Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Факультет математики

На правах рукописи

Щечкин Антон Игоревич

Уравнения Пенлеве и теория представлений

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
доцент Михаил Берштейн

Москва — 2020

1 Резюме диссертации

Данное исследование посвящено изучению решений уравнений Пенлеве и их q-деформаций, с помощью методов теории представлений и геометрии пространств модулей инстантонов.

1.1 Исторический очерк

Уравнения Пенлеве возникли более 100 лет тому назад, изначально как дифференциальные уравнения второго порядка без подвижных особенностей (не считая полюсов), в работах П. Пенлеве и Б. Гамбье [P1900], [P1900], [G1910].

Несколько позднее, в работах Р. Фукса [F1905], [F1907], было обнаружено, что уравнения Пенлеве естественным образом возникают как простейшие нетривиальные случаи изомонодромных деформаций линейных систем на $\mathbb{CP}^1$. Теория изомонодромных деформаций была впоследствии развита в работах Шлезингера [S1912] и Гарнье [G1912], [G1917]. Также было обнаружено, что уравнения Пенлеве допускают неавтономную гамильтонову реализацию [M1922]. В те же годы в работах Бирхгофа [B1911], [B1913] начала изучаться задача Римана-Гильберта для разностных и q-разностных линейных уравнений.

С начала семидесятых годов, уравнения Пенлеве и их решения (другое их название — трансценденты Пенлеве) начинают играть всё более возрастающую роль в математической физике, в особенности в приложениях к классическим и квантовым интегрируемым системам и к теории случайных матриц. К примеру, это включает следующие задачи

- Спин-спиновая корелляционная функция в двухмерной модели Изинга [WMTB76]
- Матрица плотности непроницаемого Бозе-газа [JMMS80]
- KPZ-скейлинг одномерной ASEP-модели на целочисленной решетке [TW09]
- Скейлинговые функции в двухмерных полимерах [FS92], [Z94] (см. также [L11] про обобщение)
- Детерминанты Фредгольма от интегрирумых ядер [TW92], [TW93], см. ссылки в [GIL13]
- Модель синус-Гордона в свободно-фермионной точке [BL94], [SMJ78]
- Матричные модели (см. книгу [F10Book] и ссылки в ней)

Тогда же появились и многие понятия, фундаментальные для теории уравнений Пенлеве. В частности, в работе [JMU81] было введено понятие изомонодромной тау-функции. Эти тау-функции появляются в различных приложениях уравнений Пенлеве, при этом наибольшую важность, по-видимому, представляет их близкая взаимосвязь с квантовой теорией поля, обнаруженная в первых двух статьях серии работ [SMJ78].

Другим фундаментальным понятием, важным для данной диссертации является пространство начальных данных уравнений Пенлеве, введенное К. Окамото в работе [O79]. Это пространство является некоторой компактификацией $\mathbb{C}^2$, такой что через каждую его точку проходит ровно одно решение соответствующего уравнения, симметрии этого пространства совпадают с симметриями исходного уравнения.

Отметим, чтр этот очерк не претендует на полный обзор развития и приложений теории уравнений Пенлеве, для этого стоит обратиться к обзорам и книгам [CDL], [C99], [FIKN06], а также к иным обзорам, цитируемым ниже.

В то же время стартовало изучение дискретных интегрируемых систем, и эти исследования, в частности, привлекли внимание и к дискретизации уравнений Пенлеве. Систематический подход к дискретным уравнениям Пенлеве начался с работы [GRP91], где было предложен критерий конфайнмента сингулярностей, играющий роль дискретного аналога свойства Пенлеве, потом этот критерий был применен (в работе [RGH91]) для деавтономизации QRT отображений (см. [QRT88], [QRT89]). По поводу этих результатов и их дальнейшего развития см. обзоры [GR04], [TTGR04]. В те же годы уравнение q-Пенлеве VI было получено в работе [JS96] из q-изомонодромной задачи.

Иной подход к дискретным уравнениям Пенлеве был разработан Х. Сакаи в его известной работе [S01], где был обобщен подход Окамото. В этой работе он классифицировал некоторые рациональные поверхности и сопоставил каждой поверхности определенное дифференциальное, разностное или q-разностное уравнение Пенлеве и, таким образом, построил классификацию дискретных уравнений Пенлеве. В этом подходе появляется и понятие тау-функции для дискретного уравнения Пенлеве [T06]. Вообще этот подход оказался очень мощным, см. недавний обзор [KNY15].

В известной работе Гамаюна, Иоргова и Лисового [GIL12] была найдена связь между уравнениями Пенлеве (и, более общо, изомонодромными задачами на $\mathbb{CP}^1$) и конформной теорией поля. Именно, они предложили формулу для общего (двухпараметрического) решения уравнения Пенлеве VI: тау-функция этого уравнения равна ряду Фурье от четырехточечных конформных блоков конформной теории поля с симметрией, описываемой алгеброй Вирасоро с центральным зарядом $c = 1$.

Этот результат придал новый импульс изучению уравнений Пенлеве и, в особенности, их решений. В итоге был получен целый ряд новых результатов (включая результаты диссертации)

- Предложенная изначально формула была доказана с использованием ряда разнообразных подходов [ILT14], [BS14] (см. также [BS16b]), [GL16], [NTalk].

- Исходная гипотеза была расширена (и доказана) на случаи уравнений Пенлеве V и $\text{III'}_{1,2,3}$ [GIL13], системы Гарнье [ILT14], изомонодромные задачи высшего ранга [G15], общие фуксовы системы [GIL18], [GIL18FST], изомонодромные задачи на торе [BMGT19], [BMGT19W].

- Было изучено разложение тау-функции в окрестностях иррегулярных особенностей [ItsLTy14], [N15], [BLMST16], [N18].

- Были получены и изучены различные представления тау-функции в виде детерминанта Фредгольма [GL16], [GL17], [CGL17], [GIL18FST].

- Были изучена связь между разложениями тау-функции в разных точках для разных уравнений Пенлеве [ILTy13], [ItsLTy14], [ItsLP16], полученные результаты были применены для построения кроссинг-инвариантной корреляционной функции в $c = 1$ конформной теории поля [GS18].

- Была предложена и доказана q-деформация исходной формулы [BS16q], [JNS17], [BGM18], [MN18], [BS18].

- Было построено соответствие между деавтономизированными интегрируемыми системами Гончарова-Кеньона и классификацией Сакаи q-деформированных уравнений Пенлеве, используя кластерную природу этих интегрируемых систем [BGM17]. Также в этой статье в рамках кластерного подхода было построена квантовая версия изомонодромной тау-функции.

- Исходная формула и её q-деформированная версия в случае резонансного значения параметров была проинтерпретирована в терминах матричных моделей [MM17], [MM17q], [MMZ19]

- Был введен и изучен $c = -2$ аналог тау-функции Пенлеве [BS18]

- Тау-функции уравнений Пенлеве оказались связаными с двойственностью между топологическими струнами и спектральной теорией [BGT16], [BGT17]. В этих статьях, в частности, рассматриваемая формула для тау-функции использовалась для доказательства некоторой предельной версии этой дуальности.

- Развивая идеи работ [BE11], [EM08], в работе [I19] была построена двухпараметрическая тау-функция уравнения Пенлеве I в виде ряда Фурье от статсуммы топологической рекурсии для семейства эллиптических кривых. Это можно рассматривать как некоторый аналог обсуждаемой здесь формулы.

1.2 Уравнения Пенлеве и их решения

1.2.1 Иерархия уравнений Пенлеве

Старшее в иерархии уравнений Пенлеве, уравнение Пенлеве VI имеет вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right)\frac{dw}{dz} +$$
$$+ \frac{2w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\left(\theta_\infty - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\theta_0^2 z}{w^2} + \frac{\theta_1^2(z-1)}{(w-1)^2} - \frac{\left(\theta_z^2 - \frac{1}{4}\right)z(z-1)}{(w-z)^2}\right),$$

где $\theta_0, \theta_z, \theta_1, \theta_\infty$ — параметры уравнения. Все остальные уравнения Пенлеве могут быть получены из Пенлеве VI с помощью последовательности слияний, изображенной на Рис. 1, где стрелки соответствуют определенным пределам, при этом каждый предельный переход понижает число параметров на 1. Нашей целью является изучение общих решений этих уравнений. В диссертации изучается уравнение Пенлеве VI, как старшее уравнение иерархии, из решений которого вырождением можно получить решения уравнений вдоль

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{PVI} & \longrightarrow & \mathrm{PV} & \longrightarrow & \mathrm{PIII}_1 & \longrightarrow & \mathrm{PIII}_2 & \longrightarrow & \mathrm{PIII}_3 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathrm{PIV} & \longrightarrow & \mathrm{PII} & \longrightarrow & \mathrm{PI} & &
\end{array}$$

Рис. 1: Диаграмма слияний для уравнений Пенлеве первой строки диаграммы. В диссертации также изучается уравнение Пенлеве III_3 — конечная точка для таких вырождений, поскольку оно более удобно для иллюстрации наших подходов.

Уравнение Пенлеве III_3' имеет вид

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{2w^2}{z^2} - \frac{2}{z}, \tag{1.1}$$

где штрих в обозначениях значит некоторую простую замену переменных. Уравнение Пенлеве III_3' получается из уравнения Пенлеве VI пределом $R \to 0$, при этом необходимо сделать дополнительное перемасштабирование

$$w \mapsto R^2 w,\ z \mapsto R^4 w,\ \theta_{z,1} \mapsto \frac{1}{2}R^{-2},\ \theta_{0,\infty} \mapsto -\frac{1}{2}R^{-2}. \tag{1.2}$$

Это уравнение может быть записано как система двух билинейных уравнений типа Тоды на две тау-функции [BS16b]

$$\tau(z)\frac{d^2}{d\log z^2}\tau(z) - \left(\frac{d}{d\log z}\tau(z)\right)^2 = -z^{1/2}\tau_1(z)\tau_1(z), \tag{1.3}$$

$$\tau_1(z)\frac{d^2}{d\log z^2}\tau_1(z) - \left(\frac{d}{d\log z}\tau_1(z)\right)^2 = -z^{1/2}\tau(z)\tau(z), \tag{1.4}$$

которая имеет очевидную симметрию (преобразование Бэклунда) $\pi : \tau \leftrightarrow \tau_1$. Функция $w(z)$ получается как $z^{\frac{1}{2}}\frac{\tau(z)^2}{\tau_1(z)^2}$, преобразование Бэклунда действует на w как $w \mapsto z/w$. Неподвижная точка этого преобразования $\pm\sqrt{z}$ является единственным алгебраическим решением уравнения Пенлеве III'$_3$ [OKSO06], [Gr84], соответствующие тау-функции равны $z^{1/16}e^{\mp 4\sqrt{z}}$.

