РЕФЕРАТ

Отчет 95 стр., 1 книга, 0 рис., 3 табл., 161 источник, 1 прил.

ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ, КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ КОГОМОЛОГИИ, ЦИКЛИЧЕСКАЯ КАТЕГОРИЯ, БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, МНОГООБРАЗИЯ ФАНО, ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ, ГОЛОМОРФНО СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Объектами исследования являются

-геометрическая теория представлений,

-арифметическая алгебраическая геометрия,

-бесконечномерные алгебры Ли,

-гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии,

-производные категории,

-классическая геометрия,

-гиперкэлеровы многообразия и специальные многообразия.

Цель проекта: исследования в области алгебраической геометрии и пограничных с ней областях – теория чисел, дифференциальная и комплексная геометрия, геометрический анализ.

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

За отчетный период (2020) Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений организовала и/или приняла участие в организации 5 конференций, в т.ч. 4 - международных:

- Международная конференция “Алгебраическая геометрия: методы, связи и приложения”, посвященная 80-летию со дня рождения А.Н.Тюрина (1940-2002) – 21.02.2020, организатор: Александр Кузнецов;
- Однодневная конференция “Комплексная и алгебраическая геометрия” – 18.03.2020, организатор: Екатерина Америк;
- Международная оналйн-конференция “Зумерфест: конференция молодых ученых по алгебраической геометрии” – 11.07.2020-12.07.2020, организатор: Никон Курносов;
- Международная однодневная конференция памяти Андрея Николаевича Тюрина (24.02.1940-27.10.2002) – 28.10.2020, организатор: Александр Кузнецов;
- Международная конференция “Бирациональная геометрия” – 19.11.2020, организаторы Юрий Прохоров и Константин Шрамов.

В связи со пандемией COVID-19 только первые два мероприятия удалось провести в обычном офлайн-формате, остальные конференции проходили онлайн. По этой же причине, Лаборатория отказалась в этом году от проведения традиционной летней школы “Алгебра и геометрия”, которая проводится в г. Ярославле и в этом году должна была стать юбилейной – десятой. В период с 30.09.2020 по 02.10.2020 была проведена международная онлайн-школа Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений, организаторы – Дмитрий Каледин и Никон Курносов.

Также в этом году, мы не смогли организовать визиты ученых из мировых научных центров, для проведения совместных научных исследований с сотрудниками, консультации стажеров Лаборатории и студентов факультета математики, а также выступления с докладами на семинарах Лаборатории и факультета. Только в рамках конференции “Алгебраическая геометрия: методы, связи и приложения” приезжал Максим Смирнов (университет Аугсбурга, Германия), который провел в Лаборатории еще дополнительно несколько рабочих дней.

По результатам исследований в 2020 году сотрудниками лаборатории были опубликовано 34 работы в журналах, индексируемых WoS/Scopus, из них в журналах квартиля Q1/Q2 – 30.

Сотрудники лаборатории принимали участие в международных конференциях, семинарах, воркшопах, где выступили более чем с 27 докладами, в которых представили результаты своих исследований в лаборатории.

Константин Логинов защитил кандидатскую диссертацию и стал кандидатом математических наук НИУ ВШЭ. Тема диссертации: “Расслоения на поверхности дель Пеццо”, научный руководитель – Юрий Прохоров.

2 стажера (Семен Абрамян и Ляля Гусева) были участниками программы кадровый резерв в категории “Новые преподаватели”.

Анна Абашева и Глеб Терентюк продолжили исследования в рамках гранта РНФ “Гомологические основы некоммутативной алгебраической геометрии”, руководитель научного коллектива: Дмитрий Каледин.

Евгений Смирнов стал победителем конкурса на получение грантов фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”

Анна Абашева и Глеб Терентюк после успешной защиты бакалаврский работ поступили в аспирантуры Columbia University и University of Michigan соответственно.

Семен Абрамян после окончания магистратуры поступил в аспирантуру НИУ ВШЭ, Василий Рогов – в HU Berlin.

Константин Логинов прошел конкурс российских постдоков Математического института им В.А.Стеклова РАН.

Научная деятельность сотрудников лаборатории была отмечена различными премиями и наградами:

– Научный руководитель лаборатории Федор Богомолов стал членом Европейской академии

– Василий Рогов стал победителем конкурса научно-исследовательских студенческих работ в номинации “Лучшая НИР по математике 2019 года”, тема работы: “Non-algebraic deformations of flat Kähler manifolds (Неалгебраические деформации плоских кэлеровых многообразий)”, научный руководитель – Михаил Вербицкий

– Победителями конкурса фонда Саймонса 2020 года для математиков преподавателей-исследователей стали Владимир Жгун и Евгений Смирнов, для студентов и аспирантов математиков: Семен Абрамян, Ляля Гусева, Андрей Коновалов.

– На конкурс “Молодая математика России” были приняты заявки Никиты Клемятина, Андрея Коновалова, Константина Логинова, результаты будут известны в самом конце декабря. Среди победителей 2019 года был Павел Осипов

Сотрудники лаборатории продолжали вести активную педагогическую работу, ими были прочитаны курсы на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом Московском Университете, НОЦ МИАН, программе Math in Moscow, на школах для студентов, аспирантов и молодых ученых, проводимых как лабораторией, так и крупными международными научными и учебными центрами. Часть курсов была прочитана впервые. В связи с пандемией коронавируса COVID-19, все курсы пришлось быстро переводить в онлайн-формат, применяя новые образовательные технологии.

Александра Скрипченко и Евгений Смирнов были выбраны “Лучшими преподавателями НИУ ВШЭ”, Михаил Вербицкий – “Лучшим научным руководителем”. В рамках программы факультета математики по привлечению лучших аспирантов факультета к преподаванию, Павел Осипов вел семинары по Алгебре и Дискретной математике на 1 курсе бакалавриата, практические занятия на курсе Математический практикум, а также семинары по курсу Математики для студентов 1 курса бакалавриата ОП “Философия”. С апреля 2020 года семинары лаборатории вынуждены были перейти в онлайн. Несмотря на отсутствие “живого” общения, это существенно расширило географию участников семинара. На студенческом семинаре “Геометрические структуры на многообразиях” (3-4 часа в неделю), смогли выступить не только стажеры лаборатории и студенты и аспиранты факультета математики, но и выпускники факультета прошлых лет. Продолжал свою работу Еженедельный семинар Лаборатории алгебраической геометрии; среди докладчиков – сотрудники Лаборатории и факультета, ассоциированные члены научного коллектива Лаборатории, ученые из российских и мировых научных центров. Руководитель семинара – Никон Курносов.

Сотрудниками лаборатории были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2020 год:

- Производные категории
- Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии
- Геометрическая теория представлений
- Классическая геометрия
- Специальные многообразия

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

1 Производные категории

1.1 Производная категория плоскости Кэли и коприсоединенного грассманиана типа F

Производные категории компактных однородных пространств простых алгебраических групп традиционно представляют собой важный предмет исследования. Собственно, первые результаты о производных категориях были получены именно для однородных пространств: в 1978 году Бейлинсон описал производную категорию проективных пространств (простейших однородных пространств типа A и C), а в 1988 году Капранов описал производную категорию квадрик (простейших однородных пространств типа B и D), а также все однородных пространств типа A.

Во всех этих случаях описание производной катеории заключалось в построении полного исключительного набора составленного из векторных расслоений, то есть набора расслоений $E_1, \ldots, E_n$, такого что

$$\operatorname{Ext}^\bullet(E_i, E_i) = \Bbbk \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Ext}^\bullet(E_i, E_j) = 0$$

при всех i и всех $i > j$ соответственно, и если $\operatorname{Ext}^\bullet(E_i, F) = 0$ при всех i для какого-то объекта F производной категории, то $F = 0$ (условие полноты).

В связи с этими результатами возникла естественная гипотеза о том, что на всяком компактном однородном пространстве простой алгебраической группы существует полный исключительный набор. Доказательство этой гипотезы в общем случае до сих пор отсутствует, хотя в ее направлении были достигнуты большие продвижения, в том числе и сотрудниками лаборатории.

В частности, в работе [3] сотрудника лаборатории А. Кузнецова и ассоциированного сотрудника А. Полищука были построены исключительные наборы максимально возможной длины на всех компактных однородных пространствах простых алгебраических групп классического типа (то есть типов A, B, C и D), однако доказать их полноту до сих пор не удалось. С другой стороны, для исключительных типов E и F (тип G_2 ввиду небольшого ранга гораздо проще и исключительные наборы в этом типе уже построены) единственным компактным однородным пространством, для которого до сих пор был построен исключительный набор, является плоскость Кэли — коминускульный грассманиан типа E_6 (см. [2]).

