

# Коэффициенты манипулируемости и алгоритмы их расчета для правил коллективного выбора

Александр Иванов,  
аспирант ИПУ РАН,  
стажер-исследователь МЦАВР НИУ ВШЭ

# Проблема манипулирования

1. Недиктаторская процедура голосования с  $n$  участниками и  $m > 2$  альтернативами
2. Каждый участник имеет предпочтения (линейный порядок) на множестве альтернатив
3. На основе предпочтений всех участников подсчитывается коллективный выбор по определенному правилу

**Проблема манипулирования:** участник голосования или группа участников предъявляют неискренние предпочтения, чтобы добиться лучшего для себя коллективного выбора

# Коалиционное манипулирование

- Отсутствует манипулирование

Кол-во агентов	3	2	2
1 место	a	b	c
2 место	b	c	b
3 место	c	a	a

(Правило относительного большинства)

Выбор: {a}

# Коалиционное манипулирование

## ■ Отсутствует манипулирование

Кол-во агентов	3	2	2
1 место	a	b	c
2 место	b	c	b
3 место	c	a	a

(Правило относительного большинства)

Выбор: {a}

## ■ Манипулирование

Кол-во агентов	3	2	2
1 место	a	b	<b>b</b>
2 место	b	c	<b>c</b>
3 место	c	a	a

Выбор: {b}

# Цель исследования

- Исследования Гиббарда и Саттэртуэйта (1973,1975): любая недиктаторская процедура коллективного выбора является манипулируемой
- Можем ли мы определить наименее манипулируемое правило коллективного выбора?

# Предмет исследования

- 3, 4, 5 альтернатив ( $m$ )
- От 3 до 100 участников голосования ( $n$ )
- У каждого участника есть предпочтения – линейный порядок на множестве альтернатив (один из  $m!$  порядков). Совокупность участников и их предпочтений – это профиль.
- На основе предпочтений участников высчитывается результат правила коллективного выбора (подмножество множества альтернатив)
- Манипулирование происходит, если участник (индивидуальное манипулирование) или группа участников (коалиционное манипулирование) могут записать в бюллетень неискренний выбор, чтобы добиться лучшего для себя исхода голосования

# Правила коллективного выбора

1. Правило относительного большинства (Plurality)
  2. Одобряющее голосование  $q=2$  (Approval  $q=2$ )
  3. Правило Борда (Borda's Rule)
  4. Процедура Блэка (Black's Procedure)
  5. Пороговое правило (Threshold Rule)
  6. Процедура Нансона (Nanson's Procedure)
  7. Правило Хара (Hare's Rule)
- ... всего более 30 правил

# Правила коллективного выбора

Участник 1	Участник 2	Участник 3	Участник 4	Участник 5	Участник 6
a	a	a	d	d	b
b	d	c	b	b	c
c	c	d	c	c	d
d	b	b	a	a	a

1. Относительное большинство  $C(P)=\{a\}$
2. Одобряющее голосование  $q=2$   $C(P)=\{b\}$
3. Процедура Хара  $C(P)=\{a,d\}$
4. Правило Борда  $r(a)=r(b)=9, r(c)=8, r(d)=10$   $C(P)=\{d\}$
5. Процедура Блэка  $C(P)=\{a,d\}$
6. Процедура Нансона  $C(P)=\{a,d\}$
7. Пороговое правило  $C(P)=\{c\}$



# Множественный выбор

Если несколько альтернатив показывают одинаковый результат, то все такие альтернативы входят в коллективный выбор.

Для участников голосования используются расширенные предпочтения для устранения несравнимости (Лексимин, Лексимакс и т.д.).

Иные способы:

1. Алфавитное устранение несравнимости
2. Случайное устранение несравнимости

# Расширенные предпочтения

Главное предположение: мы можем сравнивать все наборы альтернатив

Для 3-х альтернатив – 4 метода

- Лексимин  $\{a\} \succ \{a,b\} \succ \underline{\{b\}} \succ \{a,c\} \succ \{a,b,c\} \succ \{b,c\} \succ \{c\}$
- Лексимакс  $\{a\} \succ \{a,b\} \succ \underline{\{a,b,c\}} \succ \{a,c\} \succ \{b\} \succ \{b,c\} \succ \{c\}$
- Рискофоб  $\{a\} \succ \{a,b\} \succ \underline{\{b\}} \succ \{a,b,c\} \succ \{a,c\} \succ \{b,c\} \succ \{c\}$
- Рискофил  $\{a\} \succ \{a,b\} \succ \underline{\{a,c\}} \succ \{a,b,c\} \succ \underline{\{b\}} \succ \{b,c\} \succ \{c\}$

4 альтернативы – 10 методов;