Как было упомянуто ранее, существует естественная геометрическая конструкция, которая связывает уравнения Пенлеве и пространства начальных данных [O79]. Это пространство является некоторым раздутием $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в 8 точках (или, эквивалентно $\mathbb{P}^2$ в 9 точках), которое может быть охарактеризовано аффинной системой корней R. Более точно, каждое уравнение Пенлеве соответствует двум ортогональным аффинным корневым подрешеткам в аффинной корневой решетке $E_8^{(1)}$. Одна из них, R соответствует пространству начальных данных, а вторая — $R^\perp$ — характеризует симметрии этого пространства, так же как и симметрии соответствующего уравнения Пенлеве. Эти симметрия дается расширенной аффинной группой Вейля $\widetilde{W}(R^\perp)$. К примеру, уравнение Пенлеве VI соответствует подрешеткам $R^\perp/R = D_4^{(1)}/D_4^{(1)}$, а уравнение Пенлеве III'$_3$ — $A_0^{(1)}/D_8^{(1)}$.

В работе Сакаи [S01] этот подход был существенно обобщен и покрыл также случаи дискретных уравнений Пенлеве: разностных и q-разностных. Более точно, он классифицировал все поверхности $\mathbb{P}^2$, раздутые в 9 точках с точностью до автоморфизмов. Из этих поверхностей можно составить схему вырождения Сакаи (см. Рис. 2, где указаны только метки типа поверхности). Пространства начальных данных непрерывных уравнений Пенлеве вложены в эту классификацию как поверхности типов D и E (ср. Рис. 1). В подходе Сакаи поверхности типа A в строке, начинающейся от $A_0^{(1)*}$ до $A_8^{(1)}$, так же как и $A_7^{(1)'}$ соответствуют q-разностным уравнениям Пенлеве следующим образом. Соответствующая расширенная аффинная группа Вейля $W(R^\perp)$ содержит подгруппу свободных трансляций. Некоторый дискретный поток в этой подгруппе соответствует некоторому уравнению

q-Пенлеве. Отметим, что здесь имеются две разных поверхности, соответствующие одной и той же аффинной системе корней $A_7^{(1)}$, они различаются при помощи штриха. Отметим ещё, что вертикальные стрелки из поверхностей, соответствующих q-деформированным уравнениям в поверхности, соответствующие непрерывным, соответствуют непрерывному пределу.

Кроме непрерывных и q-разностных уравнений, классификация Сакаи также содержит эллиптические и разностные уравнения, одной и той же поверхности может соответствовать несколько уравнений (поскольку в подгруппе свободных трансляций может быть несколько несопряженных потоков). Больше деталей можно найти в оригинальной работе [S01] и в последующей работе [KNY15].

С этого момента мы будем обозначать уравнения Пенлеве, используя тип соответствующей поверхности, например, Пенлеве III'$_3$ — это $D_8^{(1)}$.

$$
\begin{tikzcd}
A_0^{(1)} \arrow[dr] & & & & & & & & A_7^{(1)'} \arrow[ddr] & \\
& A_0^{(1)*} \arrow[r] \arrow[dr] & A_1^{(1)} \arrow[r] \arrow[dr] & A_2^{(1)} \arrow[r] \arrow[dr] & A_3^{(1)} \arrow[r] \arrow[dr] & A_4^{(1)} \arrow[r] \arrow[dr] & A_5^{(1)} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & A_6^{(1)} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & A_7^{(1)} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & A_8^{(1)} \\
& & A_0^{(1)**} \arrow[r] & A_1^{(1)*} \arrow[r] & A_2^{(1)*} \arrow[r] & D_4^{(1)} \arrow[r] & D_5^{(1)} \arrow[r] \arrow[dr] & D_6^{(1)} \arrow[r] \arrow[dr] & D_7^{(1)} \arrow[r] \arrow[dr] & D_8^{(1)} \\
& & & & & & & E_6^{(1)} \arrow[r] & E_7^{(1)} \arrow[r] & E_8^{(1)}
\end{tikzcd}
$$

Рис. 2: Классификация Сакаи дискретных уравнений Пенлеве: поверхностный тип.

В диссертации мы сосредотачиваемся на двух q-деформациях дифференциального уравнения Пенлеве $D_8^{(1)}$, а именно на уравнении Пенлеве $A_7^{(1)'}$ и уравнении Пенлеве $A_7^{(1)}$. Уравнение Пенлеве $A_7^{(1)'}$ имеет вид

$$G(qz)G(q^{-1}z) = \frac{(G(z)-z)^2}{(G(z)-1)^2}, \tag{1.5}$$

а уравнение Пенлеве $A_7^{(1)}$

$$G(qz)G(q^{-1}z) = \frac{1-G(z)}{z^2G(z)^2}, \tag{1.6}$$

где G — это прямой аналог w.

Они также могут быть записаны в виде билинейных уравнений типа Тоды. В этой форме Пенлеве $A_7^{(1)'}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tau(qz)\tau(q^{-1}z) &= \tau^2 - z^{1/2}\tau_1^2 \\ \tau_1(qz)\tau_1(q^{-1}z) &= \tau_1^2 - z^{1/2}\tau^2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

а Пенлеве $A_7^{(1)}$ может быть записано одним уравнением

$$\tau(q^2z)\tau(q^{-2}z) = \tau^2 - z^{1/2}\tau(qz)\tau(q^{-1}z). \tag{1.8}$$

Также изучаются некоторые вопросы, связанные с уравнением Пенлеве $A_3^{(1)}$, которое является q-деформацией дифференциального уравнения Пенлеве VI $D_4^{(1)}$, см. Раздел 6.2 основного текста.

1.2.2 Тау-функция Пенлеве как ряд Фурье

В известной работе [GIL12] Гамаюн, Иоргов и Лисовой предложили формулу (также неформально известную как "Киевская формула") для общего решения уравнения Пенлеве VI в терминах четырехточечных конформных блоков $c = 1$ алгебры Вирасоро. Последние являются специальными функциями, возникающими в контексте конформной теории поля и имеющими явное теоретико-представленческое определение (см. Разд. 2 основного текста). Их гипотеза звучит следующим образом

Теорема 1.1. *Тау-функция общего положения уравнения Пенлеве VI равна ряду Фурье от четырехточечных конформных блоков* $c = 1$ *алгебры Вирасоро* $\mathcal{F}(\{\theta_\kappa^2\};\sigma^2|z)$, $\{\theta_\kappa\} = \{\theta_0, \theta_z, \theta_1, \theta_\infty\}$

$$\tau(\{\theta_\kappa\};\sigma,s|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n \mathcal{C}_{VI}(\{\theta_\kappa\};\sigma+n)\mathcal{F}(\{\theta_\kappa^2\};(\sigma+n)^2|z), \tag{1.9}$$

где параметры $\sigma, s \neq 0$ *играют роль констант интегрирования уравнения Пенлеве VI, а* $\mathcal{C}_{VI}(\{\theta_\kappa\};\sigma)$ *— некоторая простая функция (см. (3.2)).*

Эта теорема была доказана в работах [ILT14], [BS14] (см. также [BS16b]), [GL16], используя различные подходы. В этой диссертации доказательство из [BS14], [BS16b] представлено в Разделе 3. Слова "общего положения"означают, что комплексная размерность отброшенных решений равна 1.

Формула (1.9) обобщает асимптотическое поведение тау-функции уравнения Пенлеве VI, которое было найдено в работе [J82]. Аналогичная формула, соответствующая специальному случаю $\sigma = 1/4$, была написана в [NO03], но, к сожалению, связь с уравнениями Пенлеве оказалась упущенной.

Способ строить тау-функции уравнений Пенлеве (или, более общо, изомонодромных задач) в виде ряда Фурье от некоторой "статсуммы"$\mathcal{Z}$ (включая различные конформные блоки)

$$\tau(\sigma,s|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n \mathcal{Z}(\sigma+n|z) \tag{1.10}$$

оказался очень эффективным. Следом за работой [GIL12] появилось множество вырождений и обобщений для различных дифференциальных и q-разностных изомонодромных задач. Иногда эту связь между изомонодромными задачами и конформной теорией поля еще называют соответствием между уравнениями Пенлеве и калибровочными теориями. Такое название появилось в связи с тем, что конформные блоки равны инстантонным статсуммам суперсимметричных калибровочных теорий по АГТ соответствию ([AGT09], [AY09] и дальнейшее их развитие). С этой точки зрения, такая тау-функция называется двойственной статсуммой, в такой форме она появляется в [NO03].

Эти разработки уже были перечислены в Историческом очерке, теперь мы опишем детальнее ту их часть, которая представлена в диссертации

- В работе [GIL13] решение (1.9) было вырождено вдоль первой строчки диаграммы слияний Рис. 1. Тау-функции для этих уравнений Пенлеве даются рядами Фурье некоторых пределов от четырехточечного конформного блока $c = 1$ алгебры Вирасоро. Например, для уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$), тау-функция дается рядом Фурье (1.10) от конформных блоков, которые получаются так называемым иррегулярным (или Уиттекеровским) пределом: $\mathcal{Z}(\sigma|z) = C_{III_3'}(\sigma)\mathcal{F}(\sigma^2|z)$ (см. Теорему 1.4 ниже). Эти блоки кроме z зависят только от старшего веса σ^2 промежуточного модуля Верма. Эта формула сама по себе была доказана в [BS14] и [BS16b]. Детали см. в Разд. 3.

- В работе [BS16q] была построена q-деформация формулы для тау-функции уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$), была выдвинута гипотеза, что эта q-деформация дает общее решение уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$. Схожая формула для решения уравнения Пенлеве $A_7^{(1)}$ была предложена в [BGM18]. Тау-функции для этих q-Пенлеве даются рядами Фурье (1.10) иррегулярных пределов конформных блоков алгебры q-Вирасоро с $c = 1$. В случае $A_7^{(1)'}$ эти конформные блоки равны пятимерным суперсимметричным $SU(2)$ статсуммам без полей материи по АГТ соответствию [AY09]. Случай $A_7^{(1)}$ отличается от $A_7^{(1)'}$ дополнительным членом Черн-Саймонса в статсумме. Эти формулы были доказаны в [BS18], [MN18], используя различные подходы. Детали см. в Разд. 5, 6.

  Формула для решения уравнения Пенлеве $A_3^{(1)}$ (но не для тау-функции), которое является q-деформацией Пенлеве VI ($D_4^{(1)}$) была предложена и доказана в работе [JNS17], используя q-деформацию подхода [ILT14].