В новой работе [1] сотрудника лаборатории А. Кузнецова совместной с П. Бельмансом и М. Смирновым получено новое продвижение в направлении вышеуказанной гипотезы, а именно построен полный исключительный набор на коприсоединенном грассманиане типа F_4. Конструкция набора и доказательство его полноты основаны на известной связи, между данным грассманианом и плоскостью Кэли — грассманиан Y изоморфен гиперплоскому сечению плоскости Кэли X (заметим, что название “плоскость” в данном случае является несколько условным, поскольку $\dim(X) = 16$), а также тем фактом, что исключительный набор на X, построенный Манивелем и Фаенци, является лефшецевым, а значит хорошо себя ведет при ограничении на гиперплоские сечения. Таким образом, из исключительного набора на X длины 27 получается исключительный набор на Y длины 24.

Основную часть работы занимает доказательство полноты построенного набора (это всегда является наиболее сложной частью описания производной категории). Оно основано на построении некоторого комплекса расслоений на Y, связывающего друг с другом ограничения некоторых исключительных расслоений на X, а также на обобщении аргумента, использованного А. Самохиным для доказательства полноты построенного им набора на гиперплоском сечении лагранжева грассманиана $\mathrm{LGr}(3,6)$.

Помимо доказательства полноты набора, в работе [1] также описаны вычетные категории к исключительным наборам на X и Y. Во-первых, показано, что вычетная категория для набора Манивеля и Фаенци порождается тремя полностью ортогональными исключительными объектами. Во-вторых, доказан общий результат о том, что если вычетная категория многообразия порождена полностью ортогональным исключительным набором, а ограничение порождает производную категорию гиперплоского сечения, то вычетная категория гиперплоского сечения эквивалентна произведению нескольких производных категорий колчанов Дынкина типа A. Применяя этот общий рзультат для случая плоскости Кэли и коприсоединенного грассманиана типа F_4 удается доказать, что вычетая категория последнего эквивалентна производной категории колчана Дынкина типа A_2. Последний результат о вычетной категории подтверждает гипотезу [4, Conjecture 1.5].

1.2 Производные категории некоторых нульмерных схем

Нульмерная схема — это спектр коммутативной конечномерной алгебры, которую можно считать локальной. Геометрически такая схема неинтересна, её топологическое пространство состоит из одной точки. Однако гомологически такая схема может быть интересна — на ней есть множество когерентных пучков (т.е., конечномерных модулей над самой алгеброй). Абелева и производная категория когерентных пучков на нульмерной схеме могут быть устроена довольно сложно.

Пусть X — связная нульмерная схема над полем k. Тогда категория совершенных комплексов $\mathrm{Perf}(X)$ на X имеет сильный генератор тогда и только тогда, когда эта схема неособа, т.е. является точкой (над некоторым полем). С другой стороны, категория $D^b(\mathrm{coh}(X))$ для той же схемы гладка над полем k в предположении, что k совершенно, см. [7]. В частности, $D^b(\mathrm{coh}(X))$ имеет сильный генератор, и размерность этой категории (в смысле Рукье) конечна. Однако о том, чему равна эта размерность для разных нульмерных схем, известно совсем немного.

При изучении размерности категории $D^b(\mathrm{coh}(X))$ естественно задать вопрос: какие вообще в ней имеются триангулированные подкатегории, насколько их много? Из результатов [9] следует, что в категории $\mathrm{Perf}(X)$ для связной нульмерной схемы X есть всего две толстые триангулированные подкатегории — 0 и $\mathrm{Perf}(X)$. Однако в $D^b(\mathrm{coh}(X))$

толстых подкатегорий может быть много. Например, они классифицированы для нульмерных полных пересечений, см. [5]:

Пусть X — нульмерное полное пересечение: $X = \mathrm{Spec}(A)$, где

$$A = k[x_1, \ldots, x_n]_0/(f_1, \ldots, f_n),$$

здесь $k[x_1, \ldots, x_n]_0$ обозначает локализацию кольца многочленов в нуле, а $f_1, \ldots, f_n$ — регулярная последовательность в идеале $(x_1, \ldots, x_n)^2$. Тогда толстые триангулированные подкатегории в $D^b(\mathrm{coh}(X))$, отличные от $\mathrm{Perf}(X)$, находятся в биекции с замкнутыми относительно специализации подмножествами схемы $\mathbb{P}_k^{n-1}$ с топологией Зарисского. При этом конечно порождённые подкатегории соответствуют замкнутым по Зарисскому подмножествам. Эта классификация аналогична классификации толстых покатегорий в $D^b(\mathrm{coh}(X))$ для гладкого аффинного многообразия X, см. [9].

Однако для общих нульмерных схем классификации толстых триангулированных подкатегорий в ограниченной производной категории не существует, и едва ли может существовать. Сотрудник лаборатории А. Елагин совместно с В. Лунцем исследовал ограниченную производную категорию T_N конечно порождённых модулей над алгеброй

$$k[x_1, \ldots, x_N]/(x_1, \ldots, x_N)^2$$

и её толстые подкатегории, см. [8]. Было показано, что таких подкатегорий очень много и они плохо контролируются, что противоположно ситуации, описанной в [5]. В частности, конечно порождённые толстые подкатегории в T_N не удовлетворяют условию обрыва убывающих цепочек, в отличие от [5]. Более того, существуют бесконечные деревья убывающих вложенных конечно порождённых толстых подкатегорий в T_N.

Для работы с категорией T_N была использована её эквивалентность с категорией $\mathrm{Perf}(A_N)^{op}$, где A_N — свободная градуированная некоммутативная алгебра от N переменных $x_1, \ldots, x_N$ степени 1, которая рассматривается как dg алгебра с нулевым дифференциалом (см., например, [6]). Далее, рассматривались dg A_N-модули

$$M_x := \mathrm{Cone}(A_N[-\deg(x)] \xrightarrow{x} A_N)$$

для однородных элементов $x \in A_N$ и порождённые такими модулями толстые подкатегории в $\mathrm{Perf}(A_N)$. В предположении, что система однородных элементов S в A_N удовлетворяет некоторому условию, была получена равносильность следующих условий на модуль M_x:

– $M_x \in \langle M_s \rangle_{s \in S}$;

– $x = \lambda \prod_{i=1}^{n} y_i$, где $\lambda \in k$, $y_i \in S$.

Условие на систему S, о котором идёт речь, состоит в следующем: в S нет обратимых элементов, и для любых ненулевых однородных элементов $x, y, a, b, c \in A_N$ таких, что $x, y \in S$, $x = ab$, $y = ca$, либо a обратим, либо $x = y$ и b, c обратимы. Его несложно проверять в случае, когда S — конечная система мономов от переменных $x_1, \dots, x_N \in A_N$. Пользуясь вышеприведённым критерием, А. Елагин и В. Лунц строят бесконечные деревья убывающих вложенных подкатегорий в $\mathrm{Perf}(A_N)$, порождённых конечным числом модулей вида M_x.

1.3 Фантомы в категориях дель Пеццо

Изучение производных категорий когерентных пучков на многообразиях является активно развивающейся областью алгебраической геометрии. Один из наиболее мощных инструментов для их изучения – это понятие полуортогонального разложения. Полуортогональным разложением категории T называется пара триангулированных подкатегорий $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$, которые порождают T и в некотором смысле независимы друг от друга. В случаях, когда обе компоненты разложения достаточно простые, полуортогональное разложение часто позволяет что-то доказать что-то про всю категорию T.

Подкатегория $\mathcal{A} \subset D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ в производной категории когерентных пучков на многообразии X называется фантомом, или фантомной подкатегорией, если во-первых, существует полуортогональное разложение, одной из компонент которого является $\mathcal{A}$, и во-вторых, если любой объект $A \in \mathcal{A}$ имеет нулевой класс в группе Гротендика $K_0(D^b_{\mathrm{coh}}(X))$. Иными словами, фантомная подкатегория — это такая, которую нельзя обнаружить численными инвариантами. В некоторых многообразиях фантомные подкатегории существуют [6], но при этом ожидается, что во многих случаях вроде однородных пространств ([4]) фантомов быть не должно быть. Первоначальной целью исследований ассоциированного сотрудника Лаборатории Д. Пирожкова было доказательство отсутствия фантомов в произведениях $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — кривая положительного рода. После достижения этой цели доказательство удалось значительно обобщить:

Теорема 1. (= Proposition 1.5 в [1]) Пусть Y — многообразие, у которого морфизм Альбанезе является конечным.

1. Пусть X — это или $\mathbb{P}^1$, или поверхность дель Пеццо. Тогда в производной категории $D^b_{\mathrm{coh}}(X \times Y)$ не существует фантомных подкатегорий.

2. Пусть $\pi \colon \mathfrak{X} \to Y$ это этально-локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbb{P}^1$ или $\mathbb{P}^2$. Тогда в производной категории $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathfrak{X})$ не существует фантомных подкатегорий.

Поскольку и кривые положительного рода, и абелевы многообразия имеют конечный морфизм Альбанезе, первая часть теоремы полностью выполняет задание, предписанное данным договором. Перед тем, как объяснить идеи, использованные в доказательстве этой теоремы, обсудим общий контекст, в котором она появилась.

