НОД BI 2019

№1 ТС

Найти для всех возможное значение величины

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! - (n+1)!$$

$\square$ $S_1 = -1$, $S_{n+1} = \sum_1^n + (n+1)(n+1)! - \underbrace{(n+2)!}_{=(n+2)(n+1)!} =$

$= \sum_1^n - (n+1)! = S_n \Rightarrow$ $\boxed{\text{Отв: } -1}$

№2 Алгебра

Пусть задана послед. $\{V_n\}_0^\infty$ такая что $V_0 = c_0$, $V_1 = c_1$, $V_2 = c_2$, вычислить для всех $n \geq 2$

$$V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} + tV_{n-3},\ n\geq 3$$

$$\begin{vmatrix} V_{n+2} & V_{n+1} & V_n \\ V_{n+1} & V_n & V_{n-1} \\ V_n & V_{n-1} & V_{n-2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_4 & V_3 & V_2 \\ V_3 & V_2 & V_1 \\ V_2 & V_1 & V_0 \end{vmatrix}^{-1}$$

док. что ответ t^{n-2} по индук.

$\square$ $n=2$ получ. 1

$$\begin{vmatrix} V_{n+3} & V_{n+2} & V_{n+1} \\ V_{n+2} & V_{n+1} & V_n \\ V_{n+1} & V_n & V_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} rV_{n+2} + sV_{n+1} + tV_n & \dots \\ rV_{n+1} + sV_n + tV_{n-1} & \dots \\ rV_n + sV_{n-1} + tV_{n-2} & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= r\begin{vmatrix} V_{n+2} & V_{n+2} & V_{n+1} \\ V_{n+1} & V_{n+1} & V_n \\ V_n & V_n & V_{n-1} \end{vmatrix} + s\begin{vmatrix} V_{n+1} & V_{n+2} & V_{n+1} \\ V_n & V_{n+1} & V_n \\ V_{n-1} & V_n & V_{n-1} \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} V_n & V_{n+2} & V_{n+1} \\ V_{n-1} & V_{n+1} & V_n \\ V_{n-2} & V_n & V_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= t\begin{vmatrix} V_n & V_{n+2} & V_{n+1} \\ V_{n-1} & V_{n+1} & V_n \\ V_{n-2} & V_n & V_{n-1} \end{vmatrix} \overset{\text{2 перест.}}{=} t\begin{vmatrix} V_{n+2} & V_{n+1} & V_n \\ V_{n+1} & V_n & V_{n-1} \\ V_n & V_{n-1} & V_{n-2} \end{vmatrix}$$ т.е. $\Delta_{n+1} = t\Delta_n$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta_n = t^{n-2}}$ $\square$

№1 ТС

$\begin{cases} x = 2(6) \\ x = 5(9) \end{cases}$

$x = 2 + 6n \Rightarrow 6n = 3(9) \Rightarrow 2n = 1(3) \Rightarrow$

$n = 2(3) \Rightarrow n = 2 + 3m \Rightarrow$

$x = 14 + 18m$ $\quad x \equiv 14(m)$

НОД вдоп. 2019

№1 ТЧ

Найти все целые a такие, что ур-ие $x^2-2019x+2018a+1=0$ имеет целые корни.

□ Т. Виета $\begin{cases} x_1x_2=2018a+1 \\ x_1+x_2=2019 \end{cases}$ $\Rightarrow$ x_1, x_2 – нечет, что противоречит тому что их сумма нечет

Отв: таких a нет

№2 Алг

$X=(x_1,\dots,x_n)$ набор из n натуральных чисел.

Определим $A(X)=(a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij}=(x_i,x_j)$.