- Соответствие между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля говорит, что изомонодромная тау-функция дается рядом Фурье от конформных блоков $c = 1$ алгебры Вирасоро [ILT14]. Отказ от этого условия на центральные заряды ведет к квантовой тау-функции и соответствующему квантованию пространства монодромийных параметров (они перестают коммутировать) [BGM17]. Тем не менее, есть основания считать, что существуют обобщения соответветствия между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля для случаев центрального заряда алгебры Вирасоро, равного $c = 1 - 6\frac{(n-1)^2}{n}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. (это центральный заряд для "минимальных моделей"$M(1,n)$). Например, следуя подходу [ILT14], для таких центральных зарядов мы получаем коммутативность операторнозначных монодромий, поэтому возможно построить решение некоторой изомонодромной задачи, используя конформные блоки с такими центральными зарядами. Другие основания см. в Разд. 6.

  В работе [BS18] изучались тау-функции, равные ряду Фурье (1.10) от иррегулярных конформных блоков $c = -2$ алгебры Вирасоро, это самый первый случай для такого обобщения. Они естественны с различных точек зрения. Именно, $c = 1$ тау-функция разлагается в произведение двух таких тау-функций. Аналогичное разложение получается с точки зрения ABJM теории ([BGT17]). Эти $c = -2$ тау-функции оказываются равными $c = 1$ тау-функциям для специального случая уравнения Пенлеве $A_3^{(1)}$. Детали см. в Разд. 6.

1.2.3 Основные результаты

Главные результаты моих диссертационных исследований следующие:

1. Была доказана формула Гамаюна-Иоргова-Лисового для тау-функций уравнений Пенлеве VI, V и $\mathrm{III}'_{1,2,3}$ ([1]=[BS14], [3]=[BS16b], см. Разд. 3).

2. Построена q-деформация соответствия между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля. А именно, в работе [2]=[BS16q] было предложена, а в работе [4]=[BS18] (см. Разд. 5,6) были доказаны формулы для тау-функций уравнений Пенлеве $A_7^{(1)'}$ и $A_7^{(1)}$, эти тау-функции оказались равными рядам Фурье от пятимерной калибровочной суперсимметричной $SU(2)$ статсуммы без полей материи.

3. Соответствие между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля было расширено на случай центрального заряда $c = -2$. Был построен аналог формулы Гамаюна-Иоргова-Лисового в случае $c = -2$ и установлена её связь с теорий уравнений Пенлеве ([4]=[BS18], Разд. 6).

Диссертация основана на 4 статьях

1. M. Bershtein, A. Shchechkin, *Bilinear equations on Painlevé τ functions from CFT*, [arXiv:1406.3008], Communications in Mathematical Physics 339 (3), (2015), 1021-1061.

2. M. Bershtein, A. Shchechkin, *q-deformed Painlevé tau function and q-deformed conformal blocks*, [arXiv:1608.02566], Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 50 (8), (2017), 085202.

3. M. Bershtein, A. Shchechkin, *Bäcklund transformation of Painlevé III(D_8) tau function*, [arXiv:1608.02568], Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 50 (11), (2017), 115205.

4. M. Bershtein, A. Shchechkin, *Painlevé equations from Nakajima-Yoshioka blowup relations*, [arXiv:1811.04050], Letters in Mathematical Physics 109 (11), (2019), 2359-2402

См. также препринт A. Shchechkin, *Blowup relations on $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ from Nakajima-Yoshioka blowup relations*, [arXiv:2006.08582]
и обзор N. Iorgov, O. Lisovyy, A. Shchechkin, Yu. Tykhyy, *Painlevé functions and conformal blocks*, Constructive Approximation 39 (1), (2014), 255-272.

1.2.4 Методы

Оказывается, что уравнения Пенлеве (это касается и других изомонодромных задач) могут быть записаны в виде некоторых билинейных уравнений на тау-функции. Тогда поиск решения в виде ряда Фурье (1.10) от некоторой "статсуммы"эквивалентен поиску подходящего билинейного соотношения на эти статсуммы

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{D}(\mathcal{Z}((\sigma+n)^2|z), \mathcal{Z}((\sigma-n)^2|z)) = 0, \tag{1.11}$$

где D — некоторый билинейный дифференциальный (или q-разностный) оператор.

В этой диссертации используются два источника билинейных соотношений

- Билинейные соотношения на конформные блоки алгебры Вирасоро из теории представлений алгебры Супер Вирасоро. Эти соотношения происходят из вложения двух алгебр Вирасоро в алгебру Супер Вирасоро, расширенную Майорановским фермионом [CPSS90]. Этот подход кратко изложен ниже в обзоре диссертации, см. также Разд. 2, 3. Он оказывается более удобным в дифференциальном случае.

- Другой подход к получению билинейных соотношений приходит из соотношений раздутия на статсуммы Некрасова суперсимметричной калибровочной теории. Этот подход оказывается более удобным в q-деформированном случае, однако, он также подходит и для непрерывного случая. Как было уже упомянуто выше, четырехмерные и пятимерные статсуммы равны по АГТ-соответствию [AGT09], [AY09] конформным блокам алгебры Вирасоро или q-Вирасоро. Соотношения раздутия основаны на соотношении между статсуммой на исходном многообразии и на этом же многообразии, раздутом в одной точке. Такие соотношения были найдены Накаджимой и Ёшиокой в [NY03] для статсумм на $\mathbb{C}^2$, они называются "соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки". В отличие от теоретико-представленческих вопросов, вопросы соответствующей геометрии не изучаются в диссертации, используются лишь только известные результаты и изучаются простые следствия из них. Эти вопросы кратко изложены ниже в обзоре диссертации, больше деталей можно найти в Разделах 4,6.

1.3 Обзор диссертации

Этот Раздел посвящен обзору текста диссертации, а именно, описанию её структуры, а также формулировке основных утверждений. Также мы немного подробнее останавливаемся на ключевых моментах, вникая в некоторые детали.

Разд. 1 — это обзор базовых понятий и фактов про уравнения Пенлеве, необходимых в диссертации, Некоторые важные детали уже рассмотрены в Разделе 1.2.1 выше.

Раздел начинается с разбора того, как уравнение Пенлеве VI появляется в задаче изомонодромной деформации линейной системы с 4 особенностями на $\mathbb{CP}^1$ (Раздел 1.1).

Далее уравнения Пенлеве VI и Пенлеве III($D_8^{(1)}$) описываются как неавтономные гамильтоновы системы, введены тау-формы этих уравнений (Раздел 1.2.1). Также тут кратко обсуждается преобразование Бэклунда и алгебраическое решение для уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$). В Разд. 1.2.2 решения уравнений Пенлеве VI и III($D_8^{(1)}$) параметризованы с помощью их асимптотик, а именно — двумя параметрами σ, s. Используя асимптотическое поведение, выясняется, как преобразование Бэклунда действует на параметры σ, s решения Пенлеве III($D_8^{(1)}$)

Предложение 1.1. *(Предл. 1.3 в основном тексте) Преобразование Бэклунда π уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$) дается действием на параметры σ, s по формуле $\pi(\sigma, s) = (1/2 - \sigma, s^{-1})$.*

В Разд. 1.2.3 дополнительно построены тау-форма типа Тоды (1.4) для уравнения Пенлеве $\mathrm{III}(D_8^{(1)})$, так же как и тау-форма типа Окамото

$$\begin{aligned} &D^2_{[\log z]}(\tau,\tau_1)-\frac{1}{2}\left(z\frac{d}{dz}-\frac{1}{8}\right)(\tau\tau_1)=0,\\ &D^3_{[\log z]}(\tau,\tau_1)-\frac{1}{2}\left(z\frac{d}{dz}-\frac{1}{8}\right)D^1_{[\log z]}(\tau,\tau_1)=0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Более точно, было доказано, что эти тау-формы эквивалентны уравнению Пенлеве $\mathrm{III}(D_8^{(1)})$(Предл. 1.4, Предл. 1.5).

Раздел 1.3 начинается детальным описанием подхода Сакаи к уравнениям Пенлеве для случая уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$ (Разд. 1.3.1). Далее, в Разд. 1.3.2 вводятся тау-функции для данного случая (Предл. 1.6), это было сделано в [BS16q] аналогично тому, как это делается для старших уравнений Пенлеве. Тут мы также обсуждаем непрерывный предел к уравнению Пенлеве $\mathrm{III}(D_8^{(1)})$, а также преобразование Бэклунда и алгебраическое решение для Пенлеве $A_7^{(1)'}$. В Разделе 1.3.3 мы очень кратко обсуждаем уравнение Пенлеве $A_7^{(1)}$.

После этого Раздела мы начинаем описывать два наших главных подхода к решению уравнений Пенлеве, которое мы уже упомянули в Разделе 1.2.4. Ниже мы их кратко обсуждаем.

1.3.1 Конформные блоки алгебры Супер Вирасоро

Раздел 2 дает обзор и доказательства различных фактов про модули Верма, вертексные операторы и конформные блоки алгебр Вирасоро и Супер Вирасоро.

Алгебры Вирасоро и Супер Вирасоро. Обзор начинается с Раздела 2.1, где определяются алгебры Вирасоро и Супер Вирасоро и их модули Верма, а также свободно-полевое представление для алгебры Супер Вирасоро.

Алгебра Вирасоро определяется разложением операторного произведения вида

$$T(z)T(w)=\frac{c/2}{(z-w)^4}+\frac{2T(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial T(w)}{z-w}+reg \tag{1.13}$$

для тока алгебры Вирасоро $T(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_nz^{-n-2}$.

Алгебра Супер Вирасоро или, иначе, Навье-Шварца-Рамона (NSR) — это $\mathcal{N}=1$ суперрасширение алгебры Вирасоро нечетным током $G(z)=\sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2}G_rz^{-r-3/2}$ с операторным разложением

$$G(z)G(w)=\frac{c_{\mathsf{NSR}}}{(z-w)^3}+\frac{2T(w)}{z-w}+reg \tag{1.14}$$

$$L(z)G(w)=\frac{3/2G(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial G(w)}{z-w}+reg, \tag{1.15}$$

где $c_{\mathsf{NSR}}=3/2c$. Здесь полуцелость индексов в G_r означает, что в последних формулах мы рассматриваем так называемый NS-сектор этой алгебры. Далее мы расширяем эту алгебру майорановским фермионом F (из того же сектора) до прямой суммы $\mathsf{F}\oplus\mathsf{NSR}$.

Раздел 2.2 начинается вложением $\mathsf{Vir}\oplus\mathsf{Vir}\subset\overline{U(\mathsf{F}\oplus\mathsf{NSR})}$ [CPSS90],которое в случае $c_{\mathsf{NSR}}=1, c^{(1)}=c^{(2)}=1$ имеет вид

$$T^{(\eta)}(z)=\frac{1}{2}T(z)+\frac{1}{2}T_f(z)+\frac{(-1)^\eta}{2i}f(z)G(z),\quad \eta=1,2, \tag{1.16}$$

где $T_f(z) = \frac{1}{2} : f'(z)f(z) :$ — это стандартный фермионный тензор энергии-импульса.