Несмотря на то, что известно много примеров полуортогональных разложений, и известно много способов получать из уже имеющихся примеров новые, общая структура произвольных полуортогональных разложений на данный момент изучена не очень глубоко. Список многообразий, у которых до какой-то степени изучены все возможные полуортогональные разложения, весьма краток. Он состоит из двух групп. Первая группа — те многообразия, у которых нет никаких нетривиальных полуортогональных разложений. Такими являются, например, многообразия, у которых морфизм Альбанезе конечен — в этом случае на многообразии есть много голоморфных старших форм и неразложимость производной категории следует из [3].

Вторая группа состоит из $\mathbb{P}^1$ и поверхностей дель Пеццо. Для проективной прямой $\mathbb{P}^1$ классифицировать полуортогональные разложения легко: любое нетривиальное разложение имеет вид $\langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n+1) \rangle$ для какого-то $n \in \mathbb{Z}$. Для случая проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ полная классификация полуортогональных разложений была построена нами в предыдущей работе [2], в которой так же было доказано несуществование фантомных подкатегорий в поверхностях дель Пеццо.

Кажется естественным изучить, что можно сказать про производные категории многообразий, полученных комбинациями многообразий из двух групп выше. Например, если у Y нет нетривиальных полуортогональных разложений, то можно ли классифицировать все возможные полуортогональные разложения произведения $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbb{P}^1 \times Y)$? Ответы на подобные вопросы в полной общности пока неизвестны. Как показывает Теорема 1, более сильные условия на Y позволяют вывести больше информации про произведения $X \times Y$. Напомним, что конечность морфизма Альбанезе влечёт неприводимость производной категории. Однако, как мы выяснили в ходе работы над [1], конечность влечёт ещё более сильное свойство, заслуживающее отдельного названия:

Определение 1. Гладкое проективное многообразие Y называется стабильно полуортогонально неприводимым, или стабильно неприводимым при отсутствии неоднозначности, если для любого морфизма $\pi \colon \mathfrak{X} \to Y$ из гладкого собственного многообразия X, любое полуортогональное разложение $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathfrak{X})$ автоматически является π-линейным.

Свойство линейности полуортогонального разложения относительно морфизма было введено в [5] и интуитивно значит, что разложение является послойным. Таким образом, определение выше говорит, что для любого семейства многообразий над данным, любое разложение на тотальном пространстве является послойным разложением.

Ключевым ингредиентом для доказательства Теоремы 1 является следующее утверждение:

Теорема 2. (= Theorem 1.4 в [1]) Любое многообразие с конечным морфизмом Альбанезе является стабильно полуортогонально неприводимым.

Его доказательство опирается на два факта. Во-первых, топологическая жёсткость полуортогональных разложений [3] означает, что относительно подкруток на линейные расслоения из $\mathrm{Pic}^0(Y)$ инвариантно любое полуортогональное разложение $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathfrak{X})$. Во-вторых, из конечности морфизма Альбанезе Y следует, что на нём достаточно много линейных расслоений в $\mathrm{Pic}^0(Y)$, чтобы в значительной степени определить поведение всей производной категории в целом. Более чёткая формулировка дана в Lemma 3.3 [1].

Проделанная работа даёт ответы на некоторые естественные вопросы о фантомных подкатегориях. Введённое понятие стабильной полуортогональной неприводимости может быть в дальнейшем изучено более глубоко. В частности, было бы очень интересно узнать, какие ещё классы многообразий являются стабильно неприводимыми. Это свойство значительно сильнее просто неприводимости. Например, оно влечёт, что любое гладкое подмногообразие данного тоже имеет неприводимую производную категорию, что показывает, что, например, K3 поверхности как правило не являются стабильно неприводимыми, а только имеют неприводимую производную категорию.

Список использованных источников

1. Dmitrii Pirozhkov, Stably semiorthogonally indecomposable varieties, препринт

2. Dmitrii Pirozhkov. Admissible subcategories of del Pezzo surfaces. 2020. arXiv: 2006.07643 [math.AG].

3. K. Kawatani and S. Okawa, Nonexistence of semiorthogonal decompositions and sections of the canonical bundle, arXiv:1508.00682

4. Alexander Kuznetsov and Alexander Polishchuk. Exceptional collections on isotropic Grassmannians. In: J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18.3 (2016), pp. 507-574.

5. A. G. Kuznetsov. Hyperplane sections and derived categories. In: Izvestiya: Mathematics 70.3 (2006), pp. 447-547.

6. Sergey Gorchinskiy and Dmitri Orlov. Geometric phantom categories. In: Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 117 (2013), pp. 329-349.

1.4 Применение производных категорий к различным вопросам алгебры и квантовой теории информации

В 1982 году в статье Бейлинсона, Бернштейна и Делиня [10] при изучении превратных пучков, было введено понятие "склейки" триангулированных категорий. Далее, в 1986 году Макферсон и Вилонен рассмотрели "склейку" абелевых категорий. Следуя Псарудакису ([14]) введем понятие "склейки" (recollement) абелевых категорий. А именно, "склейка" — тройка абелевых категорий $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ и набор функторов: $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $e : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ и сопряженные им: $q : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $p : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ и $l : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ и $r : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, удовлетворяющие следующим условиям: функторы i, l, r — строго точные и образ i совпадает с ядром e. В частности, при достаточно естественных условиях на абелевы категории, соответствующие ограниченные производные категории тоже будут удовлетворять условиям "склейки" триангулированных категорий. Это позволило существенно упростить проверку условий “склейки” и получить оценки гомологических размерностей категории $\mathcal{B}$ через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$. Фактически, “склейка” абелевых категорий является обобщением следующей известной ситуации: пусть у нас есть алгебра R и t — идемпотент в R. Тогда $\mathcal{A} = \mathrm{R/RtR - Mod}$, $\mathcal{B} = \mathrm{R - Mod}$ и $\mathcal{C} = \mathrm{tRt - Mod}$.

Подобная ситуация встречается и при изучении гомотопов ассоциативных алгебр. Напомним понятие гомотопа: пусть R — ассоциативная алгебра с единицей и $x \in R$ — фиксированный элемент. Тогда гомотоп алгебры R с помощью элемента x — есть ассоциативная алгебра R_x. R_x как пространство — изоморфно R, но с новой операцией умножения: $r_1 *_x r_2 = r_1 x r_2$. Получившаяся алгебра вообще говоря не является алгеброй с единицей. Поэтому рассматривают алгебру $\widehat{R}_x$ — формально добавляют единицу к алгебре R_x. Естественным образом строятся два гомоморфизма $\psi_1, \psi_2 : \widehat{R}_x \to R$ по формулам: $\psi_1 : r \mapsto rx, r \in R$ и $\psi_2 : r \mapsto xr, r \in R$ а также $\psi_i(1) = 1, i = 1, 2$. С помощью этих гомоморфизмов получается ситуация “склейки”.

Отметим, что гомотопы встречаются обычно в случае неассоциативных алгебр. А именно, пусть R — неассоциативная алгебра с умножением $m : R \otimes R \to R$ и $x \in R$ фиксированный элемент. Тогда можно определить левый и правый гомотопы по отношению к элементу x. Умножение m_l в левом гомотопе определяется так: $m_l(a, b) = m(a, m(x, b))$, соответственно, умножение m_r в правом гомотопе так: $m_r(a, b) = m(m(a, x), b)$. В работе [15] было показано, что для общей (вообще говоря, неассоциативной) алгебры A, существует алгебра (вообще говоря неассоциативная) B и элемент $x \in B$, такой, что A является левым (правым) гомотопом B по отношению к элементу x.

В работе [11] было показано, что для ассоциативной k-алгебры R категория модулей гомотопа $\mathrm{\widehat{R}_x - Mod}$ является “склейкой” категорий $\mathrm{R - Mod}$ и $\mathrm{k - Mod}$ в случае “правильного” выбора элемента x. Условие “правильного” выбора следующее: $RxR = R$ и R как левый и правый $\widehat{R}_x$ — модуль является проективным. Такой выбор элемента называется хорошо-темперированным. В этом случае есть естественные оценки на глобальную гомологическую размерность $\mathrm{\widehat{R}_x - Mod}$ через глобальную размерность $\mathrm{R - Mod}$. В случае конечномерной алгебры R автором показано, что достаточно только условия $RxR = R$ и кроме того показывается, что если в качестве x выбрать не хорошо-темперированный элемент, то гомологическая размерность $\widehat{R}_x$ — бесконечна. В случае коммутативных алгебр гомотопы возникают при изучении бирациональных отображений. Рассмотрены примеры гомотопов кривых, а также с помощью гомотопов построен контрпример к лемме Ричардсона в случае ненетерового кольца. Описанные результаты опубликованы в работе [15].

