**Демонстрационный вариант экзамена по математике** для поступающих в магистратуру на программы **«Статистическое моделирование и актуарные расчеты»**

**Задача 1**

Выпишите матрицу , соответствующую заданной квадратичной форме .

а) Какова знакоопределённость матрицы ?

б) Найдите определитель матрицы , если известна матрица .

**Решение**

*Пункт а)*

Квадратичная форма .

Так как матрица – симметричная, то , а значит .

Таким образом, матрица .

**Ответ:**

*Пункт б)*

Возможны следующие решения:

* Через знак квадратичной формы: для любых (хотя бы один не равен 0). Следовательно, матрица положительно определена.
* Через критерий Сильвестра: главные миноры , . Следовательно, матрица положительно определена.
* Через собственные числа матрицы: , , собственные числа матрицы . Следовательно, матрица положительно определена.

**Ответ:** матрица положительно определена

*Пункт в)*

Возможны следующие решения:

— Можно преобразовать матричное выражение и воспользоваться свойствами определителя .

Тогда ,

.

— Можно найти произведение матриц и найти определитель.

или =.

Тогда .

**Ответ:**

**Задача 2**

Рассмотрим вектор *i* в *n*-мерном пространстве, состоящий исключительно из двоек: . Найдите матрицу *P* оператора ортогонального проектирования на линейную оболочку вектора *i*. Чему равен ранг *P*?

**Решение**

Матрица P должна быть устроена так, чтобы для любого n-мерного вектора a выполнялось:

Первое равенство означает, что вектор обязательно должен принадлежать линейной оболочке вектора *i*. Второе — что проекция вектора на эту оболочку ортогональна разности вектора *a* и проекции.

Получаем:

Очевидно, что это равенство выполняется при = 0. В остальных случаях мы можем поделить его на.

*.* (Обратите внимание: — скаляр, который может быть поставлен в любое место произведения).

Из равенства следует, что . Получаем матрицу-проектор:

.

Ранг этой матрицы равен единице (чтобы найти ранг, не обязательно искать саму матрицу — можно просто обратить внимание на то, что это матрица проектирования на одномерное пространство, поэтому её ранг должен быть равен единице).

**Задача 3**

Найдите интеграл

**Решение**

Обозначим . Имеем:

Из полученного соотношения выражаем *I*: , где *С —* произвольная постоянная.

**Ответ:** , где *С —* произвольная постоянная.

**Задача 4**

Постройте график функции (найдите область определения функции, нули, точки разрыва, экстремумы, точки перегиба, асимптоты)

**Решение**

 или

График функции имеет две ветви, симметричные относительно оси O*х*, поэтому достаточно построить одну ветвь и отразить её относительно оси O*х*.

1. Область определения функции: (область определения подкоренного выражения)
2. Нули функции *x*=–1, *x*=0. Вертикальная асимптота *x*=1.
3. Найдем экстремумы и точки перегиба.

Рассмотрим область и ветвь .

Нули производной: , рассматриваемому промежутку принадлежит только точка . Это точка минимума, соответственно, для другой ветви это будет точка максимума.

Вычислим вторую производную.

На рассматриваемом промежутке нулей второй производной нет, следовательно, нет точек перегиба, вторая производная положительна, функция выпукла.

Рассмотрим область и ветвь .

На рассматриваемом промежутке первая производная положительна, функция возрастает.

Вторая производная также положительна, функция выпукла:

Учитывая симметрию, получаем следующий график:

***Строфоида***

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **y** |
| -1.0 | 0 |
| -0.9 | -0.21 |
| -0.8 | -0.27 |
| -0.7 | -0.29 |
| -0.6 | -0.3 |
| -0.5 | -0.29 |
| -0.4 | -0.26 |
| -0.3 | -0.22 |
| -0.2 | -0.16 |
| -0.1 | -0.09 |
| 0 | 0 |
| 0.1 | 0.11 |
| 0.2 | 0.24 |
| 0.3 | 0.41 |
| 0.4 | 0.61 |
| 0.5 | 0.87 |
| 0.6 | 1.2 |
| 0.7 | 1.67 |
| 0.8 | 2.4 |
| 0.9 | 3.92 |
| 1.0 | 134217728 |



**Критерии**

+1 балл за область определения

**Задача 5**

Найдите общее решение дифференциального уравнения

**Решение**

Данное уравнение является неоднородным линейным дифференциальным уравнением. Его общее решение есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

1. Однородное уравнение. Характеристическое уравнение: . Если корень этого уравнения есть целое число, то оно является делителем числа 2. Простой перебор даёт корень . Выделяя множитель , получаем:

.

Значит, характеристическое уравнение имеет два вещественных корня  и два комплексных корня . Все корни простые, значит, общее решение однородного уравнения есть

 .

2. Неоднородное уравнение. Правая часть уравнения — это экспонента, показатель которой есть корень характеристического уравнения. Значит, частное решение надо искать в виде . Последовательно вычисляя производные, получаем:

  

  

Получаем: , откуда .

**Ответ:** общее решение есть , где  — произвольные постоянные

**Задача 6**

Исследуйте на глобальный и локальный экстремум функцию

 

**Решение**

Выпишем частные производные:

,

,

.