Ниже в этом обзоре все результаты для простоты будут сформулированы только для случая $c_{\mathsf{NSR}} = 1, c^{(1)} = c^{(2)} = 1$. Это как раз случай, где данное вложение дает билинейные соотношения на конформные блоки алгебры Вирасоро с $c = 1$, нужные для исследования решений уравнений Пенлеве. Тем не менее, все теоретико-представленческие результаты существуют для произвольного значения c_{NSR}, их можно найти в основном тексте.

Разложение модуля Верма и вектора Уиттекера. Раздел 2.2 продолжается обсуждением разложения модуля Верма в секторе Навье-Шварца и Рамона.

В NS-секторе это разложение имеет вид ([BBFLT11], Предл. 2.1 в основном тексте)

$$\pi_{\mathsf{F}} \otimes \pi_{\mathsf{NSR}}^{2\sigma^2} \cong \bigoplus_{2n\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathsf{Vir}}^{(\sigma+n)^2} \otimes \pi_{\mathsf{Vir}}^{(\sigma-n)^2}. \tag{1.17}$$

Здесь имеем в левой части тензорное произведение фермионного модуля Верма π^{F}, свободно порожденного (имеется в виду относительно универсальной обертывающей алгебры) отрицательными фермионными модами, и модуля Верма алгебры Супер Вирасоро $\pi_{\mathsf{NSR}}^{2\sigma^2}$ со старшим весом $2\sigma^2$ (относительно L_0), свободно порожденного отрицательными модами $T(z)$ and $G(z)$. Это тензорное произведение разлагается в прямую сумму тензорных произведений двух модулей Верма алгебры Вирасоро $\pi_{\mathsf{Vir}}^{(\sigma\pm n)^2}$ со старшими весами $(\sigma \pm n)^2$ (относительно $L_0^{(1,2)}$), свободно порожденных отрицательными модами $T^{(1,2)}(z)$. Разложение модуля Верма для Рамоновского сектора было доказано в [BS16b, Thm. 4.2.]. В этом случае модуль Верма π_{F} свободно порожден неотрицательными фермионными модами, поэтому в нем имеется два вектора старшего веса, отличающихся действием f_0. Аналогично, модуль Верма $\pi_{\mathsf{NSR}}^{2\sigma^2+\frac{1}{16}}$ свободно порожден отрицательными модами алгебры NSR, а также G_0, поэтому в нем имеется два вектора старшего веса $2\sigma^2 + \frac{1}{16}$, отличающихся действием G_0. Модуль $\pi_{\mathsf{F}} \otimes \pi_{\mathsf{NSR}}^{2\sigma^2+\frac{1}{16}}$ может быть разложен в четную и нечетную часть, используя оператор четности. Разложение в случае $c_{\mathsf{NSR}} = 1$ имеет вид

Теорема 1.2. *(для случая произвольного c_{NSR} см. Теорему 2.2 из основного текста) Модуль Верма для Рамоновского сектора $c_{NSR} = 1$ алгебры $F \oplus NSR$ со старшим весом $2\sigma^2 + \frac{1}{16}$ разлагается в сумму двух изоморфных собственных подпространств, отличающихся четностью (обозначены верхним индексом $0, 1$)*

$$\pi_{F\oplus NSR}^{2\sigma^2+\frac{1}{16}} \cong \pi_{F\oplus NSR}^{2\sigma^2+\frac{1}{16},0} \oplus \pi_{F\oplus NSR}^{2\sigma^2+\frac{1}{16},1} \tag{1.18}$$

каждый из них разлагается в сумму

$$\bigoplus_{2n+1/2\in\mathbb{Z}} \pi_{Vir}^{(\sigma+n)^2} \otimes \pi_{Vir}^{(\sigma-n)^2}. \tag{1.19}$$

Далее, в Разделе 2.3 рассматриваются понятия вертексных операторов для алгебр Вирасоро и Супер Вирасоро, Уиттекеровских векторов и цепочек в модулях Верма этих алгебр, а также соответствующие конформные блоки.

Вектор Уиттекера для алгебры Вирасоро $|W(z)\rangle$ from $\pi_{\mathsf{Vir}}^{\Delta}$ определен как

$$L_0|W(z)\rangle = z\frac{d}{dz}|W(z)\rangle, \quad L_1|W(z)\rangle = z|W(z)\rangle, \quad L_2|W(z)\rangle = 0, \tag{1.20}$$

а вектор Уиттекера для алгебры Супер Вирасоро $|W_{\mathsf{NS}}(z)\rangle$ из $\pi_{\mathsf{NSR}}^{\Delta^{\mathsf{NS}}}$ как

$$L_0|W_{\mathsf{NS}}(z)\rangle = z\frac{d}{dz}|W_{\mathsf{NS}}(z)\rangle, \quad G_{1/2}|W_{\mathsf{NS}}(z)\rangle = z^{1/2}|W_{\mathsf{NS}}(z)\rangle, \quad G_{3/2}|W_{\mathsf{NS}}(z)\rangle = 0. \tag{1.21}$$

Иррегулярный предел конформных блоков алгебр Вирасоро и Супер Вирасоро равен скалярному произведению соответствующих векторов Уиттекера

$$\mathcal{F}^{\mathsf{NS}}(\Delta^{\mathsf{NS}}|z) = \langle W_{NS}(1)|W_{NS}(z)\rangle, \quad \mathcal{F}(\Delta|z) = \langle W(1)|W(z)\rangle. \tag{1.22}$$

В Разделе 2.4 описано разложение векторов Уиттекера и цепочек для алгебры Супер Вирасоро в сумму $\mathsf{Vir}\oplus\mathsf{Vir}$ векторов Уиттекера и цепочек соответственно, которое следует из разложения $\pi_{\mathsf{F}}\otimes\pi_{\mathsf{NSR}}^{\Delta^{\mathsf{NS}}}$.

Предложение 1.2. *(для случая произвольного c_{NSR} см. Предл. 2.1 в основном тексте) Вектор Уиттекера алгебры Супер Вирасоро разлагается в сумму $\mathsf{Vir}\oplus\mathsf{Vir}$ векторов Уиттекера*

$$|1\otimes W_{\mathsf{NS}}(z)\rangle = \sum_{2n\in\mathbb{Z}} \left(l_n \left(|W_n^{(1)}(z)\rangle \otimes |W_n^{(2)}(z)\rangle \right) \right), \tag{1.23}$$

с некоторыми, не зависящими от z, коэффициентами разложения l_n

Также здесь рассматривается более общий результат о разложении вертексного оператора алгебры Супер Вирасоро в произведение двух вертексных операторов алгебры Вирасоро (Теорема 2.3 в основном тексте).

В конце, в Разделе 2.5 мы вычисляем коэффициенты l_n. Ответ следующий

Теорема 1.3. *(см. более общую Теорему 2.4 в основном тексте) Коэффициенты l_n равны*

$$l_n^2(\sigma) = (-1)^{2n} \frac{2^{4\sigma^2}}{\prod\limits_{k=1}^{2|n|-1} (k^2-4\sigma^2)^{2(2|n|-k)}(4\sigma^2)^{2|n|}} \tag{1.24}$$

Теорема 2.4 дает гораздо более общий ответ для коэффициентов разложения вышеупомянутого разложения вертексных операторов, это важный технический результат.

Доказательство билинейных соотношений. В Разделе 3 представлен теоретико-представленческий подход к решению уравнения Пенлеве III$(D_8^{(1)})$ и более общего уравнения Пенлеве VI$(D_4^{(1)})$. Используя этот подход, мы доказываем Теорему 1.1, и одновременно формулы для тау-функций Пенлеве V и $\mathrm{III}'_{1,2,3}$, которые могут быть получены предельной процедурой, упоминаемой раньше. Несмотря на это, мы начинаем с доказательства формулы для тау-функции Пенлеве III$(D_8^{(1)})$, являющегося более иллюстративным. Аналог Теоремы 1.1 в этом случае имеет вид

Теорема 1.4. *(Теорема 3.1. в основном тексте) Тау-функция Пенлеве III$(D_8^{(1)})$ общего положения равна ряду Фурье от иррегулярных $c=1$ конформных блоков алгебры Вирасоро $\mathcal{F}(\sigma^2|z)=\mathcal{F}_{c=1}(\sigma^2|z)$, определенных формулой* (1.22)

$$\tau(\sigma,s|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{C}_{III_3'}(\sigma+n)s^n\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z), \quad \operatorname{Re}\sigma\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right\}, \quad s\in\mathbb{C}\setminus\{0\}, \tag{1.25}$$

где коэффициенты $\mathcal{C}(\sigma)$ выражаются через G*-функцию Барнса*

$$\mathcal{C}_{III_3'}(\sigma) = \frac{1}{\mathsf{G}(1-2\sigma)\mathsf{G}(1+2\sigma)}, \tag{1.26}$$

Параметры s и σ играют роль констант интегрирования уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$).

Сначала идет Раздел 3.1, в котором даны соответствующие формулировки.

В Разделе 3.2 доказана формула (1.25). Мы начинаем с простого случая алгебраической тау-функции $z^{1/16}e^{\mp 4\sqrt{z}}$, соответствующей случаю $\sigma = 1/4$, $s = \pm 1$ (согласно Предл. 1.1), используя разложения фоковского модуля нечетного бозона. Далее мы доказываем, что предполагаемая тау-функция (1.25) удовлетворяет уравнению типа Тоды (1.4) так же как и билинейной тау-форме порядка 4, используя NS-сектор алгебры $\mathsf{F} \oplus \mathsf{NSR}$, т.е. мы доказали Теорему 0.4. Наконец, из Рамоновского сектора алгебры $\mathsf{F} \oplus \mathsf{NSR}$ мы показываем, что предполагаемая тау-функция удовлетворяет уравнениям типа Окамото — другой тау-форме Пенлеве III($D_8^{(1)}$).

Основная идея состоит в вычислении матричного элемента

$$\langle 1 \otimes W_{\mathsf{NS}}(1)| \left(\sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} f_{-r} G_r \right)^k |1 \otimes W_{\mathsf{NS}}(z)\rangle = i^k \langle W_n^{(1)}(1)\rangle \otimes |W_n^{(2)}(1)|(L_0^{(1)} - L_0^{(2)})^k |W_n^{(1)}(z)\rangle \otimes |W_n^{(2)}(z)\rangle \tag{1.27}$$

с двух точек зрения: в терминах $\mathsf{Vir} \oplus \mathsf{Vir}$ или $\mathsf{F} \oplus \mathsf{NSR}$.

