Физтех Вариант 1

№1.

$p^2-2q^2=1$, p,q − простые − найти их.

$\square$ $(p-1)(p+1)=2q^2 \Rightarrow q^2=\frac{(p-1)(p+1)}{2}$ $p=2$ не подходит $\Rightarrow p$ − нечет $\Rightarrow$

$\frac{(p-1)(p+1)}{2}$ − четное $\Rightarrow q$ − чет $\boxed{q=2 \quad p=3}$

№2

$$\boxed{\int \cos^2(\log x)dx = \frac{x\cos(2\log x)+2x\sin(2\log x)}{10} + x/2 + C}$$

$\log x = y$, $x=e^y$ $dx=e^y dy \Rightarrow \int \underset{\frac{\cos 2y+1}{2}}{\underset{\parallel}{\cos^2(y)}} e^y dy =$

$= \frac{1}{2}\int e^y \cos 2y dy + \frac{1}{2}e^y = \frac{e^y\cos 2y + 2e^y\sin 2y}{10} + e^y/2$ ⊜

$\int e^y \cos 2y dy = \int \cos 2y de^y = e^y\cos 2y - \int e^y 2\cdot -\sin 2y dy =$

$= e^y\cos 2y + 2\int \sin 2y de^y = e^y\cos 2y + 2e^y\sin 2y - 4\int e^y\cos 2y dy$

$\Rightarrow \int e^y \cos 2y dy = \frac{e^y\cos 2y + 2e^y\sin 2y}{5}$

⊜ $\frac{x\cos(2\log x)+2x\sin(2\log x)}{10} + x/2 + C$

№3

Опечатка

$f(x) = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \frac{x}{2}$

$f' = +\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} = 0$ $x_{12} = \pm 1$

$-$ $+$ $-$

-1 1

мин   макс.

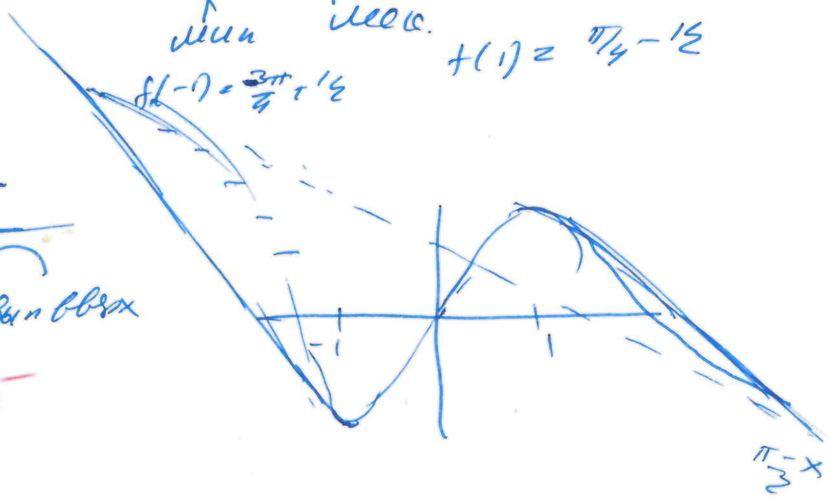
$f(-1) = \frac{3\pi}{4} + 1/2$ $f(1) = \pi/4 - 1/2$

асимпт. $y = \frac{\pi}{2} - x$

$f'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $+$ 0 $-$

вып вниз   вып вверх

см фки 5



Физтех 1

N4

$$\frac{y}{x^2}+1+\frac{y'}{x}=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x^2}+1\right)dx+\frac{dy}{x}=0 \quad |\cdot x^2$$

$$(y+x^2)dx+x\,dy=0 \Rightarrow d\left(xy+\frac{x^3}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow xy+\frac{x^3}{3}=C \quad \Rightarrow \boxed{y=\frac{C}{x}-\frac{x^{\overset{2}{3}}}{3}}$$