Для $X=\{1,2,3,6\}$ найти $A(X)^{-1}$

□ $A(X)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -3/2 & -1 & 1/2 \\ -3/2 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Физтех В I 2019

№1 (ТЧ)

Пусть n - ~~нат~~ натуральное. Для всех целых a вычислить $\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i \frac{ak}{n}}$

□ если $a \equiv 0(n)$ то $e^{2\pi i \frac{ak}{n}} = 1 \Rightarrow$ ответ n;
если $a \not\equiv 0(n)$ то у нас геометр прогрессия
$q = e^{2\pi i a/n}$ то $\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q(1-q^n)}{1-q} = 0$ т.е. $q^n = 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Отв: } n \text{ при } a \equiv 0(n),\ 0\ \ a \not\equiv 0(n)}$

№2 Алг

Пусть задана последов $\{V_n\}_0^\infty$ $V_0 = c_0$, $V_1 = c_1$,
$V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2}$, $n \geq 2$. Для всех $n \geq 1$ найти

$$\begin{vmatrix} V_{n+1} & V_n \\ V_n & V_{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_2 & V_1 \\ V_1 & V_0 \end{vmatrix}^{-1} - ?$$

□ $n = 1$ получ. 1

$$\begin{vmatrix} V_{n+2} & V_{n+1} \\ V_{n+1} & V_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} rV_{n+1} + sV_n & V_{n+1} \\ rV_n + sV_{n-1} & V_n \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} V_n & V_{n+1} \\ V_{n-1} & V_n \end{vmatrix}$$

$$= -s \begin{vmatrix} V_{n+1} & V_n \\ V_n & V_{n-1} \end{vmatrix}$$ т.е. при $n=2$ $(-s)$, $n=3$ $(-s)^2$, … n $(-s)^{n-1}$ по индукц.

$\boxed{\text{Отв: } (-s)^{n-1}}$ □

№3 Алг2

$A_{m\times n} = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$ такая что $\forall j = 1..n$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1$,
$\forall i = 1..m$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$

Найти все неквадратные матрицы

□ $n = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}_{=1} = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}_{=1} = m$ т.е. таких нет, все квадратные □

№4 матан 1

~~вычислить~~ $\frac{d}{dt}$ ~~angle~~ $f\in C^2(\mathbb{R})$, $f(x^2)=f(x)+x^2$
найти $f'(1)$ и $f''(1)$

$\square$ $2xf'(x^2)=f'(x)+2x$, $\quad 2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)=f''(x)+2$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

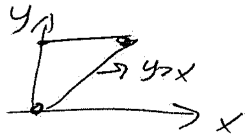
$2f'(1)=f'(1)+2 \Rightarrow \boxed{f'(1)=2}$ $\quad 2f'(1)+4f''(1)=f''(1)+2$

$3f''(1)=2-2f'(1)=-2$

$\boxed{f''(1)=-2/3}$ $\blacksquare$

№5 матан 2

вычислить $\iint_\Omega e^{-y^2}dxdy$ Ω − треугольник с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$



$\square$ $\int_0^1\left(\int_x^1 e^{-y^2}dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^y e^{-y^2}dx\right)dy=$

не вычисляется

$=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\frac{e^{-y^2}}{-2}\Big|_0^1=\frac{e^{-1}}{-2}-\frac{1}{-2}=\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}}$

№6 ДУ

решить $e^{-y}dy+dx+2xdy=0$

$\square$ $\frac{dx}{dy}+2x=-e^{-y}$, $\quad \frac{dx}{dy}=-2x \Rightarrow \frac{dx}{x}=-2dy$ метод вариации пост.

$\ln x=-2y+C \quad x=e^{-2y}C$

$x=e^{-2y}C(y) \Rightarrow e^{-2y}C'-2e^{-2y}C+2e^{-2y}C=-e^{-y}$

$\frac{dC}{dy}=-e^{y} \Rightarrow C=-e^{y}+C_1 \Rightarrow$

$\boxed{x(y)=-e^{-y}+Ce^{-2y} \quad C\in\mathbb{R}}$

№7

$S_n=\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!-(n+1)!$

$\square$ $S_1=-1$, $S_{n+1}=\sum_1^n+(n+1)\cdot(n+1)!-\underbrace{(n+2)!}_{(n+2)(n+1)!}=$

$=\sum_1^n-(n+1)!=S_n \Rightarrow \boxed{-1}$

ФТ2019ВТ2

№8 тервер

Из чисел 1, 2, 3, .. 9 случайным образом составлена матрица размера 3x3 (при этом использованы все числа). Какова вероятность того, что сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце нечетна?