Со стороны $\mathsf{Vir} \oplus \mathsf{Vir}$ вычисление дает

$$\langle W_n^{(1)}(1)\rangle \otimes |W_n^{(2)}(1)|(L_0^{(1)} - L_0^{(2)})^k |W_n^{(1)}(z)\rangle \otimes |W_n^{(2)}(z)\rangle = \sum_{2n\in\mathbb{Z}} l_n^2 \cdot D^k_{[\log z]}(\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z), \mathcal{F}((\sigma-n)^2|z)), \tag{1.28}$$

где производная Хироты $D^k_{[\log z]}$ дается формулой

$$f(e^{\alpha}z)g(e^{-\alpha}z) = \sum_{k=0}^{\infty} D^k_{[\log z]}(f(z), g(z)) \frac{\alpha^k}{k!}. \tag{1.29}$$

С другой стороны, вычсиление в терминах $\mathsf{F} \oplus \mathsf{NSR}$ дает ($k = 0$)

$$\mathcal{F}_{\mathsf{NS}} = \sum_{2n\in\mathbb{Z}} l_n^2 \cdot \mathcal{F}((\sigma+n)^2|z)\mathcal{F}((\sigma-n)^2|z) \tag{1.30}$$

и для $k = 2$ получаются следующие нетривиальные соотношения

$$-z^{1/2}\mathcal{F}_{\mathsf{NS}} = \sum_{2n\in\mathbb{Z}} l_n^2 \cdot D^2_{[\log z]}(\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z), \mathcal{F}((\sigma-n)^2|z)). \tag{1.31}$$

Исключая $\mathcal{F}_{\mathsf{NS}}$ из этих двух соотношений, получаем билинейные соотношения

$$\sum_{2n\in\mathbb{Z}} l_n^2 \cdot D^k_{[\log z]}(\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z), \mathcal{F}((\sigma-n)^2|z)) = -z^{1/2} \sum_{2n\in\mathbb{Z}} l_n^2 \cdot \mathcal{F}((\sigma+n)^2|z)\mathcal{F}((\sigma-n)^2|z). \tag{1.32}$$

И это билинейное соотношение как раз достаточно для доказательства Теоремы 1.4(после сравнения коэффициентов l_n с теми, которые приходят из функции $\mathcal{C}_{III_3'}$) т.е. доказательства, что тау-функция (1.25) удовлетворяет тау-форме типа Тоды (1.4) уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$).

В Разделе 3.3 аналогично доказана формула для тау-функции уравнения Пенлеве VI($D_4^{(1)}$) (Теорема 1.1).

1.3.2 Соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки и $c = -2$ тау-функции

В Разделе 4 мы делаем обзор и доказываем различные факты про статсуммы Некрасова и уравнения раздутия.

Статсуммы Некрасова. В Разделе 4.1 дается обзор формул и свойств для инстантонной, классической и однопетлевой части пятимерной суперсимметричной $SU(2)$ статсуммы без материй, доказана сходимость инстантонной части статсуммы в случае $-\epsilon_1/\epsilon_2 \in \mathbb{Q} > 0$. Далее изучается четырехмерный предел этой статсуммы.

Хорошо известно, что суперсимметричная $U(r)$ калибровочная теория Янга-Миллса на $\mathbb{C}^2$ (мы будем рассматривать случай без полей материи) допускает специальные решения, называемые инстантонами, их тип характеризуется так называемым инстантонным числом $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, которое пробегает от 0 (нет инстантона) до $+\infty$. Обозначим $M(r,n)$ компактификацию (Гизекера) пространства модулей инстантонов с инстантонным числом n. Инстантонная статсумма Некрасова для данной теории определена как эквивариантный объем пространств $M(r,n)$

$$\mathcal{Z}_{inst}(\epsilon_1, \epsilon_2, \{a_i\}; z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \int_{M(r,n)} 1, \tag{1.33}$$

где $a_i, i = 1, r$ — это координаты на алгебре Ли тора $(\mathbb{C}^*)^r \subset U(r)$, а ϵ_1, ϵ_2 — это координаты на алгебре Ли тора $(\mathbb{C}^*)^2$. Пространство $M(r,n)$ имеет ADHM-описание [ADHM78], в котором эти два тора действуют просто матричными умножениями. С точки зрения физики, a_i — это вакуумные средние, а ϵ_1, ϵ_2 — так называемые параметры Ω-деформации.

Этот интеграл локализуется на точки $M(r,n)$, неподвижные относительно действия вышеупомянутого $r+2$-мерного тора. Эти неподвижные точки помечаются наборами из r диаграм Юнга $(\lambda^{(1)}, \ldots \lambda^{(r)})$, $n = \sum_{i=1}^r |\lambda^{(i)}|$. Для случая $SU(2)$ такое вычисление дает (в этом случае $a_1 + a_2 = 0$, мы обозначаем $a = a_1 - a_2$)

$$\begin{gathered}
\mathcal{Z}_{inst}(a_1, a_2; \epsilon_1, \epsilon_2 | z) = \sum_{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}} \frac{z^{|\lambda^{(1)}| + |\lambda^{(2)}|}}{\prod_{i,j=1}^2 \mathsf{N}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}(a_i - a_j; \epsilon_1, \epsilon_2)}, \\
\mathsf{N}_{\lambda,\mu}(a; \epsilon_1, \epsilon_2) = \\
= \prod_{s \in \lambda} (a - \epsilon_2(a_\mu(s) + 1) + \epsilon_1 l_\lambda(s)) \prod_{s \in \mu} (a + \epsilon_2 a_\lambda(s) - \epsilon_1(l_\mu(s) + 1)),
\end{gathered} \tag{1.34}$$

где $a_\lambda(s), l_\lambda(s)$ — длины рук и ног для клетки s в диаграмме Юнга λ. Как уже упоминалось ранее, согласно АГТ-соответствию [AGT09], эта статсумма Некрасова равна иррегулярному пределу четырехточеченого конформного блока алгебры Вирасоро $\mathcal{F}(\Delta|z)$ (нормированного на $1 + O(z)$) с центральным зарядом и старшим весом равными

$$c = 1 + 6\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad \Delta = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - a^2}{4\epsilon_1 \epsilon_2}. \tag{1.35}$$

Случай $c = 1$ соответствует $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$, в этом случае мы используем параметризацию $\Delta = \sigma^2$. Вместо инстантонной статсуммы $\mathcal{Z}_{inst}$ можно рассмотреть полную статсумму $\mathcal{Z}$ суперсимметричной $U(r)$-калибровочной теории Янга-Миллса без полей материи, которая дополнительно содержит множители, называемые классической и однопетлевой частью.

Они даются некоторыми простыми функциями — аналогами префактора z^{σ^2} конформного блока $\mathcal{F}(\sigma^2|z)$ и функции $\mathcal{C}$ из (1.25) соответственно. Таким образом, эта полная статсумма $\mathcal{Z}$ равна функции $\mathcal{C}(\sigma)\mathcal{F}(\sigma^2|z)$ на стороне конформной теории поля. И (1.25) — это ряд Фурье (1.10) от этих полных статсумм $\mathcal{Z}$.

Для построения тау-функций уравнений q-Пенлеве, нужны q-аналоги этих статсумм $\mathcal{Z}(u;q_1,q_2|z)$, и это статсумма на $\mathbb{C}^2$, расширенном пятым компактным измерением радиуса $R=-\log q$, более точно, на некотором факторе $(\mathbb{C}^2\times\mathbb{R})/\mathbb{Z}$. Тут $q_i=e^{R\epsilon_i}$, $u_i=e^{R\epsilon_i}$, $u=u_1/u_2, u_1u_2=1$. Формулы для инстантонных статсумм в пятимерном случае отличаются от четырехмерного, грубо говоря, q-деформацией всех множителей $(\ldots)\mapsto 1-q^{\cdots}$.

Соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки и их двойственная формулировка. Раздел 4.2 дает обзор соотношений на введенные выше статсуммы, известных как соотношения раздутия, начиная с наиболее обычного, изначально полученного Х. Накаджимой и К. Ёшиокой.

Это соотношения на четырехмерную и пятимерную статсумму [NY03], [NY05] (дальнейшее развитие в [GNY06] и [NY09]). Они выражают инстантонную статсумму на $\widehat{\mathbb{C}^2}=$ ($\mathbb{C}^2$ раздутая в точке) в виде билинейного выражения на инстантонные статсуммы на $\mathbb{C}^2$

$$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathbb{C}^2}}(a;\epsilon_1,\epsilon_2|z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a+2\epsilon_1 n;\epsilon_1,\epsilon_2-\epsilon_1|z)\mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a+2\epsilon_2 n;\epsilon_1-\epsilon_2,\epsilon_2|z). \tag{1.36}$$

С другой стороны, статсумма на $\widehat{\mathbb{C}^2}$ равна

$$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathbb{C}^2}}(a;\epsilon_1,\epsilon_2|z)=\mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a;\epsilon_1,\epsilon_2|z). \tag{1.37}$$

Исключая статсумму на $\widehat{\mathbb{C}^2}$, получаем соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a;\epsilon_1,\epsilon_2|z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a+2\epsilon_1 n;\epsilon_1,\epsilon_2-\epsilon_1|z)\mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a+2\epsilon_2 n;\epsilon_1-\epsilon_2,\epsilon_2|z). \tag{1.38}$$

Существуют также дифференциальные (для четырехмерного случая) и q-разностные (для пятимерного) соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки.

Однако, билинейные соотношения на $c=1$ конформные блоки, которые мы изучали ранее, соответствуют другим уравнениям раздутия, а именно уравнениям раздутия на пространстве $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ (такие соотношения в четырехмерном случае изучались в работах $\mathbb{C}^2$ [BMT11I], [BPSS13], [O18])

$$\tilde{\beta}_j^D\mathcal{Z}_{X_2}(a,\epsilon_1,\epsilon_2|z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}+j/2}\mathrm{D}\Big(\mathcal{Z}(a+2n\epsilon_1;2\epsilon_1,-\epsilon_1+\epsilon_2|z),\mathcal{Z}(a+2n\epsilon_2;\epsilon_1-\epsilon_2,2\epsilon_2|z)\Big),\quad j\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \tag{1.39}$$

где X_2 — это минимальное разрешение $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, D — некоторый дифференциальный оператор, $\tilde{\beta}_j^D$ — некоторый простой коэффициент. Исключая $\mathcal{Z}_{X_2}$ из двух соотношений такого типа, получаем билинейные соотношения на $\mathcal{Z}$, которые в случае $\epsilon_1+\epsilon_2=0$ становятся билинейными соотношениями на $c=1$ конформные блоки, которые изучались ранее. Ища тау-функцию (1.10), удовлетворяющую (1.7), мы можем использовать пятимерные аналоги этих соотношений.