N5

$$A=\begin{pmatrix}12 & -51\\ 2 & -11\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}12-\lambda & -51\\ 2 & -11-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-12)(\lambda+11)+102=$$

$$=\lambda^2-\lambda-30=(\lambda-6)(\lambda+5)$$

$$\lambda_1=6,\quad \lambda_2=-5$$

$$Av_1=\lambda_1E \quad \begin{pmatrix}12-\lambda_1 & -51\\ 2 & -11-\lambda_1\end{pmatrix}v_1=0 \qquad \begin{pmatrix}6 & -51\\ +2 & -17\end{pmatrix}v_1=0$$

$$\cancel{\begin{pmatrix}6 & -102\\ 0 & \end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & -17\end{pmatrix}v_1=0 \Rightarrow \boxed{v_1=(17,2)}$$

$$\begin{pmatrix}17 & -51\\ 2 & -6\end{pmatrix}v_2=0 \qquad \begin{pmatrix}1 & -3\\ 17 & -51\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \boxed{v_2=(3,1)}$$

$$P=\begin{pmatrix}17 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad P^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 17\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$$

$$A^n=PD^nP^{-1}=\cancel{\frac{1}{11}\begin{pmatrix}17 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12 & -51\\ 2 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 17\end{pmatrix}}=$$

$$=\cancel{\frac{1}{11}\begin{pmatrix}17 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}114 & -903\\ 24 & -193\end{pmatrix}}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}17 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6^n & 0\\ 0 & (-5)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 17\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}17 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6^n\,\cancel{-2(-5)^n} & -3\cdot6^n\,\cancel{+17(-5)^n}\\ -2(-5)^n & 17(-5)^n\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}17\cdot6^n-6(-5)^n & -51\cdot6^n+51(-5)^n\\ 2\cdot6^n-2(-5)^n & -6\cdot6^n+17(-5)^n\end{pmatrix}$$

$$n=1 \quad =\frac{1}{11}\begin{pmatrix}132 & -51\cdot11\\ 22 & -121\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -51\\ 2 & -11\end{pmatrix}$$ совпало

ФИНТЕХ 2

$$\lim \frac{A_n}{D_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{17\cdot 6^n - 6(-5)^n}{-6\cdot 6^n + 17(-5)^n} = \boxed{-\frac{17}{6}}$$

$\boxed{N6}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{2 & 3 & 5}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

$\boxed{N7}$

$p(x) + p(2014 - x) = 1914 \quad \deg P = 95$

$x = 1007 + y \Rightarrow P(1007+y) + P(1007-y) = 1914$

$g(y) = P(1007+y) \Rightarrow g(y) + g(-y) = 1914$

$g_1(x) = 957 + y^{99} \quad g_2(x) = 957 - y^{95}$

Отв: $\boxed{P_1(x) = 957 + (1007-x)^{95}, \quad P_2(x) = 957 + (x-1007)^{95}}$

$\boxed{N8}$

$f(x+2) + af(x) = f(x+1), \quad f(3) = 2013, \quad a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad f(2013) - ?$

$2013 = 201\cdot 10 + 3 \Rightarrow$ надо узнать $f(x+10m)$ с [illegible] через $f(x)$

$\underline{f(x+2)} = f(x+1) - af(x) \quad (1)$

$\underline{f(x+3)} = f(x+2) - af(x+1) = f(x+1) - af(x) - af(x+1) = \quad (2)$

$= (1-a)f(x+1) - af(x)$

$\underline{f(x+4)} \overset{(2)}{=} (1-a)f(x+2) - af(x+1) \overset{(1)}{=} (1-a)f(x+1) - a(1-a)f(x)$

$- af(x+1) = (1-2a)f(x+1) - (a-a^2)f(x) \quad ③$

$f(x+5) \overset{(3)}{=} (1-2a)f(x+2) - a(1-a)f(x+1) \overset{(1)}{=} (1-2a)f(x+1) - a(1-2a)f(x) - a(1-a)f(x+1) =$

