Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Ляшик Андрей

О векторах Бете $\mathfrak{gl}(2|1)$-инвариантных интегрируемых моделей

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук, профессор
Забродин Антон Владимирович

Москва — 2020

Введение

Квантовые интегрируемые модели - это особый класс физических моделей. Эти модели описывают нетривиальные системы взаимодействующих частиц и в то же время они могут быть изучены точно с помощью математического аппарата. Они предлагают нам уникальную тренировочную площадку для глубокого изучения нетривиальных физических явлений в явном виде.

Широкий класс квантовых интегрируемых моделей связан с алгебрами высоких рангов. Интегрируемые модели с симметриями высших рангов появляются в физике конденсированного состояния, в частности, в $\mathfrak{gl}_{m|n}$-инвариантных XXX спиновых цепочках Гейзенберга, в многокомпонентных Бозе/Ферми-газах [25], и в исследованиях моделей холодных атомов (модели Хаббарда [21], $T-J$ модель [22, 23, 24]). Также спиновые цепочки высоких рангов интересны в контексте вычисления корреляционных функций в $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса [10, 11].

Роль скалярного произведения векторов Бете чрезвычайно важна при изучении корреляционных функций локальных операторов лежащих в основе квантовых моделей [15, 17, 18]. Задачу вычисления формфакторов и корреляционных функций локальных операторов можно свести к вычислению скалярных произведений векторов Бете [28, 29].

Изучение интегрируемых систем с симметрией высших рангов попрежнему является сложной задачей. До недавнего времени такие модели либо вообще не изучались, либо изучались в рамках различных упрощающих гипотез. Результаты, представленные в диссертации, являются первыми в этом направлении.

В моей диссертации представлены результаты четырех статей, в которых я являюсь одним из соавторов. Статьи посвящены исследованию векторов Бете и их скалярных произведений в квантовых интегрируемых моделях с симметрией $\mathfrak{gl}_{2|1}$-алгебры. Данное исследование представляет собой развитие математического аппарата исследования корреляционных функций этих систем. Более конкретно, эта диссертация полностью посвящена описанию векторов Бете и изучению их свойств.

Этот раздел содержит обзор результатов диссертации, где мы представляем обобщение алгебраического анзаца Бете на случай $\mathfrak{gl}_{2|1}$ инвариантных интегрируемых моделей и скалярных произведений векторов Бете в этом случае.

1 R-матричная структура

Наиболее фундаментальной структурой алгебраического анзаца Бете является R-матрица. В зависимости от точки зрения ее можно воспринимать как матрицу рассеяния некоторого $2 \to 2$ процесса рассеяния [1, 2, 3] или как набор структурных функций билинейной алгебры, зависящий от спектрального параметра [5, 4, 16]. Эта алгебра называется RTT-алгеброй. Элементы алгебры могут быть упакованы в 3×3 матрицу $T(u)$, которая называется матрицей монодромии. R-матрица моделей, базирующихся на $\mathfrak{gl}(2|1)$, действует в тензорном произведении $\mathbb{C}^{2|1} \otimes \mathbb{C}^{2|1}$, где $\mathbb{C}^{2|1}$ - 3-мерное Z_2-градуированное векторное пространство с градуировкой $[1] = [2] = 0, [3] = 1$:

$$R_{12}(u,v)\; T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)\; R_{12}(u,v). \tag{1}$$

Здесь нижние индексы означают тензорный множитель, в котором действует оператор. Здесь $T_1(u) = T(u) \otimes 1$ и $T_2(u) = 1 \otimes T(u)$, а их элементы действуют в некотором пространстве $\mathcal{H}$, называемом физическим пространством. Аргументы u, v матрицы монодромии называются спектральными параметрами. Спектральный параметр – это комплексное число. R - матрица, действующая в обоих пространствах. В нашей работе мы используем R - матрицу, связанную с алгеброй $\mathfrak{gl}_{2|1}$

$$R_{12}(u) = u\,\mathbf{1} + c\,P_{12}, \tag{2}$$

где $\mathbf{1}$ является единичным оператором, c константа, а P_{12} является дифференцированным оператором перестановки [7]. В $\mathfrak{gl}(2|1)$ случае оператор перестановки P_{12} имеет вид

$$P_{12} = \sum_{i,j=1}^{3} (-1)^{[j]} e_{ij} \otimes e_{ji}, \tag{3}$$

где e_{ij} это элементарные матричные единицы$(e_{ij})_{ab} = \delta_{ia}\delta_{jab}$ с суперсимметричной градуировкой

$$(\mathbf{1} \otimes e_{ij})(e_{kl} \otimes \mathbf{1}) = (-1)^{([i]+[j])([k]+[l])} e_{kl} \otimes e_{ij}. \tag{4}$$