□ чет числа 2, 4, 6, 8 нечет, 1, 3, 5, 7, 9

⇒ есть ряд где ≥2 нечетных. но т.к. Σ нечетно ⇒ в нем должно быть 3 нечет.. Также со столбцами.

т.е. надо просто выбрать 4 места где четные.

всего вариантов $C_9^4 = \frac{9!}{5!4!}$ нам подходят

берем любую строку и любой столбец где нечет 3 варианта

т.к. строк 3, то итого $3\cdot3=9$ подход вар.

⇒ Отв: $\frac{9}{C_9^4} = \frac{9\cdot5!4!}{9!} = \frac{4\cdot3\cdot2}{8\cdot7\cdot6\cdot\ldots} = \boxed{\frac{1}{14}}$

№9 Алгор

problems 73710

Рассмотрим урав $x_1+x_2+x_3=m$ относит. неотрицательных целых x_i. Выберем N его решений так, чтобы ни в каких двух из выбранных решений ни одна переменная x_i не принимала одного и того же значения. Найти наибол. возможное значение N?

□

	x_1	x_2	x_3
N			

Табл. такая что Σ по строке $= m$

сумма в столб $\geq 0+1+\ldots+N-1 = \frac{N(N-1)}{2}$

$\Rightarrow$ в Σтабл $\geq 3\frac{N(N-1)}{2}$

но Σтабл $= m\cdot N \Rightarrow$ $mN \geq \frac{3N(N-1)}{2}$

$N-1 \leq \frac{2m}{3}$ $\boxed{N \leq \frac{2m}{3}+1}$

$m=3l \Rightarrow N \leq 2l+1$

$m=3l+1 \Rightarrow N \leq 2l+1+1/3 \Rightarrow N \leq 2l+1$ остается пример.

$m=3l-1 \Rightarrow N \leq 2l+1/3$ $N \leq 2l$

ФТ 2013 В I 3

$m = 3l + t \quad (t = 0, 1)$

0	l	$2l+t$
2	$l-1$	$2l+t-1$
4	$l-2$	$2l+t-2$
$\vdots$		
$2l$	0	$l+t$
1	$2l$	$l+t-1$
3	$2l-1$	$l+t-2$
5	$2l-2$	$l+t-3$
$\vdots$		
$2l-1$	$l+1$	t

$N = 2l+1$

$m = 3l - 1$

0	$l-1$	$2l$
2	$l-2$	$2l-1$
4	$l-3$	$2l-2$
$2l-2$	0	$l+1$
1	$2l-1$	$l-1$
3	$2l-2$	$l-2$
5	$2l-3$	$l-3$
$2l-1$	l	0

$N = 2l$

№10 тервер (65785)

Проезд в автобусе стоит 50 рублей. В случае, если безбилетник попадется кондуктору, то он обязан оплатить ~~за~~ проезд (50 рублей) и заплатить штраф в 950 руб. Известно, что кондуктор в среднем проверяет один автобус из двадцати. С какой вероятностью студент будет оплачивать проезд, если его цель - свести математ. ожидание своих расходов к минимально возможным.

Пусть вероятность куп. билет p, вероят. конт. $q = 1/20$

50	$50+950$	0
p	$(1-p)\cdot q$	$(1-p)(1-q)$

$\Rightarrow$

$EX = 50p + 1000(1-p)\cdot 1/20 = 50p + 50(1-p) = 50$

Отв. p - любое

Финтех ВII 2019

№1 ТЧ

Для всех целых $k, n \geq 1$ найти кол-во целых решений неравенства

$$2(n-\tfrac12)^{1/k} < x < 2\left(n-\tfrac12+\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{1/k}$$

▢ Возводим в k-ую степень

$$2^k(n-\tfrac12) < x^k < 2^k\left(n-\tfrac12+\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 2^k(n-\tfrac12)+\tfrac12$$

$$\underbrace{2^k n - 2^{k-1}}_{\in\mathbb{Z}} < x^k < \underbrace{2^k n - 2^{k-1}}_{\in\mathbb{Z}} + \tfrac12$$ те целых x^k нет! $\Rightarrow$ нет и целых x