$= (1-2a)f(x+1) -$

$$= (1-\underset{0}{\underset{\shortparallel}{3a+a^2}})f(x+1) - a(1-2a)f(x) = -a(1-2a)f(x)$$

при $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$$f(x+5) = -a(1-2a)f(x)$$

$$f(x+10) = -a(1-2a)f(x+5) = (-a(1-2a))^2 f(x)$$

$$\Rightarrow f(x+10m) = (a(1-2a))^{2m} f(x) \Rightarrow$$

$$f(2013) = f(3+10\cdot 201) = (a(1-2a))^{402} f(3)$$

$$= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}(-2-\sqrt{5})\right)^{402}\cdot 2013 = \left(\frac{(3+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{2}\right)^{402}\cdot 2013$$

$$= \boxed{\left(\frac{11+5\sqrt{5}}{2}\right)^{402}\cdot 2013}$$

Физтех 1 доп.

№1

$1! + 2! \ldots + n! = m^2$

$\underset{\sim}{n=1}$ $1 = m^2 \Rightarrow \underset{\sim}{m=1}$;

$n=2 \Rightarrow$ л.ч. $= 3$

$n=3 \Rightarrow$ л.ч. $= 9 \Rightarrow \underset{\sim}{m=3}$

$n=4 \Rightarrow$ л.ч. $= 33$

$n \geq 5 \Rightarrow$ л.ч. $= 33 + \underbrace{5! + \ldots + n!}_{\text{заканчивается } 0} =$

$= \ldots 3 \neq m^2$

$\boxed{\text{Отв: } n=1, m=1,\ n=3, m=3}$

№2

$$\boxed{\int \frac{\log(\cos x)}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg}x \log(\cos x) + \operatorname{tg}x - x + C}$$

$$\int = \int \log(\cos x)\, d\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}x \lg(\cos x) - \int \operatorname{tg}x \frac{-\sin x}{\cos x}dx =$$

$$= \operatorname{tg}x \lg(\cos x) + \int \underset{\frac{\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2 x}-1}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{tg}^2 x}}\, dx = \operatorname{tg}x \cdot \lg(\cos x) + \operatorname{tg}x - x + C.$$

$\boxed{N3}$

$$\boxed{\lim_{x\to+0}(\log\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}=1}$$

~~$\lim e^{(\lg\operatorname{tg}x)(\lg\operatorname{ctg}x)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\lg(\operatorname{tg}x)\lg(\operatorname{ctg}^2x)^{1/\operatorname{tg}}}=e^{-\lim\limits_{x\to+0}\log^2(\operatorname{tg}x)}$~~

$$e^{\operatorname{tg}x\,\lg(\log\operatorname{ctg}x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(\log\operatorname{ctg}x)}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\log\operatorname{ctg}x}\,\frac{1}{\operatorname{ctg}x}\cdot(\operatorname{ctg}x)'}{(\operatorname{ctg}x)'}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\underset{\infty}{\operatorname{ctg}x}\,(\underset{\infty}{\lg\operatorname{ctg}x})}$$

$$=0$$

$$\Rightarrow e^0=1$$

$\boxed{N4}$

$$(x^2y^2+y)dx+(2x^3y-x)dy=0$$

$$x^2y^2dx+2x^3ydy+ydx-xdy=0\quad|:x^2$$

$$d(xy^2)=y^2dx+2xydy$$

$$y^2dx+2xydy+\frac{ydx-xdy}{x^2}=0\Rightarrow d(xy^2)+d\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow\boxed{xy^2+\frac{y}{x}=C,\ x\neq0}\ ,\ \boxed{y=0}$$