R-матрица (2) удовлетворяет градуированному уравнению Янга-Бакстера

$$R_{12}(u-v)R_{13}(u-w)R_{23}(v-w) = R_{23}(v-w)R_{13}(u-w)R_{12}(u-v) \tag{5}$$

написаному в тензорной произведении градуированых пространст $\mathbb{C}^{2|1} \otimes \mathbb{C}^{2|1} \otimes \mathbb{C}^{2|1}$.

Умножим (1) на матрицу обратную $R_{12}(u,v)$ и возьмем след по пространству $\mathbb{C}^{2|1}\otimes\mathbb{C}^{2|1}$. Используя свойство следа можно получить коммутационные соотношения

$$[t(u),t(v)]=0, \tag{6}$$

для трансфер матрицы

$$t(u)=\sum_i(-1)^{[i]}T_{ii}(u). \tag{7}$$

В силу уравнения (6) коэффициенты разложения ряда в некоторой точке u_0 трансфер матрицы $t(u)=\sum_k(u-u_0)^kH_k$ коммутируют

$$[H_n,H_m]=0. \tag{8}$$

Эти коэффициенты называются Гамильтонианами. Можно сказать, что трансфер матрица является производящей функцией коммутирующих гамильтонианов некоторой интегрируемой системы.

Таким образом, наличие R-матричной структуры влечет наличие в системе большого числа законов сохранения и указывает на интегрируемость этой системы.

Чтобы использовать метод алгебраического анзаца Бете, помимо квантовой R-матричной структуры, необходимо существование специального вектора $|0\rangle\in\mathcal{H}$, называемого вакуумом. Этот вектор должен иметь несколько свойств

$$\begin{aligned}&T_{ji}(u)|0\rangle=0, \qquad \text{with } \ i<j\\&T_{ii}(u)|0\rangle=\lambda_i(u)|0\rangle,\end{aligned} \tag{9}$$

где $\lambda_i(u)$ - это некоторые функции, зависящие от конкретной квантовой интегрируемой модели. Действие $T_{ij}(u)$ с $i<j$ на вакуум $|0\rangle$ нетривиально. В квантовых интегрируемых моделях многократное действие верхнетреугольных элементов матрицы монодромии на $|0\rangle$ порождает базис физического пространства $\mathcal{H}$.

Обобщенная модель. В рамках нашей работы мы предполагаем, что $\lambda_i(u)$ являются произвольными функциональными параметрами, и мы не налагаем никаких связей [17, 27, 18]. Это означает, что можно найти конкретную квантово интегрируемую модель для любого конкретного выбора $\lambda_i(u)$.

2 Спиновая цепочка в качестве базового примера

В прошлом R-матричная структура была обнаружена в большом количестве квантовых систем [22, 23, 24, 21, 25]. Обычно, найти R-матричную структуру это очень нетривиальная задача. Один из самых простых примеров – спиновая цепь. Можно построить квантовую интегрируемую систему индуктивно, используя общие свойства R-матрицы.

Для построения спиновой цепи мы используем рациональную R матрицу (2). В этом случае матрица монодромии спиновой цепочки имеет вид

$$T_0(u) = R_{01}(u-\xi_1)R_{02}(u-\xi_2)\dots R_{0n}(u-\xi_n). \tag{10}$$

Здесь R_{0i} это матрица, действующая нетривиально в пространстве $V_0 \otimes V_i$, а также тривиально в остальных пространствах V_j (with $j \neq i$). Матрица монодромии действует в пространстве $V_0 \otimes V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$. Это пространство можно разделить на две части: физическое пространство $\mathcal{H} = V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ и вспомогательное пространство V_0. Мы рассматриваем матрицу монодромии как матрицу, действующую в 3-мерном вспомогательном пространстве с некоммутативными элементами, действующими в физическом пространстве $\mathcal{H}$. Параметры ξ_i называются неоднородностями. Матрица монодромии удовлетворяет RTT-соотношению (1).