$\boxed{\text{Отв } 0}$

№2 АЛ

$X = (x_1 \ldots x_n)$ — набор из n натурал. чисел определим $a_{ij} = \text{НОД}(x_i, x_j)$ для $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ найти

$A(X) = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$

$|A(X)|$

▢ $|A(X)| =$

$$\begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&2&1&2&1&2\\ 1&1&3&1&1&3\\ 1&2&1&4&1&2\\ 1&1&1&1&5&1\\ 1&2&3&2&1&6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&2&0&0&2\\ 0&1&0&3&0&1\\ 0&0&0&0&4&0\\ 0&1&2&1&0&5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1&0&1&0&1\\ 0&2&0&0&2\\ 1&0&3&0&1\\ 0&0&0&4&0\\ 1&2&1&0&5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1&0&1&1\\ 0&2&0&2\\ 1&0&3&1\\ 1&2&1&5 \end{vmatrix} = 4\cdot 2\left[\begin{vmatrix} 1&1&1\\ 1&3&1\\ 1&1&5 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} 1&1&1\\ 0&0&2\\ 1&3&1 \end{vmatrix}\right] = 8\left[\begin{vmatrix} 1&1&1\\ 0&2&0\\ 0&0&4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1&1\\ 1&3 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= 8\left[8 - 2\cdot 2\right] = \boxed{32}$$

Можно и просто к верхне треуг. виду приводив

$$\begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&2&0&0&2\\ 0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&4&0\\ 0&0&0&0&0&2 \end{vmatrix} = 32$$

№3 Алг2

Найти матрицу A с действ коэф, такую что

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□ $\det(\text{п.ч}) < 0$, $\det A^2 \geq 0$ ⇒ таких A не существует □

№4 матан 1

Вычислить $\frac{d}{dt}\arg(e^{it}+2)$

□ $\arg(e^{it}+2) = \operatorname{arctg}\frac{\sin t}{2+\cos t}$ ⇒

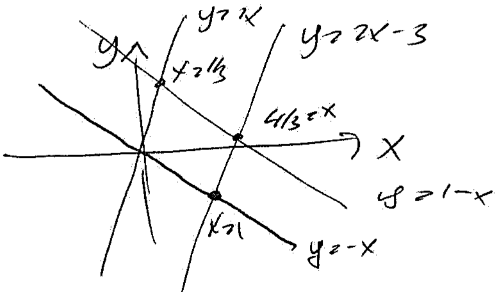
$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sin t}{2+\cos t}\right)^2}\cdot\frac{\cos t(2+\cos t)-\sin t(-\sin t)}{(2+\cos t)^2} =$$

$$= \frac{2\cos t+1}{4+4\cos t+1} = \boxed{\frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}}$$ □

№5 матан 2

Вычислить $\iint\limits_D (x+y)^2\,dx\,dy$ где D — параллелограмм, ограниченный $x+y=0$, $x+y=1$, $2x-y=0$, $2x-y=3$

□



$u = x+y \quad v = 2x-y$.

$$\boxed{0<u<1 \quad 0<v<3}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3\end{vmatrix} = -1/3$$

$x = \frac{u+v}{3}$

$y = \frac{2}{3}u - \frac{v}{3}$ в интеграл пишем $|J|$!

$$I = \int_0^3\int_0^1 u^2\,\frac{1}{3}\,du\,dv = 1/3$$

$\boxed{№ 6Ә9}$

решить $y'' + 3y' + 2y = e^x - 3$

$\square$ $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$ $y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{-2x}$

$y_r = Ae^x + B$ $A = 1/6,\ B = -3/2$

$y_r'' + 3y_r' + 2y_r = 6Ae^x + 2B$

$\boxed{\text{Отв. } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{e^x}{6} - \frac{3}{2}}$

$\boxed{\text{№ 8 тервер}}$

Сколькими способами можно раскрасить числа 2, 3, ... 9 в красный, зеленый и голубой так, чтобы каждое число имело другой цвет нежели любой из его несобственных делителей

$\square$ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

5, 7 в любой цвет тк нет делителей $\Rightarrow$ $\boxed{9\text{ вар}}$

2 — $\boxed{3\text{вар}}$

пусть 2 - красным $\Rightarrow$ 4, 6, 8 не красные.