В Разделах 4.2.2, 4.2.3 мы получаем соотношения раздутия на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ из соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки (см. также [S20]). Наиболее важное доказанное соотношение (формула (4.60) в основном тексте)

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{Z}(uq_1^{2n};q_1^2,q_2q_1^{-1}|q_1^2z)\mathcal{Z}(uq_1^{2n};q_1q_2^{-1},q_2^2|q_2^2z)\\
&= (1-(q_1q_2)^{1/2}z^{1/2})\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{Z}(uq_1^{2n};q_1^2,q_2q_1^{-1}|z)\mathcal{Z}(uq_1^{2n};q_1q_2^{-1},q_2^2|z)
\end{aligned} \tag{1.40}$$

В Разделе 4.2.4 мы доказываем соотношения между статсуммами $\mathcal{Z}^{[2]}$ и $\mathcal{Z}^{[0]}$ которые различаются уровнем дополнительной теории Черн-Саймонса, используя соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки на такие статсуммы.

Предложение 1.3. *(Предл. 4.4 в основном тексте) Статсумма Некрасова $\mathcal{Z}^{[2]}$ равна $\mathcal{Z}^{[0]}$ с точностью до двойного символа q-Похгаммера*

$$\mathcal{Z}^{[2]}(u;q_1,q_2|z) = (z;q_1,q_2)_\infty \mathcal{Z}^{[0]}_{inst}(u;q_1,q_2|z). \tag{1.41}$$

Таким же образом мы доказываем инвариантность $\mathcal{Z}^{[1]}(u;q_1,q_2|z)$ при $q_1,q_2\mapsto q_1^{-1},q_2^{-1}$ (Предл. 4.5 в основном тексте).

От соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки к уравнению Пенлеве $A_7^{(1)'}$. В коротком Разделе 5 мы доказываем формулу для тау-функции Пенлеве $A_7^{(1)'}$ (предложенную в [BS16q]) и Пенлеве $A_7^{(1)}$, используя ранее полученные соотношения раздутия для $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ (Раздел 5.1). Например, для Пенлеве $A_7^{(1)'}$ доказанная Теорема формулируется следующим образом.

Теорема 1.5. *(Теорема 5.1. в основном тексте) Пусть функции $\tau_j(u,s;q|z)$, $j\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ заданы формулой*

$$\tau_j(u,s;q|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+j/2} s^n \mathcal{Z}(uq^{2n};q^{-1},q|z), \tag{1.42}$$

где $\mathcal{Z}$ — пятимерная суперсимметричная $SU(2)$ статсумма калибровочной теории без материи. Тогда эти функции — это тау-функции уравнения Пенлеве III($A_7^{(1)'}$) т.е. они удовлетворяют (1.7).

К примеру, доказательство для случая $A_7^{(1)'}$ основано на формуле (1.40). Другое доказательство этой Теоремы, использующее $c=-2$ тау-функции, представлено ниже.

Далее изучена сходимость и непрерывный предел этих тау-функций(Раздел 5.2), а также тау-функция алгебраического решения $G(z)=\pm\sqrt{z}$ уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$ (1.5) (Раздел 5.3). Последняя равна

$$\tau=\tau_1 = z^{1/16}(\pm q^{1/2}z^{1/2};q^{1/2},q^{1/2})_\infty. \tag{1.43}$$

Раздел 6 начинается с определения $c=-2$ тау-функции уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$ (Раздел 6.1.1).

Возьмем частный случай $\epsilon_1+\epsilon_2=0$ соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки (4-х или пятимерных)

$$\mathcal{Z}(a;\epsilon_1,-\epsilon_1|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{Z}(a+2n\epsilon_1;\epsilon_1,-2\epsilon_1|z)\mathcal{Z}(a+2n\epsilon_1;2\epsilon_1,-\epsilon_1|z). \tag{1.44}$$

Согласно (1.35) статсумма в левой части соответствует центральному заряду $c=1$, а обе статсуммы в правой соответствуют центральному заряду $c=-2$. Статсуммы в правой части отличаются на некоторую простую функцию, мы различаем соответствующие тау-функции верхним индексом $\pm$.

Тогда естественно составить ряд Фурье слева и справа

$$\tau(\sigma,s|z)=\boldsymbol{\tau}^{-}(\sigma,s|z)\boldsymbol{\tau}^{+}(\sigma,s|z) \tag{1.45}$$

где в левой части стандартная $c=1$ тау-функция (1.10), а в правой — так называемые $c=-2$ тау-функции, определенные по формулам

$$\boldsymbol{\tau}^{\pm}(a,s|z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}s^{n/2}\mathcal{Z}(a+2n\epsilon_1;\pm\epsilon_1,\mp2\epsilon_1|z), \tag{1.46}$$

которые являются рядами Фурье (1.10) на $c=-2$ конформные блоки, в отличие от стандартного случая $c=1$. Соотношение (1.45) можно рассматривать как соотношение раздутия Накаджимы-Ёшиоки (1.38) в двойственной форме.

Раздел 6.1.2 устанавливает связь $c=-2$ тау-функций и уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$ and $A_7^{(1)}$, тут дается иное доказательство формулы для обычной тау-функции этих уравнений (в частности, Теоремы 1.5 для случая $A_7^{(1)'}$).

Кроме соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки (1.38) (или (1.45) в двойственной формулировке), существуют еще q-разностные (в пятимерном случае) соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки, в двойственной формулировке они имеют вид

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{\tau}^{+}}\underline{\boldsymbol{\tau}^{-}}-\underline{\boldsymbol{\tau}^{+}}\overline{\boldsymbol{\tau}^{-}}&=-2z^{1/4}\tau_1,\\ \overline{\boldsymbol{\tau}^{+}}\underline{\boldsymbol{\tau}^{-}}+\underline{\boldsymbol{\tau}^{+}}\overline{\boldsymbol{\tau}^{-}}&=2\tau,\end{aligned} \tag{1.47}$$

где введены обозначения $\overline{\boldsymbol{\tau}}=\boldsymbol{\tau}(qz)$, $\underline{\boldsymbol{\tau}}=\boldsymbol{\tau}(q^{-1}z)$.

Предложение 1.4. *(Предл. 6.1 в основном тексте) Возьмем* (1.47) *и* (1.45). *Тогда τ и τ_1 удовлетворяют уравнениям типа Тоды*

$$\overline{\tau}\underline{\tau}=\tau^2-z^{1/2}\tau_1^2. \tag{1.48}$$

Доказательство. Доказательство совершенно элементарно. Мы подставляем τ_1 и τ разными способами

$$\overline{\boldsymbol{\tau}^{+}\boldsymbol{\tau}^{-}}\,\underline{\boldsymbol{\tau}^{+}\boldsymbol{\tau}^{-}}=\frac{1}{4}(\overline{\boldsymbol{\tau}^{+}}\underline{\boldsymbol{\tau}^{-}}+\underline{\boldsymbol{\tau}^{+}}\overline{\boldsymbol{\tau}^{-}})^2-\frac{1}{4}(\overline{\boldsymbol{\tau}^{+}}\underline{\boldsymbol{\tau}^{-}}-\underline{\boldsymbol{\tau}^{+}}\overline{\boldsymbol{\tau}^{-}})^2 \tag{1.49}$$

□

Соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки являются доказанными, поэтому мы получаем доказательство формулы (1.10) для тау-функции уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$.

В Разделе 6.1.3 находятся $c=-2$ тау-функции, соответствующие алгебраическому решению уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$.

Свойства $c=-2$ тау-функции. Как уже упоминалось, эти $c=-2$ тау-функции имеют естестенный смысл сами по себе. Диссертация продолжается изучением свойств $c=-2$ тау-функций.

В Разделе 6.1.4 разложение $c=1$ тау-функции в произведение $c=-2$ тау-функций (1.45) связывается с разложением спектрального детерминанта оператора, обратного к гамильтониану релятивистской Тоды. А именно, такая факторизация $c=1$ тау-функции известна в контексте ABJ-теории [BGT17], где изначально рассматривалась $c=1$ тау-функция Пенлеве $A_7^{(1)'}$ с точки зрения двойственности между топологическими струнами и спектральной теорией.

Более точно, они нашли, что эта тау-функция в случае $|q|=1$, $s=1$ с точностью до некоторого простого множителя равна статсумме Ξ большого канонического ансамбля для ABJ теории. Статсумма Ξ, которая равна детерминанту Фредгольма вышеупомянутого оператора, естественно факторизуется в соответствии с четностью собственных значений этого оператора, как $\Xi=\Xi^+\Xi^-$.

К тому же, эти множители удовлетворяют так называемым "квантовым Вронскианным"соотношениям, обнаруженным в [GHM14']. Они оказываются эквивалентными (с точностью до некоторых простых множителей) соотношениям раздутия Накаджимы-Ёшиоки (1.47) на функции Ξ^+ and Ξ^-.

Далее (в Разделе 6.1.5) мы рассматриваем непрерывный предел $c=-2$ тау-функций и изучаем уравнения Книжника-Замолодчикова на $c=-2$ тау-функции. В этом четырехмерном случае $c=-2$ тау-функции удовлетворяют

$$z\frac{d}{dz}\uptau^{\pm}=\frac{1}{2}(\zeta\mp i\sqrt{\zeta'})\uptau^{\pm}, \tag{1.50}$$

где ζ — это гамильтониан уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$), связанный с $c=1$ тау-функцией по формуле $z\frac{d}{dz}\tau=\zeta\tau$. "Собственные значения"в (1.50) по-видимому, оказываются гамильтонианами уравнения Пенлеве III($D_6^{(1)}$).

Другое интересное явление, связанное с $c=-2$ тау-функциями, мы вынесли в отдельный Раздел 6.2.

Как уже упоминалось ранее, $c=-2$ тау-функции, соответствующие уравнению Пенлеве $A_7^{(1)'}$, оказываются $c=1$ тау-функциями для специального случая уравнения Пенлеве $A_3^{(1)}$.