Модель, описываемая матрицей монодромии (10), называется неоднородной XXX спиновой цепочкой. Это наиболее типичный пример квантовой интегрируемой модели с естественной квантовой R-матричной структурой. Аналогичная модель существует для любой R-матрицы.

Можно положить все параметры $\xi_i = 0$. В этом случае модель становится однородной спиновой цепью. Для описания квантовой интегрируемой системы, полученной из этой матрицы монодромии, рассмотрим один очень специальный гамильтониан в разложении трансфер матрицы однородной спиновой цепочки.

$$H = (t(0))^{-1}t'(0). \tag{11}$$

Из (11) можно следует, что

$$H = c\sum_i P_{i,i+1}. \tag{12}$$

Этот гамильтониан представляет собой сумму операторов, каждый из которых действует в двух соседних пространствах. Это свойство называется ультра-локальностью.

В случае спиновой цепочки вакуумный вектор равен $|0\rangle = \mathbf{e}_1^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_1^{(n)}$, где $\mathbf{e}_1^{(i)}$ это вектор $(1,0,0)^T$ из пространства $\mathbb{C}^{2|1}$. Согласно (9) нижние треугольные элементы матрицы монодромии уничтожают вакуум. Этот вакуум является собственным вектором для диагональных элементов с собственными значениями

$$\begin{aligned} \lambda_1(u) &= \prod_{k=1}^{n} (u - \xi_k + c)\,, \\ \lambda_i(u) &= \prod_{k=1}^{n} (u - \xi_k)\,, \quad i = 2, 3. \end{aligned} \tag{13}$$

Матрица монодромии неоднородной XXX спиновой цепочки (10) удовлетворяет всем необходимым свойствам для применения метода алгебраического анзаца Бете.

3 Алгебраический анзац Бете для $\mathfrak{gl}_2$

Рассмотрим, как работает алгебраический анзац Бете в самом простом случае $\mathfrak{gl}_2$ алгебры [16]. В этом случае матрица монодромии это 2×2 матрица

$$T(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Для применения алгебраического анзаца Бете нам нужен вектор $|0\rangle \in \mathcal{H}$, называемый вакуумом. Вакуум должен обладать следующими свойствами:

$$\begin{aligned} A(u)|0\rangle &= a(u)|0\rangle, \\ D(u)|0\rangle &= d(u)|0\rangle, \\ C(u)|0\rangle &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где $a(u)$ и $d(u)$ - собственные значения соответствующих операторов на вакуумном векторе.

Для упрощения всех последующих выражений введем некоторые обозначения [20]. Черта над символом $\bar{u}$ означает, что это множество переменных $\bar{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Нижний индекс у множества $\bar{u}$ означает, что один элемент из набора исключен $\bar{u}_i = \bar{u} \backslash \{u_i\}$. Если какая-то функция зависит от множества, а не от переменной, то следует понимать, что это выражение является произведением этой функции во всех элементах этого множества. Можно также использовать это обоначения для функции, зависящей от двух наборов переменных. Например,

$$a(\bar{u}) = \prod_{u_i \in \bar{u}} a(u_i), \quad f(\bar{u}, \bar{v}_i) = \prod_{u_k \in \bar{u}} \prod_{v_j \in \bar{v}, j \neq i} f(u_k, v_j). \tag{16}$$

Используя RTT-соотношения (1) с R-матрицей (2), можно показать, что

$$[T_{ij}(u), T_{ij}(v)] = 0. \tag{17}$$

Таким образом, мы также можем расширить краткую запись на произведение операторов

$$T_{ij}(\bar{u}) = T_{ij}(u_1) T_{ij}(u_2) \dots T_{ij}(u_n). \tag{18}$$

В $\mathfrak{gl}_2$ случае существует только один элемент матрицы монодромии, действующий нетривиально на вакуум $|0\rangle$. Это верхний треугольный элемент $B(u)$. Можно ввести вектор Бете, связанный с множеством $\bar{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

$$\mathbb{B}(\bar{u}) = B\left(\bar{u}\right)|0\rangle = B(u_1) B(u_2) \dots B(u_n)|0\rangle. \tag{19}$$

В силу (17), вектор Бете симметричен по элементам множества $\bar{u}$. Мы предполагаем, что вектор Бете может стать собственным вектором трансфер матрицы $t(u) = A(u) + D(u)$. Чтобы выяснить это, нам нужны коммутационные соотношения диагонального элемента с $B(u)$. Эти коммутационные соотношения следуют из RTT-отношения (1):

$$\begin{aligned} A(u)B(v) &= f(v,u)B(v)A(u) + g(u,v)B(u)A(v), \\ D(u)B(v) &= f(u,v)B(v)D(u) + g(v,u)B(u)D(v). \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$f(v,u) = \frac{v-u+c}{v-u}, \quad g(v,u) = \frac{c}{v-u}. \tag{21}$$