8 - автоматически

для 4 - $\boxed{2\text{ вар}}$ тогда.

для 6 - $\boxed{2\text{вар}}$ $\Rightarrow$ для 3 - $\boxed{2\text{ вар}}$ $\Rightarrow$ 9 - ~~автом~~ 2 - вр

$9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{432}$ ← Ответ

ит

2, 4, 8 - должны быть разными $\Rightarrow$ 6 вар

5, 7 - любые $\Rightarrow$ 9 вар

2 - покрашено $\Rightarrow$ у 6 - 2 вар $\Rightarrow$ у 3 - ~~2~~ вар

$\Rightarrow$ у 9 - 2 вар

№ 7.

пусть $x = \frac{7}{51}$. ~~Для~~ Известно, что для некоторого натурального k в k-ичной системе число x записывается

$0,\overline{23}_k = 0,232323\ldots_k$. Найти k

2039ТВЙ_3

$0,\overline{23}_k = 2k^{-1}+3k^{-2}+2k^{-3}+3k^{-4}+\ldots = 2\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k^3}+\ldots\right)+$

$+3\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^4}+\ldots\right) = 2\,\frac{1/k}{1-1/k^2}+3\,\frac{1/k^2}{1-1/k^2} = \frac{2k}{k^2-1}+\frac{3}{k^2-1}$

$= \frac{2k+3}{k^2-1} = \frac{7}{51} \Rightarrow 7k^2-7=102k+153$

$7k^2-102k-160=0$

$k_{1,2} = \frac{102\pm\sqrt{102^2+4\cdot7\cdot160}}{14} = \frac{51\pm\sqrt{51^2+7\cdot160}}{7} = \frac{51\pm61}{7} = \boxed{16}$

// $(2k+3)\cdot\underbrace{51}_{3\cdot17} = 7(k-1)(k+1)$ $\Rightarrow$ кто-то должен делиться на 17

$k=1+17l$. $k=-1+17l$ $\boxed{k=16}$ //

$\boxed{\text{№ 9 Ответ}}$

реш 57993

Сколькими способами можно записать числа $1, 2, 3 \ldots N$ в строку так, что если где-то (не на первом месте) записано число i, то где-то слева от него встретилось хотя бы одно из чисел $i+1$ и $i-1$.

$\{\sigma_1 \ldots \sigma_N\}$

σ_{i_1} σ_{i_2} $\sigma_{i_{k-1}}$

$\exists$ пусть $\sigma_1 = k$ если $k>1$ то $k-1, k-2, \ldots 1$

$i_1 < i_2 \ldots < i_{k-1}$

т.к. левее 1 должно стоять 2, левее 2. только должно быть 3. и т.д.

если $k<N$ то $k+1, k+2 \ldots N$ стоят в порядке возрас (т.к. левее N должно $N-1$, левее $N-1$. должно $N-2$)

(при $k=1$ получ $1, 2, \ldots N$)

т.е. достаточно расставить $k-1 \ldots 1$

т.е. если мы выбер места позиций из $(N-1)$ элемент расставить все $k-1 \ldots 1$ k - на первое место

$\underbrace{\circ \quad \circ \quad \circ}_{N-1 \text{ эл}}$ то все

$\Rightarrow \boxed{\text{От } 2^{N-1}}$

N10 тервер 66048

В воинскую часть прибыло n призывников. Все они разного возраста (возраст определяется до дня). С вероятностью p между каждыми двумя призывниками завязывается дружба. По окончании службы (через год) в каждой паре друзей старший дает младшему совет. Найти мат. ожид. числа тех солдат, кто так вообще не получил ни одного совета.