Уравнение q-Пенлеве VI (или $A_3^{(1)}$) — это система из 8 q-разностных уравнений билинейных первого порядка на 8 тау-функций $\tau_1\ldots\tau_8$, зависящая от 4 (кроме q) параметров $\theta_0,\theta_z,\theta_1,\theta_\infty$. В специальном случае, когда $q^{\theta_\kappa}=i$ для всех κ, эта динамика эквивалентна (при подстановке $z\mapsto z^{1/2}$) динамике 4 $c=-2$ тау-функций данной 4-мя q-разностными уравнениями второго порядка ($j\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

$$\overline{\uptau_j^+}=\frac{\uptau_j^+\uptau_j^- - z^{1/4}\uptau_{j+1}^+\uptau_{j-1}^-}{\underline{\uptau_j^-}},\quad \overline{\uptau_j^-}=\frac{\uptau_j^+\uptau_j^- + z^{1/4}\uptau_{j+1}^+\uptau_{j-1}^-}{\underline{\uptau_j^+}}, \tag{1.51}$$

где $\uptau_0^{\pm}(u;q|z)=\uptau^{\pm}(u;q|z)$, $\uptau_1^{\pm}(u;q|z)=s^{1/2}\uptau^{\pm}(uq;q|z)$, $\tau(u;q|z)$ — это пятимерный аналог (1.46). Эти уравнения следуют из (1.47) и из тех же самых соотношений при $u\mapsto uq$, откуда мы исключаем $c=1$ тау-функции, пользуясь (1.45).

Мы имеем

Предложение 1.5. *(Предл. 6.4. из основного текста) Рассмотрим набор* $(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5,\tau_6,\tau_7,\tau_8) = (\tau_0^+,\tau_0^-,\tau_1^+,\tau_1^-,\underline{\tau_0^-},\underline{\tau_0^+},\underline{\tau_1^-},\underline{\tau_1^+})$*, где функции* $\tau_0^\pm,\tau_1^\pm$ *удовлетворяют динамике выше. Этот набор является решением тау-формы уравнения Пенлеве* $A_3^{(1)}$ *в случае* $q^{\theta_0}=q^{\theta_t}=q^{\theta_1}=q^{\theta_\infty}=i$ *при подстановке* $z\mapsto z^{1/2}$*.*

В соответствии с формулой для тау-функции уравнения q-Пенлеве VI, которая имеет вид (1.10) где $\mathcal{Z}$ — это q-деформированные четырехточечные конформные блоки [JNS17], мы получаем что соотношение выше должно влечь соотношения на инстантонные статсуммы Некрасова

$$(-qz^{1/2};q,q)_\infty^2\mathcal{Z}_{inst}(i,i,i,iq^{\pm1/2},u|z^{1/2}) = \mathcal{Z}_{inst}(u;q^{-1},q^2|z) \tag{1.52}$$

В Разделе 6.2.2 мы вычисляем непрерывный предел полученного соотношения (1.52), результат, по-видимому, связан с известным фолдингом уравнения Пенлеве $D_6^{(1)}$ в $D_8^{(1)}$[TOS05].

В Аппендиксе A собраны нужные факты о некоторых q-спецфункциях (Апп. A.1), о кратных гамма-функциях (Апп. A.2), в Апп. A.3 они связываются непрерывным пределом.

Результаты диссертации опубликованы в четырёх статьях:

1. M. Bershtein, A. Shchechkin, *Bilinear equations on Painlevé τ functions from CFT*, Communications in Mathematical Physics 339 (3), (2015), 1021-1061.

2. M. Bershtein, A. Shchechkin, *q-deformed Painlevé tau function and q-deformed conformal blocks*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 50 (8), (2017), 085202.

3. M. Bershtein, A. Shchechkin, *Bäcklund transformation of Painlevé III(D_8) tau function*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 50 (11), (2017), 115205.

4. M. Bershtein, A. Shchechkin, *Painlevé equations from Nakajima-Yoshioka blowup relations*, Letters in Mathematical Physics 109 (11), (2019), 2359-2402

Список литературы

[AGT09] L. F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, *Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories*, Lett. Math. Phys. **91** (2010) 167–197; [`arXiv:0906.3219`]

[ADHM78] M. F. Atiyah, V. G. Drinfeld, N. J. Hitchin, and Y. I. Manin, *Construction Of Instantons*, Phys. Lett. **65A** (1978) 185

[AY09] H. Awata, Y. Yamada, *Five-dimensional AGT Conjecture and the Deformed Virasoro Algebra*, JHEP **1001** (2010), 125; [`arXiv:0910.4431`].

[BBFLT11] A. Belavin, M. Bershtein, B. Feigin, A. Litvinov, G. Tarnopolsky, *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **319 1**, 269-301 (2013); [`arXiv:1111.2803`]

[BL94] D. Bernard, A. LeClair, *Differential equations for sine-Gordon correlation functions at the free fermion point*, Nucl. Phys. **B426**, (1994), 534–558; [`arXiv:hep-th/9402144`].

[BGM17] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov, *Cluster integrable systems, q-Painleve equations and their quantization*, JHEP **1802**, (2018), 077; [arXiv:1711.02063].

[BGM18] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov, *Cluster Toda chains and Nekrasov functions*; TMF, **198:2** (2019), 179–214; Theoret. and Math. Phys., **198:2** (2019), 157–188 [arXiv:1804.10145].

[BS14] M. Bershtein, A. Shchechkin, *Bilinear equations on Painlevé tau functions from CFT*, Comm. Math. Phys. **339 (3)**, (2015), 1021–1061; [arXiv:1406.3008].

[BS16q] M. Bershtein, A. Shchechkin, *q-deformed Painlevé tau function and q-deformed conformal blocks*, J. Phys. A. **50 (8)** (2017) 085202; [arXiv:1608.02566].

[BS16b] M. Bershtein, A. Shchechkin, *Bäcklund transformation of Painlevé III(D_8) τ function*, J. Phys. A. **50 (11)** (2017) 115205; [arXiv:1608.02568].

[BS18] M. Bershtein, A. Shchechkin, *Painlevé equations from Nakajima-Yoshioka blowup relations*, Lett. Math. Phys. **109 (11)**, (2019), 2359-2402; [arXiv:1811.04050].

[B1911] G.D.Birkhoff, *General Theory of Linear Difference equations*, Trans. of Am. Math. Soc. 12, no. 2 (Apr. 1911), 243-284.

[B1913] G.D.Birkhoff, *The generalized Riemann problem for linear differential equations and allied problems for linear difference and q-difference equations*, Proc. of Amer. Acad. of Arts and Sciences 49, no.9 (Oct. 1913), 521-568.

[BGT16] G. Bonelli, A. Grassi, A. Tanzini, *Seiberg-Witten theory as a Fermi gas*, Lett. Math. Phys. **107**, (2017), 1–30; [arXiv:1603.01174].

[BGT17] G. Bonelli, A. Grassi, A. Tanzini, *Quantum curves and q-deformed Painlevé equations*, Lett. Math, Phys (2019); [arXiv:1710.11603].

[BLMST16] Giulio Bonelli, Oleg Lisovyy, Kazunobu Maruyoshi, Antonio Sciarappa, Alessandro Tanzini, *On Painlevé/gauge theory correspondence*, Letters in Mathematical Physics **107 (12)**, (2017), 2359-2413; [arXiv:1612.06235].

[BMGT19] G. Bonelli, F. Del Monte, P. Gavrylenko, A. Tanzini, *$\mathcal{N} = 2*$ gauge theory, free fermions on the torus and Painlevé VI*, [arXiv:1901.10497].

[BMGT19W] G. Bonelli, F. Del Monte, P. Gavrylenko, A. Tanzini, *Circular quiver gauge theories, isomonodromic deformations and W_N fermions on the torus*, [arXiv:1909.07990].

[BMT11I] G. Bonelli, K. Maruyoshi, and A. Tanzini, *Instantons on ALE spaces and Super Liouville Conformal Field Theories*, JHEP **1108** (2011) 056; [arXiv:1106.2505].

[BE11] G. Borot and B. Eynard, *Geometry of Spectral Curves and All Order Dispersive Integrable System*, SIGMA, **8** (2012), 53 pages; [arXiv:1110.4936].

[BPSS13] U. Bruzzo, M. Pedrini, F. Sala and R. Szabo, *Framed sheaves on root stacks and supersymmetric gauge theories on ALE spaces*, Adv. Math. **288** (2016), 1175—1308; [arXiv:1312.5554].

[CGL17] M. Cafasso, P. Gavrylenko, O. Lisovyy, *Tau functions as Widom constants*, Comm. Math. Phys. **365**, (2019), 741–772; [arXiv:1712.08546].

[CDL] P. A. Clarkson, *Painlevé transcendents*, Digital Library of Special Functions, Chapter 32, [http://dlmf.nist.gov/32].

[C99] *The Painlevé Property: One Century Later*. ed. by R. Conte (New York: Springer, 1999).

[CPSS90] C. Crnkovic, R. Paunov, G. Sotkov, and M. Stanishkov, *Fusions of conformal models*, Nucl.Phys. **B336** (1990) 637.

[EM08] B. Eynard and M. Mariño, *A holomorphic and background independent partition function for matrix models and topological strings*, J. Geom. Phys. **61** (2011), 1181–1202; [arXiv:0810.4273].

[FS92] P. Fendley, H. Saleur, *$\mathcal{N}=2$ Supersymmetry, Painlevé III and Exact Scaling Functions in 2D Polymers*, Nucl.Phys. **B388**, (1992), 609–626; [arXiv:hep-th/9204094].

[FIKN06] A. Fokas, A. Its, A. Kapaev, V. Novokshenov, *Painlevé transcendents: the Riemann-Hilbert approach*, Mathematical Surveys and Monographs **128**, AMS, Providence, RI, (2006).

[F10Book] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, London Math. Soc. Monographs, Princeton Univ. Press, (2010).

[F1905] R. Fuchs, *Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **141** (1905) 555–558.

[F1907] R. Fuchs, *Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegene wesentlich singuläre Stellen*, Math. Ann. **63** (1907) 301–321

[GIL12] O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, *Conformal field theory of Painlevé VI*, JHEP **1210**, (2012), 38; [arXiv:1207.0787].

[GIL13] O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, *How instanton combinatorics solves Painlevé VI, V and III's*, J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013) 335203; [arXiv:1302.1832].

[G1910] B. Gambier, *Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'integrale générale est à points critique fixés*, Acta. Math. **33** (1910) 1–55

[G1912] R. Garnier, *Sur des équations différentielles du troisi ème ordre dont l'intégrale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses point critiques fixés*, Ann. Sci. de l'ENS **29** (1912) 1–126.

[G1917] R. Garnier, *Etudes de l'intégrale générale de l'équation VI de M. Painlevé dans le voisinage de ses singularité transcendentes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **34** (1917) 239–353.

[G15] P. Gavrylenko, *Isomonodromic τ-functions and W_N conformal blocks*, JHEP **0915**, (2015), 167; [arXiv:1509.00259].

[GL16] P. Gavrylenko, O. Lisovyy, *Fredholm determinant and Nekrasov sum representations of isomonodromic tau functions*, Comm. Math. Phys. **363 1**, (2018), 1–58; [arXiv:1608.00958].