Действие переноса матрицы $t(u) = A(u) + D(u)$ на вектор Бете (19) дает нам уравнение

$$t(z)\mathbb{B}(\bar{u}) = \tau(z|\bar{u})\ \mathbb{B}(\bar{u}) + \sum_{i=1}^{n}\ g(z,u_i)\Lambda_i\ \mathbb{B}(\bar{u}_i \cup \{z\}), \tag{22}$$

где

$$\tau(z|\bar{u}) = a(z) f(\bar{u}, z) + d(z) f(z, \bar{u}), \tag{23}$$

и

$$\Lambda_i = a(u_i) f(\bar{u}_i, u_i) - d(u_i) f(u_i, \bar{u}_i). \tag{24}$$

Если мы положим все $\Lambda_i = 0$, то вектор Бете $\mathbb{B}(\bar{u})$ станет собственным вектором с собственным значением $\tau(z|\bar{u})$ (23). Условия $\Lambda_i = 0$ называются системой уравнений Бете.

К сожалению, обобщенить эту схему на алгебры высоких рангов не так просто.

4 $\mathfrak{gl}_{2|1}$-инвариантный вектор Бете

В $\mathfrak{gl}_{2|1}$-случае формула вектора Бете имеет существенно более сложный вид. Она имеет форму [8]:

$$\mathbb{B}(\bar{u},\bar{v}) = \sum \frac{g(\bar{v}_{\mathrm{I}},\bar{u}_{\mathrm{I}})}{\lambda_2(\bar{v}_{\mathrm{II}})\lambda_2(\bar{u})} \frac{f(\bar{u}_{\mathrm{I}},\bar{u}_{\mathrm{II}})g(\bar{v}_{\mathrm{II}},\bar{v}_{\mathrm{I}})h(\bar{u}_{\mathrm{I}},\bar{u}_{\mathrm{I}})}{f(\bar{v},\bar{u})} \mathbb{T}_{13}(\bar{u}_{\mathrm{I}})T_{12}(\bar{u}_{\mathrm{II}})\mathbb{T}_{23}(\bar{v}_{\mathrm{II}})|0\rangle, \tag{25}$$

где $\mathbb{T}_{i3}(\bar{v})$ for $i = 1, 2$ является симметричной комбинацией элементов матрицы

$$\mathbb{T}_{i3}(\bar{v}) = \frac{T_{i3}(v_1)\dots T_{i3}(v_n)}{\prod_{l>m} h(v_l, v_m)}, \tag{26}$$

с

$$h(x,y) = \frac{x-y+c}{c}. \tag{27}$$

Здесь наборы параметров Бете $\bar{u}$ и $\bar{v}$ разделены на два подмножества $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}_{\mathrm{I}}, \bar{u}_{\mathrm{II}}\}$ и $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_{\mathrm{I}}, \bar{v}_{\mathrm{II}}\}$, таких что $\#\bar{u}_{\mathrm{I}} = \#\bar{v}_{\mathrm{I}}$. Сумма берется по всем возможным разделам этого типа.

Отметим, что этот вектор Бете зависит от двух наборов переменных $\bar{u}, \bar{v}$. Все верхне-треугольные элементы матрицы монодромии участвуют в построении вектора Бете. В отличии от $\mathfrak{gl}_2$-случая он больше не является мономом по элементах матрицы монодромии, а коэффициенты крайне нетривиальны. Количество слагаемых растет экспоненциально с размерами множеств $\bar{u}, \bar{v}$.

Наши работы содержат обобщение конструкции вектора Бете и его свойств (таких свойств как свойство ко-произведения и рекуррентное уравнение для векторов Бете), которые помогают применять алгебраическую схему анзаца Бете к моделям с $\mathfrak{gl}_{2|1}$ супер-симметриями.

Мы доказываем, что действие всех элементов матрицы монодромии $T_{ij}(z)$ на вектор Бете может быть представлен как линейная комбинация векторов Бете с различными аргументами. Отдельная наша работа посвящена формулам этого действия.