$\square$ $1, \ldots, n$ — призыв

1 — самый стар, n — самый млад

k может получить совет от $k-1$ солдат

$$\Rightarrow P(\underbrace{k \text{ без совета}}_{I_k}) = (1-p)^{k-1} \Rightarrow E I_k = (1-p)^{k-1} \Rightarrow$$

$$E(I_1 + \ldots + I_n) = (1-p)^0 + \ldots + (1-p)^{n-1} = \boxed{\frac{1-(1-p)^n}{p}}$$

Физтех В Доп. 2019

№1 ТЧ

Пусть $\chi_4(m) = \begin{cases} 0 & m \equiv 0(4) \\ 1 & m \equiv 1(4) \\ -1 & m \equiv 3(4) \end{cases}$, $W(n) = \sum_{d|n} \chi_4(d)$. Вычисли / докажи, что для $(m_1, m_2) = 1$ $W(m_1 m_2) = W(m_1) W(m_2)$

пусть $f: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$ такое, что $\forall (m,n)=1$ $f(mn) = f(m) f(n)$

$\square$ $\sum_{d_1|m_1} \sum_{d_2|m_2} f(d_1 d_2) = \sum_{d|m_1 m_2} f(d)$ очев. т.к. $(m_1, m_2) = 1$ $\square$

№2 Алг

Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $abc = 1$

$$A(\nu, \mu) = \begin{vmatrix} a^{\nu+\mu+2} & b^{\nu+\mu+2} & c^{\nu+\mu+2} \\ a^{\mu+1} & b^{\mu+1} & c^{\mu+1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1}$$

найти $A(1, 0)$ и $A(0,1)$

$A(0,1) = ab + ac + bc$

$\square$ $A(1, 0) = a + b + c$,

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ a & b-a & c-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2-a^2 & c^2-a \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} b+a & c+a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)$$

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^3-a^3 & c^3-a^3 \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(b^2 + ba - c^2 - ca) = (b-a)(c-a)(b-c)(b+c+a)$$

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \left\{ b^2c + b^2a + abc + ba^2 + a^2c + a^3 - bc^2 - abc - bc^2 - ac^2 - a^2c - a^3 \right\} = (b-a)(c-a)\left[bc(b-c) + a(b-c)(b+c)\right]$$

$$= (b-a)(c-a)(b-c)\left[bc + ab + ac\right]$$ $\square$

2019 ФТ Доп 1

N3 Алг2

Пусть P_n – пространство многочленов степени $\leq n$. с действ. коэф

Определить скалярное произведение в P_n так, чтобы $1, t, \frac{t^2}{2!}, \ldots \frac{t^n}{n!}$ стал ортонормированным базисом

$\square$ $\left(\frac{t^i}{i!}, \frac{t^j}{j!}\right)=0 \quad i\neq j \quad \left(\frac{t^i}{i!}, \frac{t^i}{i!}\right)=1$

$f(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n \quad g(t)=b_0+b_1t+\ldots+b_nt^n$

надо убрать факториалы те

$f(t)=a_0+a_1\cdot 1!\frac{t}{1!}+\ldots+a_n n!\frac{t^n}{n!}$, $g(t)$ аналог

тогда берем обычное скалярное произв векторов

$(a_0, a_1\cdot 1!, \ldots a_n n!)$ и $(b_0, b_1\cdot 1!, \ldots b_n n!)$ те $\square$

$$\langle f,g\rangle=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i (i!)^2$$

N4 матан 1

Сх-ся ли ряд $\sum_{k\geq 1} a_k$, $a_1=1$, $a_{k+1}=\frac{1}{S_k}$ $k\geq 1$

$$S_k=\sum_{n\geq 1}^{k} a_n$$

$\square$ ряд $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5/2}+\frac{1}{29/10}+\ldots$

пусть сх-ся $\Rightarrow$ $a_k\to 0$ $\Rightarrow$ $S_k\to\infty$!противор $\square$

N5 матан 2

Найти площадь, ограниченной фигуры кривой $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

$\square$ $\begin{cases} x=u\cos^3 t \\ y=u\sin^3 t\end{cases}$ замена пере $(x,y)\to(u,t)$ $0\leq u\leq a$ $0\leq t\leq 2\pi$