5 альтернатив – 12 методов

# Индекс Нитцана-Келли

Самый известный в литературе коэффициент – индекс Нитцана-Келли, равный доле манипулируемых профилей

$$NK = \frac{d_0}{d_{\text{общее}}}$$

При генерации профилей мы помечаем каждый профиль либо как манипулируемый, либо как неманипулируемый

# Свобода манипулирования ( $I_1$ )

Индекс позволяет измерить, в каком количестве случаев попытка манипулирования приведет к улучшению, ухудшению или неизменности выбора для участника

Для каждой попытки манипулирования для каждого участника сравниваем итог голосования после попытки манипулирования с первоначальным (лучше, хуже, такой же)

$I_1^+$  - доля попыток манипулирования, в которых выбор становится лучше (для манипулирующего участника)

$I_1^-$  - доля попыток манипулирования, в которых выбор становится хуже

$I_1^0$  - доля попыток манипулирования, в которых выбор остаётся прежним

Сумма индексов равна 1

# Эффективность манипулирования ( $I_2$ и $I_3$ )

Индексы позволяют измерить, каким будет средний или максимальный выигрыш участника от манипулирования

Индекс  $I_2$ :

Для каждой успешной попытки манипулирования смотрим, насколько улучшился выбор для манипулирующего участника. Усредняем по всем успешным попыткам манипулирования по каждому профилю.

Индекс  $I_3$ :

Для каждого участника смотрим, чему равен максимальный выигрыш от успешной попытки манипулирования. Усредняем по всем участникам по каждому профилю.

# Расширенные предпочтения

Главное предположение: мы можем сравнивать все наборы альтернатив

Для 3-х альтернатив – 4 метода

- Лексимин  $\{a\} \succ \{a,b\} \succ \underline{\{b\}} \succ \{a,c\} \succ \{a,b,c\} \succ \{b,c\} \succ \{c\}$
- Лексимакс  $\{a\} \succ \{a,b\} \succ \underline{\{a,b,c\}} \succ \{a,c\} \succ \{b\} \succ \{b,c\} \succ \{c\}$
- Рискофоб  $\{a\} \succ \{a,b\} \succ \underline{\{b\}} \succ \{a,b,c\} \succ \{a,c\} \succ \{b,c\} \succ \{c\}$
- Рискофил  $\{a\} \succ \{a,b\} \succ \underline{\{a,c\}} \succ \{a,b,c\} \succ \underline{\{b\}} \succ \{b,c\} \succ \{c\}$

4 альтернативы – 10 методов;

5 альтернатив – 12 методов

# Разрешимость

Индекс разрешимости показывает, какое среднее количество альтернатив входит в исход голосования

Некоторые правила могут показывать очень низкую манипулируемость за счёт низкой разрешимости.

Например, если правило в большинстве профилей даёт результат  $\{a, b, c\}$ , то разрешимость и манипулируемость будут низкими, равно как и практическая польза такого правила

# Генерация профилей

- Профиль – совокупность участников голосования и их предпочтений на множестве альтернатив
- Общее количество профилей огромно, поэтому мы генерируем 1 млн профилей, чтобы посчитать степень манипулируемости
- При такой генерации погрешность при расчете индексов манипулируемости не превышает 0.001 (Карабекян, 2012)



# Схема компьютерного моделирования

1. Генерация 1,000,000 профилей
2. Для каждого профиля считаем выбор (разрешимость)
3. Для каждого профиля рассматриваем каждого участника голосования
4. Для каждого участника голосования рассматриваем все возможные попытки манипулирования ( $m!-1$ )
5. Если хотя бы одна успешная попытка, профиль помечается как манипулируемый (НК)
6. Для каждой попытки помечаем, приводит она к улучшению или ухудшению ( $I_1$ )
7. Для каждого участника считаем средний выигрыш от манипулирования по всем его попыткам ( $I_2$ )
8. Для каждого участника считаем максимальный выигрыш от манипулирования по всем его попыткам ( $I_3$ )

# Индивидуальное манипулирование

- Наиболее исследованный раздел манипулируемости правил коллективного выбора
- Для каких-то частных случаев есть формулы для расчета коэффициентов манипулируемости
- Тем не менее, даже здесь для многих правил вывести формулы трудно или невозможно
- Статья: Aleskerov F. T., Ivanov A., Karabekyan D., Yakuba V. I. Manipulability of Aggregation Procedures in Impartial Anonymous Culture // Procedia Computer Science. 2015. No. 55. P. 1250-1257.
- Наименее манипулируемые правила: процедура Хара, правило Нансона