В частности, мы доказываем, что вектор Бете становится собственным вектором трансфер матрицы(7)

$$t(z)\,\mathbb{B}(\bar{t}) = \tau(z|\bar{t})\,\mathbb{B}(\bar{t}), \tag{28}$$

если параметры Бете удовлетворяют системе уравнений (эта система называется уравнениями Бете)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1(u_i)}{\lambda_2(u_i)} &= \frac{f(u_i,\bar{u}_i)}{f(\bar{u}_i,u_i)} f(\bar{v},u_i), \\ \frac{\lambda_3(v_j)}{\lambda_2(v_j)} &= f(v_j,\bar{u}). \end{aligned} \tag{29}$$

с собственным значением

$$\tau(z|\bar{t}) = \lambda_1(z) f(\bar{u}, z) + \lambda_2(z) f(\bar{v}, z) f(z, \bar{u}) - \lambda_3(z) f(\bar{v}, z). \tag{30}$$

Этот результат доказывает, что схема алгебраических анзаца Бете применима и к $\mathfrak{gl}_{2|1}$ случаю.

5 Скалярное произведение векторов Бете

Чтобы определить скалярное произведение векторов Бете нам нужен двойственный вектор Бете. Двойственный вектор Бете принадлежит двойственному физическому пространству $\mathcal{H}^*$. Мы предполагаем, что двойственное физическое пространство $\mathcal{H}^*$ содержит двойственный вакуум $\langle 0|$ (такой, что $\langle 0|0\rangle = 1$) со свойствами

$$\begin{aligned} &\langle 0|T_{ij}(u) = 0, \qquad \text{with } \ i < j \\ &\langle 0|T_{ii}(u) = \lambda_i(u)\langle 0|, \end{aligned} \tag{31}$$

где функции λ_i те же, что и в (9). Тогда двойственный вектор Бете $\mathbb{C}(\bar{u}, \bar{v})$ может быть получен из вектора Бете $\mathbb{B}(\bar{u}, \bar{v})$, используя антиморфизм Ψ заданый свойствами

$$\begin{aligned} \Psi(AB) &= (-1)^{[A][B]}\Psi(B)\Psi(A), \\ \Psi(T_{ij}(u)) &= (-1)^{[i][j]+[i]} T_{ji}(u), \\ \Psi(|0\rangle) &= \langle 0|. \end{aligned} \tag{32}$$

Двойственный вектор Бете

$$\mathbb{C}(\bar{u}, \bar{v}) = \Psi(\mathbb{B}(\bar{u}, \bar{v})). \tag{33}$$

Теперь мы можем определить скалярное произведение векторов Бете

$$S(\bar{u}^C, \bar{v}^C|\bar{u}^B, \bar{v}^B) = \mathbb{C}(\bar{u}^C, \bar{v}^C)\mathbb{B}(\bar{u}^B, \bar{v}^B). \tag{34}$$

Применения антигоморфизм Ψ можно доказать, что скалярное произведение является симметричным $S(\bar{u}^C, \bar{v}^C|\bar{u}^B, \bar{v}^B) = S(\bar{u}^B, \bar{v}^B|\bar{u}^C, \bar{v}^C)$.

В нашей работе мы доказываем, что скалярное произведение векторов Бете имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S(\bar{u}^C, \bar{v}^C|\bar{u}^B, \bar{v}^B) = \sum r_1(\bar{u}^C_{\mathrm{II}}) r_1(\bar{u}^B_{\mathrm{I}}) r_3(\bar{v}^C_{\mathrm{II}}) r_3(\bar{v}^B_{\mathrm{I}}) f(\bar{u}^C_{\mathrm{I}}, \bar{u}^C_{\mathrm{II}}) f(\bar{u}^B_{\mathrm{II}}, \bar{u}^B_{\mathrm{I}}) g(\bar{v}^C_{\mathrm{I}}, \bar{v}^C_{\mathrm{II}}) \\ g(\bar{v}^B_{\mathrm{II}}, \bar{v}^B_{\mathrm{I}}) \frac{f(\bar{v}^C_{\mathrm{I}}, \bar{u}^C_{\mathrm{I}}) f(\bar{v}^B_{\mathrm{II}}, \bar{u}^B_{\mathrm{II}})}{f(\bar{v}^C, \bar{u}^C) f(\bar{v}^B, \bar{u}^B)} \; Z_{a-k,n}(\bar{u}^C_{\mathrm{II}}, \bar{u}^B_{\mathrm{II}}|\bar{v}^C_{\mathrm{I}}, \bar{v}^B_{\mathrm{I}}) \; Z_{k,b-n}(\bar{u}^B_{\mathrm{I}}, \bar{u}^C_{\mathrm{I}}|\bar{v}^B_{\mathrm{II}}, \bar{v}^C_{\mathrm{II}}), \end{aligned} \tag{35}$$