Также изучались приложение алгебры, алгебраической геометрии, теории представлений и теории категорий к квантовой теории информации. Напомним, что основным понятием в квантовой механике является “наблюдаемая”. В квантовой теории информации понятие “наблюдаемая” было переформулировано как проекторнозначная мера (кратко, PVM). А именно, вместо “наблюдаемой” можно рассматривать ее спектральную меру. Понятие положительно-операторной меры (или кратко, POVM) является обобщением PVM и, соответственно, квантовые измерения, описываемые POVM, есть обобщение квантовых измерений, описываемых с помощью PVM.

POVM — это наиболее общий тип измерений в квантовой механике. Они широко используются в области квантовой теории информации. Связь между PVM и POVM описана Наймарком в его знаменитой теореме о дилатации. Грубо говоря, POVM — это "проекция" некоторого PVM.

Напомним определение POVM. Пусть K — это k-мерное гильбертово пространство, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ — конечное множество. POVM — это операторная мера $\mathsf{A} : \Omega \to E(K)$, где $E(K)$ — множество полуположительных операторов на K и $\sum_{i=1}^m \mathsf{A}(\omega_i) = I$, где I — единичный оператор.

Естественным образом к проблеме классификации POVM, можно применить теорию деформированных препроективных алгебр, которая была развита Кроули-Боуви [12] для решения проблемы Делиня–Симпсона. В нашей работе ([13]) мы применяем технику Кроули-Боуви для описания POVM.

1.5 Многообразие Кюхле и грассманиан Кэли

Стажером лаборатории Л. Гусевой были изучены некоторые геометрические конструкции, связанные с 5-мерным многообразием Кюхле X_5 — подмногообразием в грассманиане $\mathrm{Gr}(3,7)$, параметризующем трехмерные подпространства в векторном пространстве V размерности 7, изотропные относительно общей 2-формы μ и аннигилируемые общей 4-формой λ, причем μ и λ находятся в общем положении относительно друг друга. Более точно, если обозначить за $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^\perp$ тавтологические расслоения на грассманиане рангов 3 и 4 соответственно, то X_5 является локусом, на котором зануляется общее сечение расслоения

$$\mathcal{U}^\perp(1) \oplus \mathcal{U}(1)$$

на $\mathrm{Gr}(3,7)$.

Было показано, что проективизация расслоения $\mathcal{U}^\perp$ на X_5 расслаивается на поверхности дель Пеццо степени 6 над проективным пространством $\mathbb{P}(V^\vee)$: для каждой гиперплоскости V_6 в V рассматривается пересечение $\mathrm{Gr}(3,V_6) \cap X_5$, которое для общей V_6 является поверхностью дель Пеццо.

С расслоением на поверхности дель Пеццо степени 6 канонически связаны 3-листное накрытие $\mathcal{X}$ над базой $\mathbb{P}(V^\vee)$, которое соответствует трем классам коник на слоях, и $\mathbb{P}^1$-расслоение над $\mathcal{X}$, которое параметризует коники в каждом из классов. Было дано явное описание многообразия $\mathcal{X}$ и сооответствующего $\mathbb{P}^1$-расслоения над $\mathcal{X}$ в случае многообразия Кюхле X_5. А именно, с X_5 связан канонический пучок 4-форм $\{\lambda, \mu \wedge \mu\}$, который при ограничении на гиперплоскость V_6 дает пучок 2-векторов, в котором есть три вырожденных 2-вектора, задающих 3-листное накрытие, при этом $\mathcal{X}$ изоморфен дивизору бистепени (2,3) в $\mathbb{P}(V^\vee) \times \mathbb{P}^1$, заданному семейством квадрик в $\mathbb{P}(V^\vee)$, канонически связанным с пучком 4-форм $\{\lambda, \mu \wedge \mu\}$.

Также были описаны все $\mathbb{P}^2$-плоскости на X_5. Более точно в пучке 4-форм

$\{\lambda, \mu \wedge \mu\}$ есть 6 необщих, где под общей 4-формой подразумевается форма, лежащая на всюду плотной орбите при действии $\mathrm{GL}(V)$ на $\Lambda^4 V^\vee$, и было показано, что с каждой необщей формой из пучка (кроме формы $\mu \wedge \mu$) связаны две $\mathbb{P}^2$-плоскости на X_5, и других плоскостей нет.

Кроме того были изучены некоторые геометрические конструкции, связанные с грассманианом Кэли **CG** — подмногообразием в грассманиане $\mathrm{Gr}(3,7)$, параметризующем трехмерные подпространства, аннигилируемые фиксированной общей 4-формой в векторном пространстве размерности 7.

Во-первых, было дано описание **CG** как подмногообразия в $\mathrm{Gr}(3,7)$, параметризующего 3-мерные подалгебры Ли в мнимых комплексных октонионах.

Во-вторых, была описана схема Гильберта прямых на **CG**, а именно было показано, что она изоморфна $\mathbb{P}^2$-расслоению над $\mathrm{LieGr}(2,7)$ — подмногообразием в грассманиане $\mathrm{Gr}(2,7)$, параметризующем 2-мерные подалгебры Ли в мнимых комплексных октонионах, причем $\mathrm{LieGr}(2,7)$ изоморфно $\mathrm{OGr}(2,7)$ — ортогональному грассманиану, параметризующему двумерные изотропные относительно симметрической 2-формы подпространства в 7-мерном векторном пространстве.

Кроме того были описаны три неизоморфных расслоения на коники над **CG**, все эти расслоения лежат в проективизациях расслоений ранга три в построенном раннее полном исключительном наборе на **CG**:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}, \mathcal{U}^\vee, \Lambda^2\mathcal{U}^\vee, (\Lambda^2\mathcal{U}^\perp/\Lambda^2\mathcal{U})^\vee, \Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee, \\ \mathcal{O}(1), \mathcal{U}^\vee(1), \Lambda^2\mathcal{U}^\vee(1), (\Lambda^2\mathcal{U}^\perp/\Lambda^2\mathcal{U})^\vee(1), \\ \mathcal{O}(2), \mathcal{U}^\vee(2), \Lambda^2\mathcal{U}^\vee(2), \mathcal{O}(3), \mathcal{U}^\vee(3), \Lambda^2\mathcal{U}^\vee(3),\end{aligned}$$

а именно расслоения на коники лежат в проективизациях расслоений

$$\mathcal{U}^\vee, \qquad \Lambda^2\mathcal{U}^\vee \qquad \text{и} \qquad (\Lambda^2\mathcal{U}^\perp/\Lambda^2\mathcal{U})^\vee.$$

Так как многообразие Кюхле X_5 яляется подмногообразием в грассманиане Кэли **CG**, можно ограничить полученные расслоения на коники на X_5. Было показано, что ограничение на X_5 расслоения на коники, лежащего в проективизации $\mathbb{P}(\mathcal{U}^\vee)$ бирационально отображается в гиперплоское сечение $\mathrm{OGr}(2,7)$, и что локус, в котором отображение не является взаимно-однозначным, изоморфен схеме Гильберта прямых на многообразии X_5.

1.6 Касательное расслоение второй схемы Гильберта K3 поверхности

М.Вербицкий в работе [18] изучал препятствия для стабильных деформаций гиперголоморфных векторных расслоений на гиперкэлеровых многообразиях. Как оказалось, все препятствия происходят из спаривания Йонеды. Более того, было показано, что на редуцированном пространстве модулей стабильных деформаций гиперголоморфного расслоения существует каноническая гиперкэлерова структура.

Благодаря результатам Бовилля известно, что схема Гильберта $S^{[n]}$, параметризующая наборы из n точек на K3 поверхности S, является гиперкэлеровым многообразием. На этом многообразии существует естественное гиперголоморфное расслоение, а именно касательное расслоение $T_{S^{[n]}}$. Таким образом, с точки зрения гиперкэлеровой геометрии является интересным вопрос изучения пространства деформаций касательного расслоения. Для произвольного n этот вопрос выглядит довольно сложным, однако в случае $n = 2$ в работе [16] автором было отмечено, что касательное расслоение является, по-видимому, жёстким. В работе [17] дается доказательство этого утверждения.

Теорема 1.1. Для произвольной проективной K3 поверхности S расслоение $T_{S^{[2]}}$ является инфинитезимально жёстким, то есть

$$H^1(S^{[2]}, \mathcal{E}nd(T_{S^{[2]}})) = 0.$$

1.7 Пуассоновы структуры Одесского–Фейгина

Целью данной работы является изучение некоторых общих свойств эллиптических пуассоновых структур Одесского–Фейгина и описание их стратификации для новых примеров.

Для удобства напомним кратко основные свойства этих структур. Зафиксируем эллиптическую кривую C и взамно простые целые числа $d > r > 0$. Пусть $F_{r,d}$ это стабильное векторное расслоение над C ранга r и степени d. В работе [23] была построена некоторая некоммутативная алгебра, полуклассический предел которой задает пуассонову структуру на проективном пространстве $\mathbb{P}(H^0(C, F_{r,d})^*)$. Такие пуассоновы структуры обозначались как $q_{r,d}$.