$\boxed{N5}$

$$A=\begin{pmatrix}-4&8&-12\\6&-6&12\\6&-8&14\end{pmatrix}\quad \underset{\overset{\uparrow}{v=(4,3,0)}}{\lambda_1=2},\ \lambda_2=0\leftarrow v_3=(-1,1,1)\quad v_2=(-2,0,1)$$

$$P=\begin{pmatrix}4&-2&-1\\3&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-4&7\\-3&4&-6\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n}=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}4&-2&-1\\3&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-4&7\\-3&4&-6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4&-2&-1\\3&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&-2^n&2\cdot2^n\\3\cdot2^n&-4\cdot2^n&7\cdot2^n\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot2^n&4\cdot2^n&-6\cdot2^n\\3\cdot2^n&-3\cdot2^n&6\cdot2^n\\3\cdot2^n&-4\cdot2^n&7\cdot2^n\end{pmatrix}=$$

$$=\boxed{2^{n-1}A}$$

$\boxed{N6}$

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 & 4 \\ 152 & 12 & -1 & -7 \\ -52 & 32 & -4 & 1 \\ 10 & -3 & 8 & -8 \end{pmatrix} = 35$$

$\boxed{N7}$

$P(x) - P(2014-x) = 1514x + a$, $\deg P = 100$ a - ?

$\square$ $x = 1007 + y$

$P(1007+y) - P(1007-y) = 1514(1007+y) + a$

$g(y) = P(1007+y) \Rightarrow g(y) - g(-y) = 1514 \cdot 1007 + a + 1514 \cdot y$

$g(y) = y^{100} + 957y + 6$ $\Rightarrow N = 1957y \Rightarrow \boxed{a = -1514 \cdot 1007}$

$g(-y) = y^{100} - 957y + 6$

$\boxed{N8}$

$3f(x+2) + f(x) = 3f(x+1)$, $f(3) = 3^{1000}$ $f(2013)$ - ?

$\underline{2013 = 3 + 6 \cdot n \quad n = 335}$

$f(x+2) = f(x+1) - \frac{1}{3}f(x)$ (1)

$f(x+3) = f(x+2) - \frac{1}{3}f(x+1) \overset{(1)}{=} \frac{2}{3}f(x+1) - \frac{1}{3}f(x)$ (2)

$f(x+4) \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}f(x+2) - \frac{1}{3}f(x+1) \overset{(1)}{=} \frac{1}{3}f(x+1) - \frac{2}{9}f(x)$ (3)

$f(x+5) \overset{(3)}{=} \frac{1}{3}f(x+2) - \frac{2}{9}f(x+1) = \frac{1}{9}f(x+1) - \frac{1}{9}f(x)$

$f(x+6) = \frac{1}{9}f(x+2) - \frac{1}{9}f(x+1) \overset{(1)}{=} -\frac{1}{27}f(x)$

$\Downarrow$

$f(x+6n) = \left(-\frac{1}{27}\right)^n f(x) \Rightarrow f(2013) = \left(-\frac{1}{27}\right)^{335} f(3) =$

$= -\frac{1}{3^{1005}} \cdot 3^{1000} = -\frac{1}{3^5} = \boxed{-\frac{1}{243}}$

Физтех 2

N 1

$2xy+3y^2=24 \qquad y(2x+3y)=24 \Rightarrow y=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$

$2xy=3(8-y^2)\Rightarrow$ y-четное т.е. $\boxed{y=2z}\Rightarrow$

$4xz=3(8-4z^2)=3\cdot4(2-z^2)\Rightarrow x=\frac{3}{z}(2-z^2)$

$x=\frac{6}{z}-3z\Rightarrow z|6$ то $z=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

$$\boxed{\text{Отв: } (3,2),\ (-3,-2),\ (-3,4),\ (3,-4),\ (-7,6),\ (7,-6),\ (-17,12),\ (17,-12)}$$

N2

$$\boxed{\int \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = x\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\sqrt{x-1}+C}$$

$\frac{1}{\sqrt{x}}=t \quad x=\frac{1}{t^2} \quad dx=-\frac{2dt}{t^3} \Rightarrow \int \arcsin(t)\frac{-2dt}{t^3}=$

$$=\int \arcsin t\, d\left(\frac{1}{t^2}\right)=\frac{\arcsin t}{t^2}-\int\frac{dt}{t^2\underset{\overset{\parallel}{t\sqrt{1/t^2-1}}}{\sqrt{1-t^2}}}=\frac{\arcsin t}{t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(1/t^2)}{\sqrt{1/t^2-1}}$$

$$=\frac{\arcsin t}{t^2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}+C=x\arcsin(1/x)+\sqrt{x-1}+C$$