где $a = \#\bar{u}^C = \#\bar{u}^B$, $b = \#\bar{v}^C = \#\bar{v}^B$, $k = \#\bar{u}^C_{\rm I} = \#\bar{u}^B_{\rm I}$ и $n = \#\bar{v}^C_{\rm I} = \#\bar{v}^B_{\rm I}$. Здесь сумма берется по всем разбиениям $\bar{u}^C \Rightarrow \{\bar{u}^C_{\rm I}, \bar{u}^C_{\rm II}\}$, $\bar{u}^B \Rightarrow \{\bar{u}^B_{\rm I}, \bar{u}^B_{\rm II}\}$, $\bar{v}^C \Rightarrow \{\bar{v}^C_{\rm I}, \bar{v}^C_{\rm II}\}$ и $\bar{v}^B \Rightarrow \{\bar{v}^B_{\rm I}, \bar{v}^B_{\rm II}\}$ с $\#\bar{u}^C_{\rm I} = \#\bar{u}^B_{\rm I}$ и $\#\bar{v}^C_{\rm I} = \#\bar{v}^B_{\rm I}$.

Здесь мы используем обозначение

$$r_1(z) = \frac{\lambda_1(z)}{\lambda_2(z)}, \quad r_3(z) = \frac{\lambda_3(z)}{\lambda_2(z)}. \tag{36}$$

Функция $Z(\bar{s}|\bar{t})$ называется старшим коэффициентом. Мы получили выражение для $Z_{a,b}$ в виде определителя $(a+b) \times (a+b)$ матрицы

$$Z_{a,b}(\bar{t};\bar{x}|\bar{s};\bar{y}) = h(\bar{w},\bar{t})\Delta_{a+b}(\bar{w})\Delta'_a(\bar{t})\Delta'_b(\bar{y}) \ \det_{a+b} \mathcal{J}_{jk}, \tag{37}$$

где $\Delta'_n(\bar{u})$ и $\Delta_n(\bar{v})$ определяются

$$\Delta'_n(\bar{u}) = \prod_{j<k}^{n} g(u_j, u_k), \qquad \Delta_n(\bar{v}) = \prod_{j>k}^{n} g(v_j, v_k). \tag{38}$$

где $\bar{w} = \{\bar{x}, \bar{s}\}$ и матрица $\mathcal{J}_{jk}$ определена

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{jk} = \frac{g(w_j,t_k)}{h(w_j,t_k)}, && k = 1,\dots,a; \\ &\mathcal{J}_{j,k+a} = g(w_j,y_k)\frac{h(w_j,\bar{x})}{h(w_j,\bar{t})}, && k = 1,\dots,b; \end{aligned} \qquad j = 1,\dots,a+b. \tag{39}$$

Аналогичные виражения для старших коэффициентов были получены в $\mathfrak{gl}_2$ случае [14] явно в детерминантной форме и в $\mathfrak{gl}_3$ случае [19] как сумма по разбиениям.

Похожие формулы сумм для скалярного произведения ранее были получена в $\mathfrak{gl}_2$ [17] и в $\mathfrak{gl}_3$ [9] случаях.

6 Норма собственного вектора

Мы доказываем, что норма собственного вектора трансфер матрицы (7) имеет детерминантное представление. Для этого следует рассмотреть предел $u^B_j \to u^C_j = u_j$, $v^C_j \to v^B_j = v_j$ в скалярном произведении. Тогда результат имеет вид

$$\|\mathbb{B}_{a,b}(\bar{u};\bar{v})\|^2 = (-1)^{a+b} \prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{a} f(v_j,u_k) \prod_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{a} f(u_j,u_k) \prod_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{b} g(v_j,v_k) \ \det_{a+b} \widehat{\mathcal{N}}. \tag{40}$$