Наиболее изученным является случай, когда $r = 1$, то есть

$$L := F_{1,d}$$

является линейным расслоением степени d. Рассмотрим естественное вложение $C \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(C, L)^*) = \mathbb{P}^{d-1}$. По определению, k-тым многообразием секущих кривой C, которое мы будем обозначать как $\mathsf{Sec}_k(C)$, является объединение всех k-мерных подпространств в $\mathbb{P}^{d-1}$, пересекающее C в $k+1$ точке с учетом кратности (мы полагаем $\mathsf{Sec}_0(C) = C$). В работе фон Ботмера и Хулека [19] были доказаны важные свойства многообразий секущих эллиптических кривых. В частности, было показано, что они являются горенштейновыми и была вычислена степень этих многообразий.

Как показали Одесский и Фейгин, для нечётного d пуассонова структура $q_{1,d}$ обладает замечательным геометрическим свойством: она является симплектической на общем слое $\mathbb{P}^{d-1} \setminus \mathsf{Sec}_{\frac{d-3}{2}}(C)$, а на дополнении она стратифицируется многообразиями секущих.

А именно, для $k = 0, 1, \ldots, \frac{d-3}{2}$ ранг скобки равен $2k$ для точек, лежащих в $\mathsf{Sec}_k(C) \setminus \mathsf{Sec}_{k-1}(C)$. Для случая чётного d описание немного усложняется и содержит некоторые нерешенные до сих пор вопросы (см., например, [22, Section 8]).

В работе [24] эта конструкция была обобщена на случай пространств модулей параболических расслоений на C, а затем развита в работе А.Полищука [25], где эллиптическая пуассонова структура строится на пространствах модулей стабильных голоморфных троек в смысле Брэдлоу и Гарсиа-Прада [20].

Напомним, что голоморфной тройкой $T = (E_0, E_1, \varphi)$ над C называется пара векторных расслоений E_0 и E_1 с морфизмом $\varphi : E_0 \to E_1$. Для фиксированного параметра $\sigma \in \mathbb{R}$ наклон такой тройки определяется как

$$\mu_\sigma(T) = (\deg(E_0) + \deg(E_1) + \sigma \cdot \mathrm{rk}(E_0))/(\mathrm{rk}(E_0) + \mathrm{rk}(E_1)).$$

В совместной работе [21] с М.Матвийчуком из Университета Макгилла продолжаются исследования эллиптических пуассоновых структур на пространствах модулей стабильных троек на эллиптических кривых.

В терминах пространств модулей параболических расслоений дается описание пуасонового тензора и соответствующей формы на симплектических листах. Для некоторых пространств модулей можно определить так называемую параболическую редукцию, для которой доказывается, что она является рациональным пуасоновым отображением.

Во второй части работы изучаются свойста пуассоновой структуры на грассманианах $\mathrm{Gr}(m, n)$, у которых подлежащее проективное пространство $\mathbb{P}^{n-1}$ снабжено пуассоновой структурой типа $q_{1,n}$. Дадим краткое описание полученной конструкции.

Зафиксируем линейное расслоение L степени $n > 0$. Грассманиан $\mathrm{Gr}(m, n)$ определяется как пространство модулей вложений векторных расслоений

$$\mathcal{O}_C^{\oplus m} \longrightarrow F, \tag{1.7.1}$$

для которых $\det(F) = L$, $\mathrm{rk}(F) = m+1$ и $h^1(C, F) = 0$. Такие расслоения F, для которых существует вложение вида (1), мы будем называть допустимыми.

В работе дается полное описание допустимых расслоений. Более того, такое пространство модулей можно реализовать как пространство модулей стабильных троек вида $\mathcal{O}_C^{\oplus m} \to F$ с параметром $\sigma = 2n - \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$, а значит, согласно результатам работы [25], на этом грассманиане определена эллиптическая пуасонова структура, которую мы обозначим как $q_{1,n}(m)$.

Используя описание допустимых расслоений, мы получаем модулярное описание нулей для $q_{1,n}(m)$. Из этого описания следует, что максимальная связная компонента многообразия нулей является многообразием $(m-1)$-подпространств в $\mathbb{P}^{n-1}$, пересекающих кривую C в m точках с учетом кратности, а значит, изоморфно $\mathsf{Sym}^m(C)$. В случаях, когда $n > 2m+2$ и $m = n-2$ других компонент нет. В остальных случаях есть еще дополнительные компоненты меньшей размерности, в частности, для $n = 2m+2$ к вышеуказанной максимальной компоненте добавляется некоторое множество из $(m+1)^2$ изолированных точек.

Для каждой точки $x \in C$ строится вложение

$$j_x : \mathrm{Gr}(m-1, n-1) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(m, n),$$

где первый грассманиан снабжен пуасоновой структурой $q_{1,n-1}(m-1)$. Доказывается, что j_x является пуасоновым вложением. Это позволяет получить частичное описание симплектических листов для грассманианов малых размерностей.

В случае грассманиана $\mathrm{Gr}(n-2,n)$ удается дать явное описание ранга скобки в точке в терминах геометрии кривой C вложенной в $\mathbb{P}^{n-1}$.

Теорема 1.2. Пусть V является $(n-3)$-мерным подпространством в $\mathbb{P}^{n-1}$. Тогда ранг пуассоновой скобки в точке $[V] \in \mathrm{Gr}(n-2,n)$ равен

$$2n-4-2\cdot i_{V,C},$$

где $i_{V,C}$ является числом пересечений V и кривой C с учетом кратностей.

Также дается описание скобки для грассманианов $\mathrm{Gr}(2,5)$ и $\mathrm{Gr}(2,6)$. Здесь мы сформулируем утверждение для второго грассманиана, который обладает немного более сложной структурой.

Утверждение 1.3. В точке $[l] \in \mathrm{Gr}(2,6)$, которая представляется прямой $l \subset \mathbb{P}^5$, ранг скобки равен

- 0, если l пересекает C в двух точках с учетом кратности,
- 2, если l пересекает C ровно в одной точке и при этом лежит в некоторой секантной плоскости кривой C,
- 4 в одном из следующих случаев
  - если l не пересекает C и либо пересекает некоторый двумерный симплектический лист пуасоновой структуры $q_{1,5}$ либо лежит в некоторой секущей плоскости кривой C,
  - если l пересекает C ровно в одной точке и не пересекает $\mathsf{Sec}_2(C) \setminus C$,
- 6, в остальных случаях.

1.8 Эллиптические бигамильтоновы структуры из относительных сдвинутых пуассоновых структур

Напомним, что бигамильтонова структура — это пара (линейно независимых) пуассоновых бивекторов Π_1, Π_2, которые согласованы, то есть таковы, что любая лиейная комбинация Π_1 и Π_2 опять пуассонова. Фундаментальый результат Магри связывает бигамильтоновы структуры и вполне интегрируемость [26].

Ассоциированный сотрудник лаборатории А. Полищук занимался исследованием геометрии бигамильтоновых структур продолжающих эллиптичекие пуассоновы скобки Фейгина–Одесского. Напомним, что последние — это некоторые скобки Пуассона $q_{n,k}(C)$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}$ ассоциированные с эллиптичекой кривой C

и парой взаимно простых целых чисел $n > k > 0$. Эти скобки были введены Фейгиным и Одесским в [28] и ожидается, что они являются полуклассическими пределами эллиптических алгебр Фейгина–Одесского введенных в [27] (при $k = 1$ это доказано в [29, §5.2]). Недавно интересные примеры таких бигамильтоновых структур были построены Одесским–Вольфом в [31] (улучшая более раннюю конструкцию Одесского [30]): для каждого $n > 2$ они построили 9-мерное подпространство согласованых скобок Пуассона на $\mathbb{P}^{n-1}$ содержащих $q_{n,1}(C)$. Наши результаты дают более концептуальную конструкцию этих согласованных скобок, также как и некоторые обобщения, включая $q_{n,k}(C)$ с $k > 1$.

Главная идея конструкции — использовать общую конструкцию сдвинутых пуасоновых структур на (производных) стэках модулей векторных расслоений на многобразиях Калаби–Яу построеную [29]. В [29] было показано, что скобки Фейгина–Одесского возникают в этой ситуации как классические "тени" естественных несдвинутых пуасоновых структур на стэках модулей двучленных комплексов на эллиптичеких кривых. Более того, указанный подход расширяетсяб включая в рассмотрение особые горенштейновые многообразия, а также относительную ситуацию. Точнее говоря, для плоского семейства (возможно особых) d-мерных многообразий Калаби–Яу над афинной базой строится $(1-d)$-сдвинутая пуассонова структура на относительном стэке комплексов. Показано, что в случае эллиптичеких расслоений $\pi : C \to \mathbb{P}^n$ таких что $\omega_{C/S} \simeq \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ это приводит к семейству скобок Пуассона.