[GL17] P. Gavrylenko, O. Lisovyy, *Pure $SU(2)$ gauge theory partition function and generalized Bessel kernel*, [arXiv:1705.01869].

[GIL18] P. Gavrylenko, N. Iorgov, O. Lisovyy, *Higher rank isomonodromic deformations and W-algebras*; [arXiv:1801.09608].

[GIL18FST] P. Gavrylenko, N. Iorgov, O. Lisovyy, *On solutions of the Fuji-Suzuki-Tsuda system*; [arXiv:1806.08650].

[GS18] P. Gavrylenko, R. Santachiara, *Crossing invariant correlation functions at $c = 1$ from isomonodromic τ functions*, Journal of High Energy Physics 2019 **(11)**, 119; [arXiv:1812.10362].

[GNY06] L. Göttshe, H. Nakajima, K. Yoshioka, *K-theoretic Donaldson invariants via instanton counting*, Pure Appl. Math. Quart. **5** (2009) 1029–1111; [arXiv:math/0611945].

[GRP91] B. Grammaticos, A. Ramani and V. Papageorgiou, *Do integrable mappings have the Painlevé property?*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1825–1828.

[GR04] B. Grammaticos and A. Ramani, *Discrete Painlevé Equations: A Review, Discrete Integrable Systems*, eds. by B. Grammaticos et al., Lecture Notes in Physics Volume 644 (Berlin:Springer, 2004) 245-321.

[GR16] B. Grammaticos, A. Ramani, *Parameterless discrete Painleve equations and their Miura relations*, J. Nonlin. Math. Phys. **23** (2016) 141.

[GTRCT02] B. Grammaticos, T. Tamizhmani, A. Ramani, A. S. Carstea, K.M.Tamizhmani, *A bilinear approach to the discrete Painleve I equations*, J. Phys. Soc. Japan **71** (2002) 443.

[GHM14'] A. Grassi, Y. Hatsuda and M. Marino, *Quantization conditions and functional equations in ABJ(M) theories*, J. Phys. **A49** (2016) 115401; [arXiv:1410.7658].

[Gr84] V. Gromak, *Reducibility of the Painlevé equations*, Diff. Uravn **20 10** (1984), 1674–1683.

[ILST14] N. Iorgov, O. Lisovyy, A. Shchechkin, Yu. Tykhyy, *Painlevé functions and conformal blocks*, Constr Approx **39 (1)**, (2014), 255–272.

[ILT14] N.Iorgov, O.Lisovyy, J.Teschner, *Isomonodromic τ functions from Liouville conformal blocks*, Commun. Math.Phys. **336(2)**, (2015), 671-694; [arXiv:1401.6104]

[ILTy13] N. Iorgov, O. Lisovyy, Yu. Tykhyy, *Painlevé VI connection problem and monodromy of $c = 1$ conformal blocks*, JHEP **1312** (2013), 029; [arXiv:1308.4092].

[ItsLTy14] A. Its, O. Lisovyy, Yu. Tykhyy, *Connection problem for the sine-Gordon/Painlevé III tau function and irregular conformal blocks*, IMRN (2014); [arXiv:1403.1235].

[ItsLP16] A.R. Its, O. Lisovyy, A. Prokhorov, *Monodromy dependence and connection formulae for isomonodromic tau functions*, Duke Mathematical Journal, **167 (7)**, (2018), 1347–1432; [arXiv:1604.03082].

[I19] K. Iwaki, *2-parameter τ-function for the first Painlevé equation -Topological recursion and direct monodromy problem via exact WKB analysis-*, [arXiv:1902.06439].

[J82] M. Jimbo, *Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 18, (1982), 1137—1161.

[JMMS80] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, M. Sato, *Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent*, Physica **1D**, (1980), 80–158.

[JMU81] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, *Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients I*, Physica **2D**, (1981), 306–352.

[JMU81(2)] M. Jimbo, T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients: II*, Physica **2D**(1981) 407–448.

[JMU81(3)] M. Jimbo, T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients: III*, Physica **4D** (1981) 26–46.

[JNS17] M. Jimbo, H. Nagoya and H. Sakai, *CFT approach to the q-Painlevé VI equation*, J. Int. Syst. **2** (2017) 1; [arXiv:1706.01940].

[JS96] M. Jimbo and H. Sakai, *A q-analog of the sixth Painlevé equation*, Lett. Math. Phys. **38** (1996) 145–154.

[KNY15] K. Kajiwara, M. Noumi, Y. Yamada, *Geometric Aspects of Painlevé Equations*, J. Phys. A: Math. Theor. 50(7) (2017) 073001; [arXiv:1509.08186].

[LLNZ13] A. Litvinov, S. Lukyanov, N. Nekrasov, A. Zamolodchikov *Classical Conformal Blocks and Painlevé VI*, JHEP **1407** (2014) 144; [arXiv:1309.4700].

[L11] S. L. Lukyanov, *Critical values of the Yang-Yang functional in the quantum sine-Gordon model*, Nucl. Phys. **B853**, (2011), 475–507; [arXiv:1105.2836].

[M1922] J. Malmquist, *Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, Arkiv Mat. Astron. Fys. 18, (1922), 1–89.

[MN18] Y. Matsuhira, H. Nagoya, *Combinatorial expressions for the tau functions of q-Painlevé V and III equations*; [arXiv:arXiv:1811.03285].

[MTW77] B. McCoy, C. Tracy, T. Wu, *Painlevé functions of the third kind*, J. Math. Phys. **5, 18** (1977), 1058–1092.

[MM17] A. Mironov, A. Morozov, *On determinant representation and integrability of Nekrasov functions*, Phys. Lett. B **773** (2017) 34–46; [arXiv:1707.02443].

[MM17q] A. Mironov, A. Morozov, *q-Painlevé equation from Virasoro constraints*, Phys. Lett. B **785** (2018) 207–210; [arXiv:1708.07479].

[MMZ19] A. Mironov, A. Morozov, Z. Zakirova, *Discrete Painlevé equation, Miwa variables and string equation in 5d matrix models*, J. High Energ. Phys. **2019**, 227, (2019); [arXiv:1908.01278].

[N15] H. Nagoya, *Irregular conformal blocks, with an application to the fifth and fourth Painlevé equations*, J. Math. Phys. **56**, 123505 (2015); [arXiv:1505.02398].

[N18] H. Nagoya, *Remarks on irregular conformal blocks and Painlevé III and II tau functions*, [arXiv:1804.04782].

[NY03] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, Inventiones mathematicae **162 2** (2005), 313–355; [arXiv:math/0306198].

[NY05] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. II. K-theoretic partition function*, Transform. Groups **10 3–4,** (2005), 489–519; [arXiv:math/0505553].

[NY09] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Perverse coherent sheaves on blow-up. III. Blow-up formula from wall-crossing*, Kyoto J. Math. **51 2** (2011), 263; [arXiv:0911.1773].

[NTalk] N. Nekrasov, Talk at IHES *Some applications of defects in supersymmetric gauge theory* [https://www.youtube.com/watch?v=QD-0rgaYQCw].

[NO03] N. Nekrasov, A. Okounkov, *Seiberg-Witten theory and random partitions*, Prog.Math. **244** (2006) 525-596; [hep-th/0306238].

[O18] R. Ohkawa, *Functional equations of Nekrasov functions proposed by Ito-Maruyoshi-Okuda*; [arXiv:1804.00771].

[OKSO06] Y. Ohyama, H. Kawamuko, H. Sakai, K. Okamoto, *Studies on the Painlevé Equations, V, Third Painlevé Equations of Special Type $P_{\rm III}(D_7)$ and $P_{\rm III}(D_8)$*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006) 145-204.

[O79] K. Okamoto, *Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre a points critiques fixés de P. Painlevé*, Japan. J. Math. (N.S.) **5** (1979) 1–79.

[P1900] P. Painlevé, *Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme*, Bull. Soc. Math. Phys. France **28** (1900) 201–261.

[P1900] P. Painlevé, *Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme*, Acta Math. **21** (1902) 1–85.

[QRT88] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts and C.J. Thompson, *Integrable mappings and soliton equations*, Phys. Lett. **A126** (1988) 419–421.

[QRT89] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts and C.J. Thompson, *Integrable mappings and soliton equations II*, Physica **D34** (1989) 183–192

[RGH91] A. Ramani, B. Grammaticos, and J. Hietarinta, *Discrete versions of the Painlevé equations*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1829–1832.

[RGT00] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Tamizhmani, *Quadratic relations in continuous and discrete Painleve equations*, J. Phys. A **33** (2000) 3033.

[S01] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations* Comm. Math.Phys. **220(2)** (2001) 165–229.

[SMJ78] M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo, Publ. RIMS Kyoto Univ. **14**, (1978), 223–267; **15**, (1979), 201–278; **15**, (1979), 577–629; **15**, (1979), 871–972; **16**, (1980), 531–584.

[S1912] L. Schlesinger, *Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebliger Ordnumg mit festen kritischer Punkten*, J. für Math. **141** (1912) 96–145.

[S20] A. Shchechkin, *Blowup relations on $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ from Nakajima-Yoshioka blowup relations*; [arXiv:2006.08582]

[TTGR04] K.M. Tamizhmani, T. Tamizhmani, B. Grammaticos and A. Ramani, *Special solutions for discrete Painlevé equations*, in: *Discrete Integrable Systems*, eds. by B. Grammaticos et al., Lecture Notes in Physics Volume 644 (Berlin: Springer, 2004), 323–382

[TW92] C. A. Tracy, H. Widom, *Level-spacing distributions and the Airy kernel*, Comm. Math. Phys. **159**, (1994), 151–174; arXiv:hep-th/9211141].

[TW93] C. A. Tracy, H. Widom, *Fredholm determinants, differential equations and matrix models*, Comm. Math. Phys. **163**, (1994), 33–72; arXiv:hep-th/9306042].

[TW09] C. A. Tracy, H. Widom, *Painlevé Functions in Statistical Physics*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **47**, (2011), 361–374; arXiv:0912.2362].

[T06] T. Tsuda, *Tau Functions of q-Painlevé III and IV Equations* Lett. Math. Phys. **75** (2006) 39–47

[TOS05] T. Tsuda, K. Okamoto, H. Sakai, *Folding transformations of the Painlevé equations*, Math. Ann. **331** **4** (2005) 713–738.

[WMTB76] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch, *Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: exact theory in the scaling region*, Phys. Rev. **B13**, (1976), 316–374.

[Z94] Al. B. Zamolodchikov, *Painlevé III and 2D Polymers*, Nucl.Phys. **B432**, (1994), 427–456; [arXiv:hep-th/9409108].