N3

$$\boxed{y=\underset{\overset{\parallel}{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}}{(1+x)^{1/x}}=e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+o(x^4)}$$

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\frac{1}{1+x}=1$

$$f'(y)=e^{1/x\ln(1+x)}\underbrace{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'}=-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{(1+x)x}=\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x/_{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{x}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \underline{f'(0)=-e/2}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\Rightarrow e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}}=$$

$$=e\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^3\ldots\right)$$

$$\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}$$

$$\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^3=-\frac{x^3}{8} \Rightarrow$$

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}\right)=$$

$$=1-\frac{x}{2}+x^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)-x^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{48}\right)=$$

$$\frac{12+8+1}{48}=\frac{21}{48}=\frac{7}{16}$$

$$=1-x/2+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3$$

сошлось

$$\boxed{N4}$$

$$\underbrace{(3x^2y^2+x^2)}_{F}dx+\underbrace{(2x^3y+y^2)}_{g}dy=0$$

$\frac{\partial g}{\partial x}=6x^2y=\frac{\partial F}{\partial y}$ ищем g: $Fdx+gdy=dg=$
$=\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dg$

т.е. $\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial x}=3x^2y^2+x^2 \Rightarrow g=x^3y^2+\frac{x^3}{3}+h(y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}=2x^3y+y^2\end{cases}$ подстав

$\frac{\partial g}{\partial y}=2x^3y+\frac{\partial h}{\partial y}=2x^3y+y^2 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y}=y^2 \Rightarrow h(y)=\frac{y^3}{3}+C$

$\Rightarrow g=x^3y^2+x^3/3+y^3/3+C$

Отв: $\boxed{x^3y^2+x^3/3+y^3/3=C}$

$$\boxed{N5}$$

$A=\begin{pmatrix}19 & -48\\ 8 & -21\end{pmatrix}$ $|\lambda E_2-A|=\lambda^2+2\lambda-15$ $\lambda_1=3,\ \lambda_2=-5$
$\downarrow \qquad \downarrow$
$v_1=(3,1) \qquad v_2=(2,1)$

$D=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$A=PDP^{-1}$ $A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-5)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & -2\cdot3^n+\cancel{3(-5)^n}\\ -(-5^n) & 3(-5)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot3^n-2(-5)^n; & -6(3)^n+6(-5)^n\\ 3^n-(-5)^n & ; -2\cdot3^n+3(-5)^n\end{pmatrix}$

$$\lim\frac{A_n}{D_n}=\lim\frac{3\cdot3^n-2(-5)^n}{-2\cdot3^n+3(-5)^n}=\boxed{-2/3}$$

$\boxed{N6}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -7 & 1 \\ -3 & 2 & -12 & -2 \\ 2 & -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{-4}$$

$\boxed{N7}$

$2x^{2011} = x^{20} + x^{11}$ $x = 0, 1$ подходят $\Rightarrow x \neq 0$

$2x^{2000} = x^{9} + 1$

1) $x > 1 \Rightarrow x^{2000} > x^{9},\ x^{2000} > 1 \Rightarrow 2x^{2000} > x^{9} + 1$

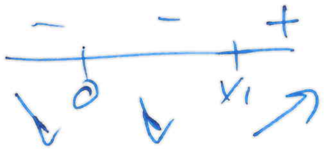
2) $0 < x < 1 \Rightarrow x^{2000} < x^{9},\ x^{2000} < 1 \Rightarrow 2x^{2000} < x^{9} + 1$

3) $x < -1 \Rightarrow x^{2000} > x^{9},\ x^{2000} > 1 \Rightarrow 2x^{2000} > x^{9} + 1$