Также изучаются семейства антиканонических дивизоров на поверхностях. Предлагается общая конструкция, которая по исключительному расслоению $\mathcal{V}$ на поверхности X, такому что $(\mathcal{O}_X, \mathcal{V})$ — исключительная пара, строит согласованные скобки Пуассона содержащие скобки Фейгина–Одесского. Если рассмотреть подходящие линейные расслоения на поверхностях Хирцеброха, получаются 9 согласованных пуасоновых скобок Одесского–Вольфа, содержащих $q_{n,1}(C)$. Чтобы доказать, что это те же согласованные скобки, требуется нетривиальное вычисление. Оно основано на связи между скобками Пуассона $q_{n,k}(C)$ и некоторыми произведениями Масси.

Также рассматриваются несколько новых примеров согласованных скобок Пуассона. А именно, строятся два бесконечных семейства пар (n, k) для которых каждая из скобок $q_{n,k}(C)$ Фейгина–Одесского содержится в 10-мерном семействе согласованных скобок Пуассона, а именно пары

$$(3f_{2m-1}, f_{2m-3}) \text{ при } m \geq 2, \quad \text{и}$$
$$(3f_{2m-1}, 3f_{2m-1} - f_{2m-3}) \text{ при } m \geq 3,$$

где (f_n) — последовательность чисел Фиббоначи. Например, это дает 10-мерное подпространство скобок Пуассона на $\mathbb{P}^5$, содержащих $q_{6,1}(C)$, что несколько удивительно, поскольку 9-мерное семейство согласованных скобок Одесского–Вольфа на $\mathbb{P}^5$ максимально, то есть не содержится в большем пространстве. Это приводит к естественному вопросу: как связаны эти два семейства?

В качестве еще одного нового примера обнаружено, что для всех $n > k > 1$ таких что $n \equiv \pm 1 \mod (k)$ с нечетным k, существует бигамильтонова структура на $\mathbb{P}^{n-1}$, содержащая $q_{n,k}(C)$. Более того, в этом случае удается построить 5 согласованных скобок, однако неизвестно, как доказывать их линейную независимость.

1.9 Производные категории и суперсвязности

Сотрудники лаборатории также продолжали изучение связи между некоторыми дифференциально-геометрическими и комплексно-аналитическими объектами на комплексно-аналитических многообразиях. Образцовым примером здесь служит эквивалентность понятий (или, правильнее, категорий) голоморфных расслоений и гладких расслоений с плоской $\bar{\partial}$-связностью. Результат, обобщающий такую связь был получен ранее А.Бондалом и А.Рослым [32].

Пусть X – компактное комплексно-аналитическое многообразие, $\mathcal{A}^\bullet = \mathcal{A}^\bullet_X$ – пучок DG-алгебр гладких комплексных внешних форм, $\mathcal{A}^k = \oplus_{p+q=k}\mathcal{A}^{p,q}$ с дифференциалом Дольбо $\bar{\partial}$, $\Omega^\bullet = \Omega^\bullet_X$ –пучок градуированных колец голоморфных форм (с нулевым дифференциалом). Рассматриваемая в [32] (плоская) суперсвязность – это пучок DG-модулей над $\mathcal{A}^{0,\bullet}$, локально свободный как модуль над $(\mathcal{A}^{0,\bullet})^\natural$ (то же самое кольцо, но без дифференциала). Пусть $\mathcal{C}(X)$ – DG-категория таких модулей, а $Ho(C(X))$ – ее гомотопическая категория. В работе [32] доказано, что последняя категория эквивалентна категории $D^b_{coh}(X)$.

Теперь сотрудник лаборатории А. Рослый, в совместной работе с И.Яковлевым, изучил аналогичную связь между категориями, аналогичными тем, что описаны выше. А именно, назовём плоской расширенной суперсвязностью пучок DG-модулей над $\mathcal{A}^\bullet$, локально свободных над $(\mathcal{A}^\bullet)^\natural$. Пусть $\mathcal{B}(X)$ – DG-категория таких модулей. Как и $\mathcal{C}(X)$, она предтреангулированная. Пусть $Ho(\mathcal{B}(X))$ – соответствующая гомотопическая категория. С другой стороны, рассмотрим DG-категорию $\Omega M(X)$, состоящую из $\Omega^\bullet$-DG-модулей с когерентными когомологиями. Мы планируем доказать эквивалентность $Ho(\mathcal{B}(X))$ и производной категории $D^b_{coh}(\Omega M(X))$. Для этого необходимо предъявить функтор между ними, что можно сделать уже на уровне DG-категорий. Поскольку каждый $\mathcal{A}^\bullet$-DG-модуль является также и $\Omega^\bullet$-DG-модулем (умножение на элементы подкольца голоморфных форм $\Omega^\bullet \subset \mathcal{A}^\bullet$ коммутирует с дифференциалом Дольбо $\bar{\partial}$), получаем функтор $\mathcal{B}(X) \to \Omega M(X)$. Для корректности надо только проверить, что когомологии $\mathcal{A}^\bullet$-DG-модуля являются когерентными $\Omega^\bullet$-модулями.

Сначала рассмотрим $\Omega^\bullet$-DG-модуль частного вида (локально свободный). Пусть $(E^\bullet, \gamma)$ – комплекс голоморфных расслоений с дифференциалом γ. Тогда $E^\bullet \otimes \Omega^\bullet$ – модуль над $\Omega^\bullet$, и произвольный дифференциал в нём имеет вид $\gamma + \phi$, где $\phi \in \mathrm{End}^\bullet(E^\bullet \otimes \Omega^\bullet)$, $\deg \phi = 1$, удовлетворяет $(\gamma + \phi)^2 = [\gamma, \phi] + \phi^2 = 0$ (здесь $[\cdot, \cdot]$ – суперкоммутатор; антикоммутатор в данном случае). Теперь расширим кольца до $\mathcal{A}^\bullet$ и получим плоскую расширенную суперсвязность, то есть $\mathcal{A}^\bullet$-DG-модуль $M^\bullet = E^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^\bullet$ с дифференциалом вида $\gamma + \bar{\nabla} + \phi$, где $\bar{\nabla} = \mathrm{id} \otimes \bar{\partial}$, а γ и ϕ продолжены на $M^\bullet$ по $\mathcal{A}^\bullet$-линейности. Назовём такую суперсвязность простой.

Утверждение о когерентности когомологий произвольной суперсвязности следует теперь из такой

Локальная лемма Любая расширенная суперсвязность локально изоморфна простой суперсвязности.

Приведём пример, мотивирующий наш интерес к этим конструкциям. Если $\Omega^\bullet$-модуль $M^\bullet$ имеет вид $E \otimes \Omega^\bullet$, где E – голоморфное расслоение, а дифференциал тогда имеет вид $\phi\colon E \otimes \Omega^i \to E \otimes \Omega^{i+1}$, то есть ϕ можно представлять себе как поле Хитчина, $\hat{\phi} \in \mathrm{Hom}(E, E \otimes \Omega^1)$, удовлетворяющее условию $\hat{\phi}^2 = 0$. Соответствующая суперсвязность в $E \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^\bullet$ имеет вид $\bar{\nabla} + \hat{\phi}$, где $\bar{\nabla}^2 = 0, \quad \bar{\nabla}\hat{\phi} + \hat{\phi}\bar{\nabla} = 0, \quad \hat{\phi}^2 = 0.$

В случае $\dim X = 1$ условие $\hat{\phi}^2 = 0$ тривиально выполнено, и мы приходим к стандартной паре Хитчина (E, ϕ).

Список использованных источников

1. P. Belmans, A. Kuznetsov, M. Smirnov, Derived categories of the Cayley plane and the coadjoint Grassmannian of type F, preprint math.AG/2005.01989.

2. Faenzi, Daniele, Manivel, Laurent, On the derived category of the Cayley plane II. Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), no. 3, 1057–1074.

3. A. Kuznetsov, A. Polishchuk, Exceptional collections on isotropic Grassmannians, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18 (2016), no. 3, 507–574.

4. A. Kuznetsov, M. Smirnov, Residual categories for (co)adjoint Grassmannians in classical types preprint math.AG/2001.04148.

5. Jon F. Carlson, Srikanth B. Iyengar, Thick subcategories of the bounded derived category of a finite group, Trans. of the AMS, 367:4 (2015), 2703–2717.

6. Xiao-Wu Chen, Dong Yang, Homotopy categories, Leavitt path algebras and Gorenstein projective modules, IMRN, 10 (2015), 2597?2633.

7. Alexey Elagin, Valery A. Lunts, and Olaf M. Schnuerer, Smoothness of derived categories of algebras, Mosc. Math. J., 20:2 (2020), 277-309.

8. Alexey Elagin, Valery A. Lunts, Derived categories of coherent sheaves on some zero-dimensional schemes, math.arxiv:2002.06416v2.