якобиан $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos^3 t & -3u\cos^2 t\sin t\\ \sin^3 t & 3u\sin^2 t\cos t\end{vmatrix}=$

$=3u\sin^2 t\cos^2 t\Rightarrow$

2015 ФТ Доп2

$$S = 4\int_0^a \int_0^{\pi/2} 3u \sin^2 t \cos^2 t \, dt \, du = 12 \int_0^a u \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \, dt\right) du$$

$$= 12 \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t}{4} dt = \frac{12a^2}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt =$$

$$= \frac{6a^2}{8} \left[\frac{\pi}{2} - \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} \right] = \boxed{\frac{3\pi a^2}{8}}$$

№6 ДУ

Solve $y' + xy = xy^3$

$\square$ это ур. Бернулли с $n=3$, $z = y^{-2}$ $y \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} y^3 z'$$

$$-\frac{1}{2} y^3 z' + xy = xy^3 \Rightarrow z' - 2xy^{-2} = -2x$$

$$\boxed{z' - 2xz = -2x} \qquad z' = 2xz \qquad \frac{dz}{z} = 2x\,dx$$

$$\ln z = x^2 + C \qquad z = e^{x^2} C(x) \Rightarrow$$

$$2xe^{x^2} C(x) + e^{x^2} C' - 2xe^{x^2} C(x) = -2x$$

$$e^{x^2} C' = -2x \qquad dC = -2xe^{-x^2} dx$$

$$C = -2\int xe^{-x^2} dx = \int e^{-x^2} d(-x^2) = e^{-x^2} + C$$

$$\boxed{z = 1 + Ce^{x^2} \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \boxed{y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{x^2}}}} \\ \boxed{y = 0} \text{ - тоже решение} \end{array}\right.$$

№8 тервер

Даны две монеты. С каждой из них независимо (монета 1 и монета 2) проводится цикл следующих испытаний для определения двух независимых величин x_1 и x_2. Монета-i подбрасывается. Если выпал орел, то она подбрасывается еще раз. Если опять выпал орел, то положим $x_1 = 0$ если выпала

2019 ФТДоп3

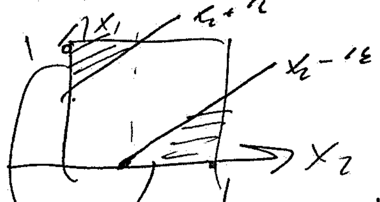
решка то $x_i = 1$. Если же при первом броске монеты-i выпала решка, то x_i выбирается произвольно из отрезка $[0,1]$. Какова вероятность что $|x_1 - x_2| > 1/2$?

$x_i = 0$ или 1 VS $x_i \in [0,1]$
равновероятны

□ 1) $x_1 = 0$ или 1 $x_2 = 0$, или 1
2) $x_1 = 0$ VS 1 x_2 произв $[0,1]$
3) $x_1 \in [0,1]$ x_2 0 или 1
4) $x_1 \in [0,1]$ $x_2 \in [0,1]$

т.е. вероятность каждого из этих четырех событий 1/4

1) надо чтобы $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ вероятность успеха $1/2$
2) $x_1 = 0 \Rightarrow$ надо $x_2 \in (1/2, 1] \Rightarrow$ вероятность $1/2$
$x_1 = 1 \Rightarrow$ надо $x_2 \in [0, 1/2)$
3) аналог. вероятность $1/2$
4) $|x_1 - x_2| > 1/2 \Rightarrow$ неподходит $-1/2 < x_1 - x_2 < 1/2$ $x_2 - 1/2 < x_1 < x_2 + 1/2$



там где $|x_1 - x_2| > 1/2$

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow 2S_\Delta = 1/4$

$\Rightarrow$ итог:
$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{7}{16}}$

№7

$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ найти $\left(z^{1^2} + z^{2^2} + \ldots + z^{12^2}\right)_1\left(\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \ldots + \frac{1}{z^{12^2}}\right)$

$\left(\frac{1}{z}\right)^{1^2} + \ldots \left(\frac{1}{z}\right)^{12^2}$, $\frac{1}{z} = e^{-\pi i/4}$