Здесь $\widehat{\mathcal{N}}$ - это блочная $(a+b)\times(a+b)$ матрица. Левый верхний блок

$$\widehat{\mathcal{N}}_{jk}=\delta_{jk}\left[c\,\frac{r_1'(u_k)}{r_1(u_k)}+\sum_{\ell=1}^{a}\frac{2c^2}{u_{k\ell}^2-c^2}-\sum_{m=1}^{b}t(v_m,u_k)\right]-\frac{2c^2}{u_{kj}^2-c^2},\quad j,k=1,\dots,a, \tag{41}$$

где $u_{kj}=u_k-u_j$, а $r_1'(u_k)$ означает производную функции $r_1(u)$ в точке $u=u_k$. Также мы используем обозначение

$$t(x,y)=\frac{c^2}{(x-y)(x-y+c)}. \tag{42}$$

Правый нижний блок диагональный

$$\widehat{\mathcal{N}}_{j+a,k+a}=\delta_{jk}\left[c\,\frac{r_3'(v_k)}{r_3(v_k)}+\sum_{\ell=1}^{a}t(v_k,u_\ell)\right],\quad j,k=1,\dots,b, \tag{43}$$

где $r_3'(v_k)$ это означает производную функции $r_3(v)$ в точке $v=v_k$. Внедиагональные блоки имею вид

$$\widehat{\mathcal{N}}_{j,k+a}=t(v_k,u_j),\quad j=1,\dots,a,\quad k=1,\dots,b, \tag{44}$$

и

$$\widehat{\mathcal{N}}_{j+a,k}=-t(v_j,u_k),\quad j=1,\dots,b,\quad k=1,\dots,a. \tag{45}$$

Легко связать определитель матрицы $\widehat{\mathcal{N}}$ с Якобианом уравнений Бете. А именно, пусть

$$\begin{aligned}\Phi_j&=\log\Big(\frac{r_1(u_j)}{f(\bar v,u_j)}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{a}\frac{f(u_k,u_j)}{f(u_j,u_k)}\Big),\qquad j=1,\dots,a,\\ \Phi_{a+j}&=\log\left(\frac{r_3(v_j)}{f(v_j,\bar u)}\right),\qquad j=1,\dots,b.\end{aligned} \tag{46}$$

Тогда уравнения Бете для множеств $\bar u$ и $\bar v$ принимают вид

$$\Phi_j=2\pi i n_j,\qquad j=1,\dots,a+b, \tag{47}$$

где n_j целые числа. Прямой расчет показывает, что

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{N}}_{j,k}&=c\,\frac{\partial\Phi_j}{\partial u_k} && k=1,\dots,a,\\ \widehat{\mathcal{N}}_{j,a+k}&=c\,\frac{\partial\Phi_j}{\partial v_k}, && k=1,\dots,b,\end{aligned}\qquad j=1,...,a+b. \tag{48}$$

Это утверждение обобщает формулу Годена в $\mathfrak{gl}_2$ случае [26] и результата Решетихина в $\mathfrak{gl}_3$ случае [9].

Результаты диссертации опубликованы в четырёх статьях:

- A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. Slavnov, *Multiple Actions of the Monodromy Matrix in* $gl(2|1)$*-Invariant Integrable Models*, SIGMA 12 (2016), 099
- A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. Slavnov, *Scalar products of Bethe vectors in models with* $gl(2|1)$ *symmetry 1. Super-analog of Reshetikhin formula*, J. Phys. A49 (2016) 454005
- A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. Slavnov, *Scalar products of Bethe vectors in models with* $gl(2|1)$ *symmetry 2. Determinant representation*, J. Phys. A50 (2017) 034004
- A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. Slavnov, *Form factors of the monodromy matrix entries in* $gl(2|1)$*-invariant integrable models*, Nucl. Phys. B911 (2016) 902

Список литературы

[1] F. A. Berezin, G. P. Pokhil, and V. M. Finkelberg, *Schrödinger equation for a system of one-dimensional particles with point interaction*, Vestnik MGU **1** (1964), 21-28.

[2] J. B. McGuire, *Study of exactly soluble one-dimensional N-body problems*, Journal of Mathematical Physics, 5(5) (1964), 622-636.

[3] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura (1967). *Method for solving the Korteweg-deVries equation*, Physical review letters, 19(19), 1095.

[4] L. A. Takhtadzhan and L. D. Faddeev, *The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model*, Russian Math. Surveys **34**:5 (1979), 11–68.

[5] E. K. Sklyanin, L. A. Takhtadzhyan and L. D. Faddeev, *Quantum inverse problem method. I*, Theoret. and Math. Phys. **40**:2 (1979), 688–706.