# Экономия во времени

- Участники голосования для нас эквивалентны
- В заданном профиле не требуется проверять всех участников на попытки манипулирования
- Достаточно проверить не более  $m!$  участников
- Если  $n$  достаточно большое (например, 100), то это даёт экономию на порядок ( $m!=6$  для 3 альтернатив)

# Коалиционное манипулирование

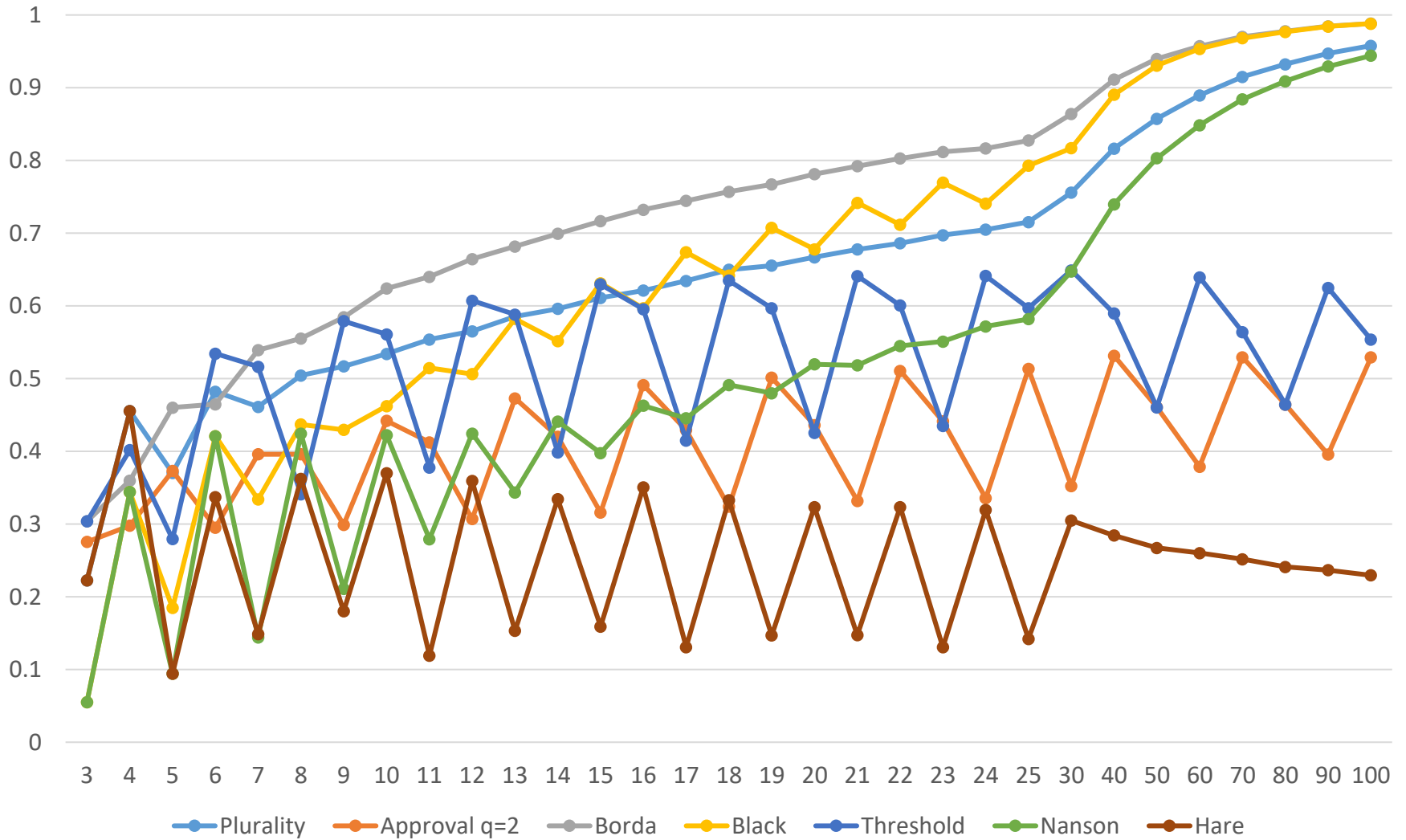
- Главный вопрос: по какому принципу участники могут объединяться в коалиции?
- Вариант 1: объединяются участники с одинаковыми предпочтениями (возможно ограничение на максимальный размер коалиции) и манипулируют одинаково
- Вариант 2: объединяются участники, которые хотят продвинуть одного и того же кандидата и манипулируют как угодно
- Aleskerov F. T., Karabekyan D., Ivanov A., Yakuba V. I. Manipulability of majoritarian rules by coalitions with the same first-ranked alternative, in: *Procedia Computer Science Vol. 122: 5th International Conference on Information Technology and Quantitative Management, ITQM 2017*. Elsevier, 2017. P. 993-1000.