□ $z = e^{\pi i/4} \Rightarrow z^a = z^{a+8}$

далее $n^2 \equiv (n+4)^2 \pmod 8 \Rightarrow$

$1^2 = 5^2 = 9^2 (8) \Rightarrow z^{1^2} = z^{5^2} = z^{9^2} = z$ $\Rightarrow ()_1 = 3 \cdot 2z = 6z$
$2^2 = 6^2 = 10^2 (8)$ $z^{2^2} = z^{6^2} = z^{10^2} = z^4 = -1$
$3^2 = 7^2 = 11^2 (8)$ $z^{3^2} = z^{7^2} = z^{11^2} = z$ $\Rightarrow \boxed{36}$
$4^2 = 8^2 = 12^2 (8)$ $z^{4^2} = z^{8^2} = z^{12^2} = 1$

$\left(\frac{1}{z}\right)^1 = \frac{1}{z}$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{2^2} = -1$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{3^2} = \frac{1}{z}$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{16} = 1 \Rightarrow ()_2 = 3 \cdot \frac{2}{z} = 6/z$

Доп

[№9 Алгор] 105702

Числа от $1, \dots N$ покрашены в две цвета (~~черн, бел~~)

За ход разрешено выбрать любое число $k \le N$

и перекрасить его и все числа $n \le N$, $(n, k) \ne 1$

в ~~белый~~ противопол цвет. Вначале все были черн.

Можно ли добиться чтобы все стали бел.?

можно за неск шагов

Л: пусть даны $p_1 \dots p_m$ — прост.

перекр. только $n = 0(p_i)$

$\{p_{i1} \dots p_{ik}\}$ — какой-то подмнобор. $P_i = p_{i1} \dots p_{ik}$ И так для всех

перекрасим все числа $(n, P_i) \ne 1$.

подмнобор. (всего их $2^m - 1$). Число $n \equiv 0(p_i)$ $\forall i$

перекраш. каждый раз $\Rightarrow$ $2^m - 1$ раз $\Rightarrow$ стало черн.

Пусть $k \not\equiv 0(p_1)$ (или те хоть бы с одним из p_i)

тогда оно не перекрас при $\forall$ наборе $\{p_1\}$

Остал. подмнобора разбить на пары $\{P_{без\ p_1}\} \vee S \{P_{без\ p_1} \cup p_1\}$

либо k перекраш. при обоих подмнож. либо

ни при одном. И т.д. k не перекраш.

Для каждого набора $\{p_1 \dots p_m\}$ т.е. $p_1 \cdot \ldots \cdot p_m < N$

перекрасим $n = 0(p_i)$.

Док что все $k < N$ перекраш. если $k = p_1 \dots p_m$

то оно перекрас $2^m - 1$ раз те меняет число

2015 CPT Дорт

$\boxed{\text{№10 тервер}}$ (65352)

На экзамен пришло n студентов. Экзаменатор ставит студ. неуд с вероятностью p $(0<p<1)$. Если экзаменатор поставил неуд, то он ставит неуд и всем последующим сдающим. Найти вероятность того что неуд получит ровно k студентов. Найти мат ожидание числа студентов, получ. неуд

□ $q = 1-p$ — вероятность что студент не завалит препод

а) чтобы завалил ~~число~~ k ~~-того~~ студ.

k-ый

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-k \text{ не завал.}}$ → неуд $\Rightarrow$ $\boxed{(1-p)^{n-k}\cdot p}$

б) $I_j = \begin{cases} 1 & j\text{-ый студ неуд} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$ $\quad P(I_j=0) = q^j$ (все до него и он должны сдать)

$\Rightarrow EI_j = 1-q^j \Rightarrow$

$E(I_1+\dots+I_n) = n-q-q^2\dots-q^n = n-q\dfrac{q^n-1}{q-1} =$

$= n+\dfrac{q(q^n-1)}{p} = n-\dfrac{q}{p}+\dfrac{q^{n+1}}{p} = \boxed{n+1-1/p+\dfrac{(1-p)^{n+1}}{p}}$