[6] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, *GL(3)-invariant solutions of the Yang-Baxter equation and associated quantum systems*, Zap. Nauchn. Sem. POMI. **120** (1982) 92–121; J. Sov. Math., **34**:5 (1982) 1948–1971 (Engl. transl.)

[7] Kulish P.P., Sklyanin E.K., Solutions of the Yang–Baxter equation, *J. Sov. Math.* **19** (1982), 1596–1620.

[8] S. Pakuliak, E. Ragoucy, and N. A. Slavnov, *Bethe vectors for models based on the super-Yangian* $Y(\mathfrak{gl}(m|n))$, J. Integrable Systems **2** (2017) 1–31, arXiv:1604.02311.

[9] N. Yu. Reshetikhin, *Calculation of the norm of Bethe vectors in models with* $SU(3)$*-symmetry*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **150** (1986) 196–213; J. Math. Sci. **46** (1989) 1694–1706 (Engl. transl.).

[10] Escobedo, J., Gromov, N., Sever, A., Vieira, P. *Tailoring three-point functions and integrability*, Journal of High Energy Physics, 2011(9), 28.

[11] Gromov, N., & Vieira, P. *Quantum integrability for three-point functions of maximally supersymmetric Yang-Mills theory*, Physical review letters, 111(21), (2013), 211601.

[12] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *Bethe vectors of* $GL(3)$*-invariant integrable models*, J. Stat. Mech. **1302** (2013) P02020, arXiv:1210.0768.

[13] J. Ding, I. B. Frenkel, *Isomorphism of two realizations of quantum affine algebra* $U_q(\mathfrak{gl}(N))$, Commun. Math. Phys. **156** (1993), 277–300.

[14] A. G. Izergin, *Partition function of the six-vertex model in a finite volume*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **297** (1987) 331–333; Sov. Phys. Dokl. **32** (1987) 878–879 (Engl. transl.).

[15] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

[16] L. D. Faddeev, in: Les Houches Lectures *Quantum Symmetries*, eds A. Connes et al, North Holland, (1998) 149.

[17] V. E. Korepin, *Calculation of norms of Bethe wave functions*, Comm. Math. Phys. **86** (1982) 391–418.

[18] A. G. Izergin and V. E. Korepin, *The Quantum Inverse Scattering Method Approach to Correlation Functions*, Commun. Math. Phys. **94** (1984) 67–92.

[19] M. Wheeler, *Scalar products in generalized models with $SU(3)$-symmetry*, Comm. Math. Phys. **327**:3 (2014) 737–777, `arXiv:1204.2089`.

[20] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *Highest coefficient of scalar products in $SU(3)$-invariant integrable models*, J. Stat. Mech. Theory Exp., (2012) P09003, `arXiv:1206.4931`.

[21] F. H. L. Essler, V. E. Korepin, *Spectrum of Low-Lying Excitations in a Supersymmetric Extended Hubbard Model*, Int. J. Mod. Phys. B**8** (1994) 3243–3279, `arXiv:cond-mat/9307019`

[22] D. Förster, *Staggered spin and statistics in the supersymmetric t-J model*, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 2140–2143.

[23] F. H. L. Essler and V. E. Korepin, *Higher conservation laws and algebraic Bethe Ansatze for the supersymmetric t-J model*, Phys. Rev. B **46** (1992) 9147–9162.

[24] A. Foerster and M. Karowski, *Algebraic properties of the Bethe ansatz for an $spl(2,1)$-supersymmetric t-J model*, Nucl. Phys. B **396** (1993) 611–638.

[25] P. Schlottmann, *Integrable narrow-band model with possible relevance to heavy Fermion systems*, Phys. Rev. B **36** (1987) 5177–5185.

[26] M. Gaudin, *Modèles exacts en mécanique statistique: la méthode de Bethe et ses généralisations*, Preprint, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, CEA-N-**1559**:1 (1972).

[27] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *The problem of description of all L-operators for R-matrices of the models XXX and XXZ* (in Russian), Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **131** (1983) 80–87.

[28] N. Kitanine, J. M. Maillet and V. Terras, *Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain*, Nucl. Phys. B **554** (1999) 647–678, `arXiv:math-ph/9807020`.

[29] J. M. Maillet, V. Terras, *On the quantum inverse scattering problem*, Nucl. Phys. B **575** (2000) 627–644, `hep-th/9911030`.