9. Amnon Neeman, The chromatic tower for $D(R)$, Topology, 31:3 (1992), 519–532.

10. A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, Faisceaux Pervers, Asterisque 100, 1982.

11. Бондал А., Ждановский И., Теория гомотопов в применении к несмещенным базисам, гармоническому анализу на графах и превратным пучкам, (принята к печати и ожидается в УМН, во втором или третьем номере 2021 года).

12. William Crawley-Boevey, On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspace and sum zero, Duke Math. J. Volume 118, Number 2 (2003), 339–352.

13. Кочерова А., Ждановский И., Некоторые алгебраические и геометрические аспекты квантовых измерений, (принята к печати, будет опубликована в Трудах Математического Института им. В.А.Стеклова, в 2021 году, 313 томе).

14. C. Psariudakis, Homological theory of recollements of abelian categories, J.of Algebra, ISSN: 0021-8693, Vol: 398, Page: 63-110

15. I. Yu. Zhdanovskiy, Homotopes of finite-dimensional algebras, Communications in Algebra, DOI: 10.1080/00927872.2020.1792918

16. F. Charles, Remarks on the Lefschetz standard conjecture and hyperkähler varieties, Comment. Math. Helv. 88 no.2 (2013), pp. 449–468.

17. V. Gavran, Tangent bundle of the Hilbert square of a K3 surface is rigid, готовится к публикации.

18. M. Verbitsky, Hyperholomorphic bundles over the hyperkähler manifolds, Journ. of Alg. Geom., 5 no. 4 (1996) pp. 633–669.

19. H.-C. Graf v. Bothmer and K. Hulek, Geometric syzygies of elliptic normal curves and their secant varieties, Manuscripta Math. 113 (2004), no. 1, 35–68.

20. S. Bradlow, O. Garcia-Prada, Stable triples, equivariant bundles and dimensional reduction, Math. Ann. 304 (1996), 225–252.

21. V.Gavran, M.Matviichuk, Elliptic Poisson structures on Grassmannians, in preparation.

22. M. Gualtieri, B. Pym, Poisson modules and degeneracy loci, Proc. Lond. Math. Soc., V. 107, Iss. 3, 627–654.

23. А. В. Одесский, Б. Л. Фейгин, Эллиптические алгебры Склянина, Функц. анализ и его прил., 23:3 (1989), 45–54.

24. B.L. Feigin, A.V. Odesskii, Vector bundles on an elliptic curve and Sklyanin algebras, in: B. Feigin,et al. (Eds.), Topics in Quantum Groups and Finite-Type Invariants, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 65–84.

25. A. Polishchuk, Poisson Structures and Birational Morphisms Associated with Bundles on Elliptic Curves, IMRN, 1998 (13), 683–703.

26. F. Magri, A simple model of the integrable Hamiltonian equation, Journal of Mathematical Physics 19, no. 5 (1978): 1156–1162.

27. B. L. Feigin, A. V. Odesskii, Sklyanin's elliptic algebras, Funct. Anal. Appl. 23 (1989), no. 3, 207–214.

28. B. L. Feigin, A. V. Odesskii, Vector bundles on an elliptic curve and Sklyanin algebras, in Topics in quantum groups and finite-type invariants, 65–84, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

29. Z. Hua, A. Polishchuk, Shifted Poisson structures and moduli spaces of complexes, Adv. Math. 338 (2018), 991–1037.

30. A. Odesskii, Bihamiltonian elliptic structures, Mosc. Math. J. 4 (2004), no. 4, 941–946, 982.

31. A. Odesskii, T. Wolf, Compatible quadratic Poisson brackets related to a family of elliptic curves, arXiv:1204.1299.

32. A. Bondal, A. Rosly, Derived categories for complex-analytic manifolds, preprint IPMU11-0117 (Kashiwa, 2011)

2 Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

2.1 Представления групп автоморфизмов

2.1.1 Нётеровость некоторых представлений

В отчетный период, сотрудниками лаборатории обнаружено следующее обобщение теоремы Гильберта о базисе, объединяющие результаты [J.C.McConnell, Localisation in Enveloping Rings, J. London Math. Soc., 43 (1968), 421–428, Theorem 9] и [D.E.Cohen, Closure relations, Buchberger's algorithm, and polynomials in infinitely many variables, Computation theory and logic, Lecture Notes in Comput. Sci., 270 Springer (1987), 78–87, Theorem 7].

Теорема. Пусть $r \geqslant 1$ — целое число, Ψ — множество, S — ассоциативное кольцо с единицей, порождённое над подкольцом с единицей A коммутирующими элементами $x_{i,j} \in S$ для всех индексов $1 \leqslant i \leqslant r$ и $j \in \Psi$. Предположим, что (i) $A + Ax_{i,j} = A + x_{i,j}A$ для всех $1 \leqslant i \leqslant r$ и $j \in \Psi$, (ii) S снабжено таким гладким действием симметрической группы $\mathfrak{S}_\Psi$ множества Ψ, сохраняющим A, что $\sigma x_{i,j} := x_{i,\sigma(j)}$ для всех $\sigma \in \mathfrak{S}_\Psi$. Пусть N — левый $S\langle\mathfrak{S}_\Psi\rangle$-модуль, $M \subseteq N$ — нётеров $A\langle\mathfrak{S}_\Psi\rangle$-подмодуль. Тогда $S\langle\mathfrak{S}_\Psi\rangle$-модуль SM нётеров.

Из этой теоремы выводятся такие результаты.

Теорема. Пусть $\mathfrak{S}_\Psi$ — группа всех перестановок некоторого некоторого множества Ψ, A — снабжённое гладким действием группы $\mathfrak{S}_\Psi$ нётерово слева кольцо, $n \geqslant 1$ — целое число, S — кольцо многочленов над A от переменных x_{ij} для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, $j \in \Psi$. Тогда категория гладких $S\langle\mathfrak{S}_\Psi\rangle$-модулей локально нётерова.

Теорема. Пусть G — группа автоморфизмов некоторого аффинного пространства над конечным расширением простого поля, а A — нётерово слева кольцо, снабжённое действием группы G. Тогда $A\langle G\rangle$-модуль 0-циклов на соответствующем аффинном пространстве с коэффициентами в A нётеров.

2.1.2 Гладкие полулинейные представления симметрических групп

Пусть $\mathfrak{S}_\Psi$ — группа всех перестановок некоторого некоторого множества Ψ, гладко и нетривиально действующая на поле K.

Во всех разобранных ранее примерах полей K (а именно, $k(u, v \mid u, v \in \Psi)$, $k(u/v \mid u, v \in \Psi)$, $k(u - v \mid u, v \in \Psi)$ для любого поля констант k) оказалось, что все неприводимые гладкие полулинейные представления группы $\mathfrak{S}_\Psi$ над K одномерны.

В текущий отчетый перидо, был рассмотрен новый пример, в котором все гладкие неприводимые полулинейные представления симметрической группы $\mathfrak{S}_\Psi$ над K также оказались одномерными:

Теорема. Пусть K — подполе поля рациональных функций $k(u \mid u \in \Psi)$, порождённое над полем констант k элементами $\frac{u-v}{u-w}$ для всех попарно различных $u, v, w \in \Psi$.

Тогда классы изоморфизма неприводимых полулинейных представлений группы $\mathfrak{S}_\Psi$ над K параметризованы целым числом s и имеют вид $K \cdot (v-w)^s \subset k(u \mid u \in \Psi)$, где $v \neq w \in \Psi$.

В случае поля K, порождённого над полем констант нулевой характеристики элементами $x - y$ для всех $x, y \in \Psi$, было известно, что цоколь любого неразложимого гладкого полулинейного представления конечной длины неприводим, а классы изоморфизма таких представлений определяется их длиной. В частности, пространство $\mathrm{Ext}^1(K, K)$ одномерно.

Показано, что

- $\mathrm{Ext}^{\geqslant 2}(-, V) = 0$ для всех V конечной длины, если характеристика нулевая;
- если характеристика $p > 0$, то $\mathrm{Ext}^1(K, K)$ бесконечномерно (например, для всевозможных $s \geqslant 0$ классы расширений $0 \to K \to K + K \cdot x^{p^s} \xrightarrow{a+bx^{p^s} \mapsto b} K \to 0$ независимы).

2.1.3 Гладкие представления и аналоги связности

Также был обнаружен способ описания гладких представлений некоторых вполне несвязных групп в терминах, аналогичных понятию связности. Следующее утверждение — пример этого явления.