4) $-1 < x < 0$ $f(x) = x^{9} + 1$ $g(x) = 2x^{2000}$
$f(0) = 1$ $f(-1) = 0$ $g(0) = 0$ $g(-1) = 2$ $\Rightarrow$ есть корень

$\boxed{\text{Отв: 3 корня}}$

// через произв: $f(x) = 2x^{2000} - x^{9} - 1$
$f' = 4000x^{1999} - 9x^{8} = x^{8}(\underbrace{4000x^{1991} - 9})$
$x_1 = \left(9/4000\right)^{1/1991}$



$f(x_1) < f(0) < 0$ $f(1) = 0$

$x = 1$ – один корень и ещё второй корень в $-1 < x < 0$ //

$\boxed{N8}$

$$\begin{cases} f(x) = g(x+1)\,g(x-1) \\ g(x) = f(x+1)\,f(x-1) \\ f(3) + g(3) = 2013 \end{cases}$$

$f(2013) + g(2013)$ – ?

$f(x) = f(x+2)\,f(x)\,f(x)\,f(x-2) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ \underline{f(x)\,f(x+2)\,f(x-2) = 1} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \underline{f(x+2)}\,f(x+4)\,\underline{f(x)} = 1 \\ f(x+2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x+4) = f(x-2)\ \forall x: f(x), f(x+2) \neq 0}$

$\Downarrow$

$\boxed{f(x+6) = f(x)}$ $\forall x: f(x+2), f(x+4) \neq 0$

$g(x) = g(x+2)\,g(x)\,g(x)\,g(x-2) \Rightarrow$ аналог $\underline{g(x+6) = g(x)}$

$\Rightarrow f(2013) = f(3)$ $g(2013) = g(3) \Rightarrow \boxed{\text{Отв: 2013}}$

Физтех 9

Физтех Вар 2004

N1

$a^2+(a+1)^2+\ldots+(a+5)^2=m^2$?

$(n-4)^2+\ldots+n^2+\ldots+(n+5)^2=10n^2+10n+85=5(2n^2+2n+17)\overset{?}{=}m^2$

$\exists\ 2n^2+2n+17\equiv 0(5)$ т.е. $2n^2+2n+2\equiv 0(5$

$n=0$ нет, $n=1$, нет, $n=2$ нет, $n=-1$ нет, $n=-2$ нет $\Rightarrow$ $\boxed{\text{нет}}$

N2

$$\boxed{\int\frac{\sin 2x}{4\cos^2x+12\cos x-7}dx=-\frac{1}{4}\ln\left|(\cos x+3/2)^2-4\right|+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{\cos x-1/2}{\cos x+7/2}\right|+C}$$

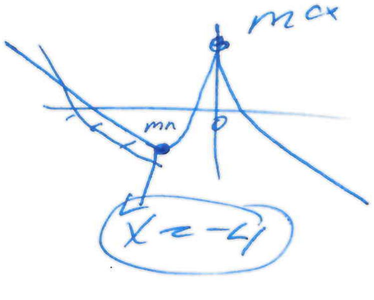
□ $t=\cos x$ $dt=-\sin x\,dx$

$$\int=-\int\frac{2t\,dt}{4(t^2+3t+9/4)-16}=-\frac{1}{2}\int\frac{t\,dt}{(t+3/2)^2-4}=-\frac{1}{2}\int\frac{(u-3/2)du}{u^2-4}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{u\,du}{u^2-4}+\frac{3}{4}\int\frac{du}{u^2-4}=-\frac{1}{4}\ln|u^2-4|+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+C$$ □

$u=\cos x+3/2$

N3



$\boxed{y=-\frac{2x}{17}-\frac{\pi}{2}}$

асимпт

$f(x)=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{2x}{17}$

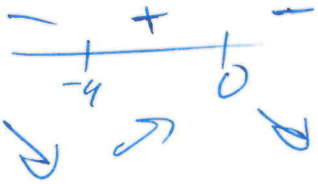
$f'=-\frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^2}{(1+x)^2}}-\frac{2}{17}=0$

