление разумной.

Решение задачи 4

Внутри конденсатора есть электрическое поле, направленное от положительной пластины к отрицательной, его напряженность $E = U/d = 2 \cdot 10^4 \text{ В/м}$.

Сумма сил, действующих на заряды равна нулю, поэтому центр масс смещаться не будет. Положительный заряд притягивается к отрицательной пластине, отрицательный к положительной пластине — изображенная начальная конфигурация является неустойчивым положением равновесия, при минимальном случайном отклонении «гантелька» начнёт разворачиваться в выгодную ориентацию.

Максимальная скорость будет достигнута при повороте «гантельки» на 180 градусов. Её удобнее всего искать из сохранения энергии

$$2m \frac{V^2}{2} = 2qEl$$

$$V = \sqrt{\frac{2qEl}{m}} = 1.3 \text{ см/сек}$$

В решении не учитываются потери, связанные с влиянием зарядов «гантельки» на пластины конденсатора.

Решение задачи 5

При заполненной воздухом кювете происходит конструктивная интерференция двух лучей, то есть длины путей, проходимых лучами отличаются на целое число длин волн. При заполнении кюветы газом в ней длина волны уменьшится в n раз и на той же длине уложится другое число длин волн. Для деструктивной интерференции в центре экрана надо, чтобы уложилось нечётное «лишнее» число полуволн, т.е.

$$\frac{L}{\lambda/n_{a3}} - \frac{L}{\lambda/n_e} = \frac{1}{2} + k, \text{ где } k \text{ - целое.}$$

$$|n_{a3} - n_e| L_{min} = \frac{\lambda}{2}$$

$$L_{min} = \frac{\lambda}{2|n_{a3} - n_e|} = 6 \text{ см}$$

Требование очень мягкое, так что такие небольшие отличия показателя преломления измеряются достаточно просто.