Точки, подозреваемые на экстремум,:

  

Матрица производных второго порядка:



  

Проверку достаточных условий запишем в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | экстремум |
| 0 | 0 | 2 | - | + | + | - |
| 0 | 0 | -2 | - | + | - | max |
| 0 | 4 | 2 | - | - | - | - |
| 0 | 4 | -2 | - | - | + | - |
| 2 | 0 | 2 | + | - | - | - |
| 2 | 0 | -2 | + | - | + | - |
| 2 | 4 | 2 | + | + | + | min |
| 2 | 4 | -2 | + | + | - | - |

**Ответ:**  — точка локального максимума, ;  — точка локального минимума, ; глобальных экстремумов нет.

**Задача 7**

Найдите условные локальные и глобальные экстремумы следующей функции  при условии  .

**Решение**

Упростим ограничение: 

Проверим условие Якоби: .

Равенство выполняется только в точке , что при заданном ограничении невозможно.

Составим Лагранжиан: 

Частные производные Лагранжиана:







Подозрительные точки:



Графический анализ позволяет сделать вывод, что точка (0;0) – точка глобального минимума, точка (4;–2) – точка глобального максимума

**Ответ:**  — точка глобального минимума,  — точка глобального максимума.

**Задача 8**

Директор фирмы имеет два списка с фамилиями претендентов на работу. В первом списке – фамилии 7 женщин и 3 мужчин. Во втором списке оказалось 3 женщины и 6 мужчин. Фамилия одного из претендентов случайно переносится из первого списка во второй. Затем фамилия одного из претендентов случайно выбирается из второго списка.

1. Какова вероятность, что эта фамилия женщины?
2. Если предположить, что эта фамилия принадлежит мужчине, чему равна вероятность того, что из первого списка извлечена фамилия женщины?

**Решение**

1. Рассмотрим несколько вариантов извлечения фамилий из первого списка:

В1 – из первого списка извлечена фамилия, которая принадлежит женщине.

В2 – из первого списка извлечена фамилия, которая принадлежит мужчине.

Вероятность P(B1)=7/(7+3)=0,7

Вероятность P(B2)=3/(7+3)=0,3

Обозначим событие A – из второго списка извлечена фамилия женщины.

Событие A произойдет или вместе с событием B1, или вместе с событием B2. В случае наступления B1 во втором списке станет 10 человек, из них 4 женщины. Поэтому условная вероятность P(A/B1)=0,4. В случае наступления события B2 во втором списке станет 10 человек, из которых 3 женщины, поэтому условная вероятность P(A/B2)=0,3.

Найдем вероятность события A по формуле полной вероятности: P(A)=P(A/B1)\*P(B1)+P(A/B2)\*P(B2)=0,4\*0,7+0,3\*0,3=0,37.

1. Обозначим событие С – из второго списка извлечена фамилия мужчины. Тогда P(C)=1-P(A)=1-0,37=0,63.

Аналогично предыдущему пункту. В случае наступления B1 во втором списке станет 10 человек, из них 6 мужчин. Поэтому условная вероятность P(С/B1)=0,6. Или это 1-P(A/C1)=1-0,4=0,6. В случае наступления события B2 во втором списке станет 10 человек, из которых 7 мужчин, поэтому условная вероятность P(A/B2)=0,7.

Нам нужно найти P(B1/C). По формуле Байеса:

 .

**Задача 9**

Выборка состоит из независимых случайных величин с распределением . Гипотеза проверяется против . Критерий: отвергнуть , если .

а) Какому уровню значимости соответствует этот критерий при *n* = 1?

б) Каким должен быть объём выборки, чтобы обеспечить мощность не менее 0.98?

**Решение**

а) Пусть H0 верна, так что . Ошибка первого рода произойдёт в случае . Уровень значимости задаёт допустимую вероятность ошибки первого рода и равен

 ) =)=0.3085.

б) Мощность — вероятность отвергнуть H0, когда верна HA.

Пусть верна HA, так что Соответственно, . Центрируем и нормируем: .

Чтобы мощность равнялась 0.98, нужно чтобы ). Отсюда:

По таблицам нормального распределения , так что .

Получаем .

Значит, наименьший объём выборки, обеспечивающий нужную мощность — 17 наблюдений.

**Задача 10**

Фармацевтическая компания оценивает уравнение спроса на леденцы от кашля, где количество проданных упаковок леденцов (Q, шт.) зависит от цены (P, руб.) и сезона (D – дамми-переменная, которая принимает значение 1 зимой и осенью, 0 – весной и летом):

По 36 наблюдениям получены следующие результаты:

1. Проверьте гипотезу о том, что спрос менее чувствителен к цене осенью и зимой, чем весной и летом.
2. Проверьте гипотезу о значимости модели в целом.

**Решение**

1. Необходимо проверить следующую пару гипотез: (коэффициент перед ценой отрицательный, для того, чтобы реакция на цену в осенне-зимний сезон была меньше, должно быть ближе к нулю). Расчетное значение тестовой статистики: . При этом известно, что . Тогда . При подстановке имеем . Критические значения тестовой статистики (односторонняя альтернатива): .

Расчетное значение тестовой статистики меньше критического для уровня значимости 0.01, следовательно, нулевая гипотеза не отвергается, нет оснований считать, что спрос осенью и зимой менее чувствителен к цене. Для уровней значимости 0.05 и 0.1, наоборот, расчетное значение больше критического и нулевая гипотеза отвергается: нельзя утверждать, что реакция спроса на цену одинакова во все сезоны года.

1. Гипотеза о значимости модели в целом формулируется следующим образом: . Поскольку известен , для проверки этой гипотезы воспользуемся следующей формулой для расчетной статистики: . Критические значения тестовой статистики:. Расчетное значение больше критического для любого из трех уровней значимости, следовательно, модель в целом значима на каждом из них.