$17\sqrt{\frac{x^2}{(1+x)^2}}=-x$ $\quad 17|x|=-x|1+x|$

$f'=-\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{17}$ $x>0$ $\Rightarrow f'<0$

$f'=-\frac{2x}{|x|(1+x^2)}-\frac{2}{17}$

$f'=\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{17}$ $x<0$ $=2\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{17}\right)$



в $x=0$

лев. касат $y=\frac{\pi}{2}+\frac{32}{17}x$

прав $y=\frac{\pi}{2}-\frac{36}{17}x$

$\boxed{\text{Выпукла вниз}}$

$\boxed{N4}$

$$(x - x^2y)dy + ydx = 0$$

$$ydx + xdy - yx^2dy = 0 \Rightarrow d(xy) - yx^2dy = 0 \;\Big|: \frac{1}{(xy)^2}$$

$$\frac{d(xy)}{(xy)^2} - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{xy} - \lg|y| = C, \\ y = 0 \end{array}\right.}$$

$\boxed{N5}$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & -3 & 18 \\ -20 & -4 & 26 \\ -14 & -3 & 19 \end{pmatrix} \quad A^{10}! \quad |xI_3 - A| = (x-1)(x+1)(x-2)$$

$$\lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = -1, \; \lambda_3 = 2$$

$$v_1 = (6,2,5), \; v_2 = (1,2,1), \; v_3 = (1,1,1)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ -8 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ -8 & -1 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3(-1)^n & (-1)^n & -4(-1)^n \\ -8\cdot 2^n & -2^n & 10\cdot 2^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 + 3(-1)^n - 8\cdot 2^n & (-1)^n - 2^n & -6 - 4(-1)^n + 10\cdot 2^n \\ 2 + 6(-1)^n - 8\cdot 2^n & 2(-1)^n - 2^n & -2 - 8(-1)^n + 10\cdot 2^n \\ 5 + 3(-1)^n - 8\cdot 2^n & (-1)^n - 2^n & -5 - 4(-1)^n + 10\cdot 2^n \end{pmatrix}$$

$$n10 \quad \boxed{\begin{pmatrix} 6 + 3 - 2^{13} & 1 - 2^{10} & -10 + 10\cdot 2^{10} \\ 8 - 2^{13} & 2 - 2^{10} & -10 + 10\cdot 2^{10} \\ 8 - 2^{13} & 1 - 2^{10} & -9 + 10\cdot 2^{10} \end{pmatrix}}$$

Физтех11

№6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

A^{-1} не существует

№7

$f(x)=ax^2+bx+c$, $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right)=f\left(\frac{c-a-b}{2c}\right)=0$ $\boxed{f(-1)f(1)\overset{?}{=}0}$

$$\square\ f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right)=\frac{a(a-b-c)^2}{4a^2}+\frac{b(a-b-c)}{2a}+c=\frac{(a-b-c)^2+2b(a-b-c)+4ac}{4a}$$

$$=\frac{(a-b-c)(a+b-c)+4ac}{4a}=\frac{(a-c)^2-b^2+4ac}{4a}$$

$$=\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{4a}=\frac{f(-1)f(1)}{4a}=0$$

№8

$a=bc$?

$$\underline{f(x)g(y)=axy+bx+cy+1}$$

$\forall x,y$

$$\begin{array}{l|l} x=0,\ y=0 \Rightarrow & f(0)g(0)=1 \\ y=0 & f(x)g(0)=bx+1 \\ x=0 & f(0)g(y)=cy+1 \end{array} \Rightarrow \text{перемножим}$$

$$f(x)g(y)\underbrace{f(0)g(0)}_{\overset{\shortparallel}{1}}=(bx+1)(cy+1)\Rightarrow \underline{f(x)g(y)}=(bx+1)(cy+1)=$$

$$=\underline{bcxy+bx+cy+1}$$

$$\shortparallel$$

$$axy+bx+cy+1 \Rightarrow \boxed{a=bc}$$

$\boxed{\text{Отв: } 0}$

Фишех Вар2 ^{1}дон №9

$P_0 = 1$

$P_{20\cancel{08}} - P_{2015} = \frac{1}{2019}(P_{2018} + P_{2017} + \dots + P_0) - \frac{1}{2019}(P_{2015} + P_{2014} + \dots + P_1)$