# Экономия во времени

- Участники голосования для нас эквивалентны
- Количество коалиций огромно (комбинаторное число)
- Но мы можем рассматривать не все коалиции, а только по количеству представителей каждого типа предпочтений
- Суммарно ведётся перебор по размеру коалиции, а также по её разбивке на представителей каждого из  $m!$  типов предпочтений

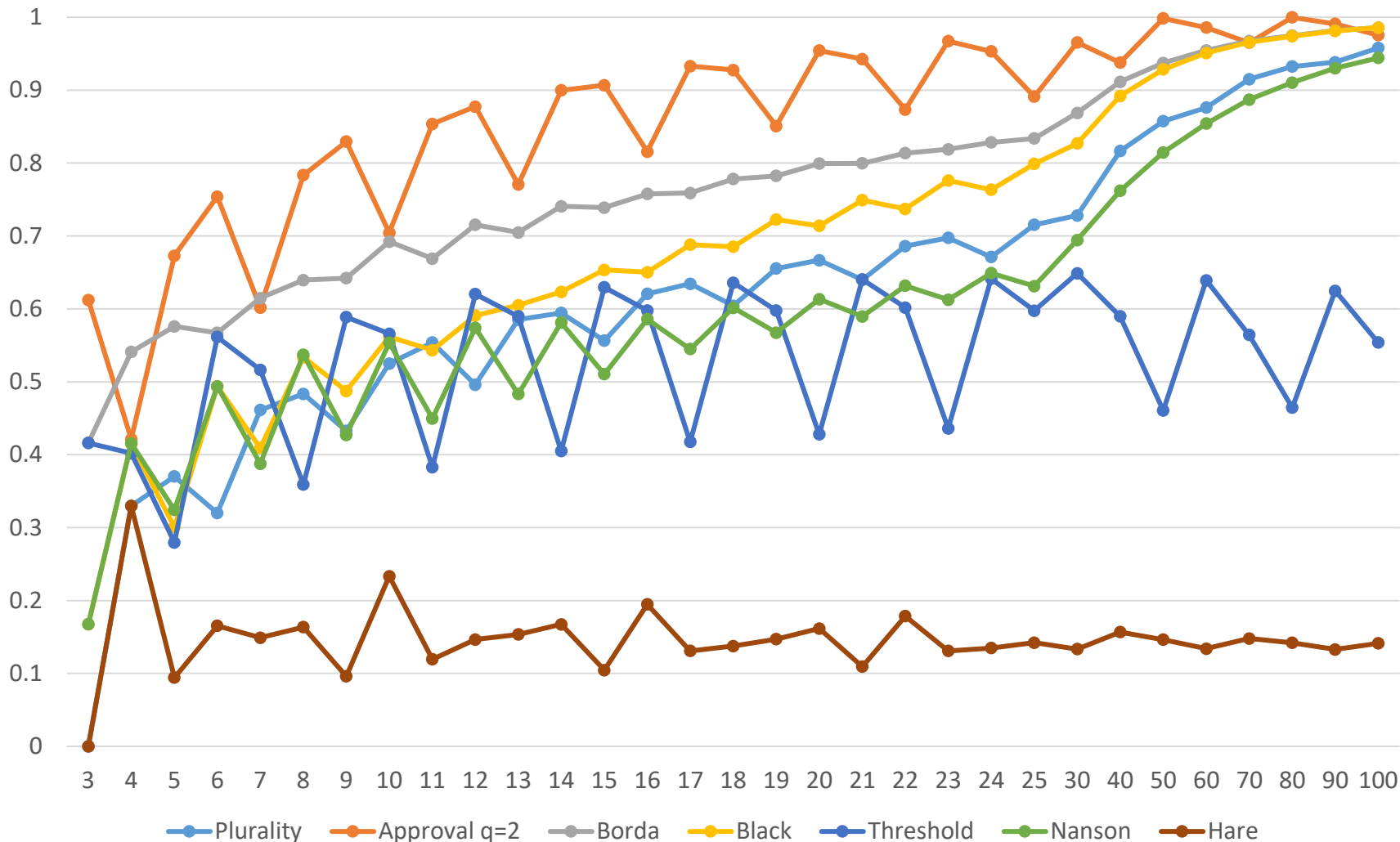
# Пример результатов

NK index, коалиционное, Leximin



# Пример результатов

NK index, коалиционное, Leximax



# Распределение вычислений

- Возможность запуска на нескольких ЭВМ
- Разбивка программы на пакеты вычислений
- Для случая 5 альтернатив расчёты занимали несколько дней
- Для случая 3 альтернатив расчёты укладывались в несколько часов



**Спасибо!**