$= \frac{1}{2019}(P_0 - P_{2015}) > 0$ т.к. $P_{2015} < 1$

$\boxed{\text{Отв: } \underline{P_{2018}} \text{ больше}}$

Зм: $P_n = 1/6\,(P_{n-1} + \dots + P_{n-6})$ (где игр. кости)

первый бросок. — выпал $k \cdot (1 \le k \le 6)$ с $P = 1/6$

~~д~~Все исходов [illegible]: все послед броски — дает m с P_m

$P\Big(\overbrace{\text{первый раз выпало } k,\ \text{сумма оста} = m}^{A_{k,m}}\Big) = 1/6\,P_m$

n - получить можем только если $m = n-k$

$A_{1,n-1},\ A_{2,n-2} \dots$ — несовместны ⇒

$P_n = P(A_{1,n-1}) + P(A_{2,n-2}) \dots = 1/6\,(P_{n-1} + \dots + P_{n-6})$

Фишех Вар2дон №9

$E\left(\begin{matrix}\text{число бросков ког.}\\ \Sigma > 2017\end{matrix}\right)$ X_n - число бросков пока $\Sigma = n$

$I_k = \begin{cases} 1 & \text{- первый бросок дал } k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$EI_k = 1/6$

$X_n = X_{n-1} \cdot I_1 + X_{n-2} I_2 + \dots + X_{n-6} I_6 + 1$, X_{n-k} и I_k - незав

⇒ $EX_n = EX_{n-1} \cdot EI_1 + \dots + EX_{n-6} \cdot EI_6 + 1 =$ $\quad EX_k := e_k$

$= 1/6\,(EX_{n-1} + \dots + EX_{n-6}) + 1$ $\quad e_k = 0 \quad k \le 0$

$e_n = 1/6\,(e_{n-1} + \dots + e_{n-6}) + 1,$

$e_{n-1} = 1/6\,(e_{n-2} + \dots + e_{n-7}) + 1$ ⇒ $e_n = 7/6\, e_{n-1} - 1/6\, e_{n-7}$

$e_n - e_{n-1} = 1/6\,(e_{n-1} - e_{n-7})$

$e_2 = 7/6 \quad e_3 = (7/6)^2 \quad e_4 = (7/6)^3$ $\quad // \ \lambda^7 = 7/6\,\lambda^6 - 1/6$

$6\lambda^7 - 7\lambda^6 + 1 = 0$

$e_1 = 1$

$e_{2017} \sim 2017 \cdot 2/7 \sim 576, \dots$

Физтех Вариант №10

Отрезки зад. парами целочисл. коорд. конц. точек
Определить пересек. ли 2 отрезка

(v_{11}, v_{12}) (v_{21}, v_{22})

проблема: если делать через прямые то будет деление,
что может привести к невер. ответу (5-7 бал)

за алгор без деления ($ax+by-c \gtrless 0$ то 8-10 бал.)

концы каждого отрезка по раз стороны (можно через вект. произв)

Физтех Вариант №10

1) строим вып. оболочку V мн-ва
2) если все точки на ней ок, если нет
строим вып. обол внутр. точ. V_1
берем 2 точки на V и 2 на V_1
так чтоб в ABCD точек не было
убир. реб. AB и CD все (и.т.д с внутр. точками)

// или послед. добав к V ближайшую к нему точк.

(ближ. точка до стороны  тп. или )

построение вып. обол:

послед. берем точку a_1 и ищем a_2 такую что все точки по одну сторону от $\overline{a_1 a_2}$ и.т.д