Предложение. Пусть группа G порождена открытой компактной подгруппой U и некоторым элементом ξ, k — поле характеристики 0, $K|k$ — такое гладкое расширение G-полей, что действие U точно. Тогда функтор $V \mapsto ((V \otimes_k K)^U, V \subseteq V \otimes_k K = (V \otimes_k K)^U \otimes_{K^U} K)$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{гладкие } k\text{-линейные}\\ \text{представления}\\ \text{группы } G\end{array}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{c}K^U\text{-векторные пространства } W\text{, снабжённые}\\ \text{(i) } \xi\text{-линейным отображением } W \to W \otimes_{K^U} K\\ \text{и (ii) } U\text{- и } \xi\text{- инвариантной } k\text{-решёткой в } W \otimes_{K^U} K\end{array}\right\}$$

вполне строг.

Здесь под *k-решёткой* в K-векторном пространстве Y понимается любое k-векторное подпространство $V \subseteq Y$ такое, что естественное отображение $V \otimes_k K \to Y$ биективно; функтор отображает в категорию, морфизмы в которой являются K^U-линейными отображениями K^U-векторных пространств, K-линейные расширения которых коммутируют с ξ и сохраняют k-решётки.

Среди групп G, удовлетворяющих условиям этого утверждения, — группы рациональных точек общих линейных групп над локальными полями.

2.2 Деформации дг-категорий и функторов

Теория деформаций ассоциативных алгебр была развита Герстенхабером в 1960-е годы [1]. В частности, с ассоциативной алгеброй A связывается комплекс Хохшильда $\mathrm{Hoch}^\bullet(A)$, и его вторые когомологии контролируют инфинитезимальные деформации A. Более того, на сдвинутом на 1 комплексе Хохшильда $\mathrm{Hoch}^\bullet(A)[1]$ имеется структура дифференциальной градуированной (дг) алгебры Ли, скобка в которой называется скобкой Герстенхабера, и настоящие (не инфинитезимальные) деформации A соответствуют решениям уравнения Маурера-Картана $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$ в этой дг алгебре Ли. В современной литературе скобка Ли, или, более общо, другие нелинейные операции на комплексе называются "высшими структурами". Теорема формальности М.Концевича [2] позволяет сводить настоящие деформации к квазиклассическим деформациям, в случае гладких конечномерных (коммутативных) алгебр A. При доказательстве Д.Тамаркина теоремы формальности существенным и технически самым сложным шагом является так называемая гипотеза Делиня, утверждающая что $\mathrm{Hoch}^\bullet(A)$ имеет структуру гомотопической 2-алгебры, для любой ассоциативной алгебры A.

Теория деформаций ассоциативных биалгебр, или алгебр Хопфа, до сих пор является существенно менее разработанной. Соответствующий деформационный комплекс $C^\bullet_{\mathrm{GS}}(B)$ ассоциативной биалгебры B построен Герсенхабером и Шеком, однако высшие структуры на нем до сих пор не построены (по крайней мере, в явном виде). Ожидается, что когда B–алгебра Хопфа, $C^\bullet_{\mathrm{GS}}(B)$ имеет структуру гомотопической 3-алгебры (что является аналогом гипотезы Делиня в этом случае). В отличии от своего классического аналога для $\mathrm{Hoch}^\bullet(A)$, существующие доказательства утверждения близкого к этому используют технику $(\infty, 1)$-категорий и мало пригодны для их применения к доказательству формальности. Цель нескольких недавних работ ассоциированного сотрудника Лаборатории Б. Шойхета, см. [5]–найти удовлетворительный подход (с точки зрения применимости к теории деформаций и теории формальности) к этой задаче.

Во-первых, рассматривалась существенно более общая постановка задачи, теория деформаций моноидальной дг категории, и теория деформаций моноидального дг функтора $F\colon C \to D$, где C, D–моноидальные дг категории. Связь с теорией деформаций биалгебры B такова: категория левых B-модулей над подлежащей ассоциативной алгеброй является моноидальной категорией, с произведением $\Delta^*(M \otimes_k N)$, где $\Delta\colon B \to B \otimes B$ копроизведение в B. Теория Таннаки-Крейна позволяет связать теории деформации ассоциативной биалгебры B и моноидальной $\Bbbk$-линейной категории $\mathrm{Mod}(B)$.

Таким образом, мы интересовались деформационным комплексом $\mathrm{Def}^\bullet(C)$ моноидальной дг категории C и деформационным комплексом $\mathrm{Def}^\bullet(F)$ моноидального дг функтора $F\colon C \to D$. Эти комплексы не были известны ранее, и были построены в нашей работе. Известный ранее комплекс Давыдова-Йеттера имеет тот недостаток что он не учитывает деформации подлежащей к C дг категории (на самом деле, он учитывает только деформации ассоциатора). Комплекс Давыдова-Йеттера, равно как и комплекс Хохшильда $\mathrm{Hoch}^\bullet(A)$, происходит из некоторого косимплициального комплекса и является его тотализацией. Это обстоятельство, в случае комплекса Хохшильда, является ключевым в работах МакКлюра-Смита [3], посвященных доказательству гипотезы Делиня для $\mathrm{Hoch}^\bullet(A)$. Существенно развивая эти идеи, недавно Батанин и Давыдов сумели доказать аналоги гипотезы Делиня для комплекса Давыдова-Йеттера. Ключевым в их работе также является косимплициальная структура, более того, они заметили что комплекс Давыдова-Йеттера является тотализацией косимплициального моноида.

Мы строим $\mathrm{Def}^\bullet(C)$ и $\mathrm{Def}^\bullet(F)$ как тотализации функторов из категории Θ_2 в комплексы векторных пространств над $\Bbbk$. (Такие функторы называются 2-коклеточными комплексами). Категория Θ_2 определяется как двойственная к категории 2-дисков Джояла, хотя есть и более прямые определения через $\wr$-произведение: $\Theta_2 = \Delta \wr \Delta$. Роль категории Θ_2 в высшей теории категорий обусловлена тем фактом что 2-категорный нерв любой строгой 2-категории является функтором $\Theta_2^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$, то есть 2-клеточным множеством. Объекты Θ_2 это двухуровневые деревья. Таким образом, мы фиксируем моноидальный дг функтор $F\colon C \to D$, C, D–моноидальные дг категории, и по эти данным строим комплекс $\mathrm{Def}(F)_T$, для любого 2-уровнего дерева T. После этого $\mathrm{Def}^\bullet(F)$ определяется как тотализация функтора $\Theta_2 \to C^\bullet(\Bbbk)$, $T \mapsto \mathrm{Def}(F)_T$. Комплекс $\mathrm{Def}^\bullet(C)$ определяется как $\mathrm{Def}^\bullet(F)$ для тождественного функтора $F = \mathrm{Id}\colon C \to C$. Мы доказываем что вторые когомологии комплекса $\mathrm{Def}^\bullet(F)$ считают полные инфинитезимальные деформации моноидального дг функтора F.

Естественным обобщением моноидальной категории является бикатегория, при этом моноидальные категории соответствуют бикатегориям с единственным объектом, и псевдофункторы таких категорий–это моноидальные функторы. Наша конструкция 2-коклеточного комплекса $\mathrm{Def}(F)_*$ естественным образом обобщается на случай дг бикатегорий C, D и дг псевдофунктора $F\colon C \to D$. Мы показываем в этом более общем случае что вторые когомологии комплекса $\mathrm{Def}^\bullet(F)$ считают полные инфинитезимальные деформации F.

Наш главный результат–это существование естественной структуры гомотопической 2-алгебры на комплексе $\mathrm{Def}^\bullet(F)$, где $F\colon C \to D$ дг псевдофунктор дг бикатегорий C, D. Основная идея доказательства–воспользоваться определением $\mathrm{Def}^\bullet(F)$ как тотализации 2-коклеточного комплекса, и попытаться заменить Δ в конструкциях МакКлюра-Смита, Батанина-Бергера, Батанина-Давыдова на Θ_2.

С этой целью мы сначала изучаем категорию всех 2-коклеточных комплексов, то есть функторов $\Theta_2 \to C^\bullet(\Bbbk)$, строим на ней два произведения $\square_1, \square_2$, и показываем что эта категория является дуоидальной. В случае категории Δ, существует произведение Батанина $\square$ на категории косимплициальных комплексов. Теория МакКлюра-Смита начинается с утверждения что если косимплициальный комплекс X является моноидом относительно $\square$-произведения, то тотализация X имеет структуру ассоциативной дг алгебры. (Затем вводятся дополнительные условия на "комлексность"X, приводящие к тому что тотализация X имеет структуру гомотопической n-алгебры).

Мы доказываем что построенный по псевдофунктору $F\colon C \to D$ 2-коклеточный комплекс $\mathrm{Def}(F)_*$ является моноидом относительно обоих произведений (другими словами, что он является дуоидом в дуоидальной категории всех 2-коклеточных комплексов). Отсюда мы выводим, обобщая идеи МакКлюра-Смита, что некоторая явно построенная стягиваемая 2-операда действует на тотализации $\mathrm{Def}^\bullet(F)$. Согласно общей теории высших операд Батанина [4], отсюда следует что $\mathrm{Def}^\bullet(F)$ является гомотопической 2-алгеброй.

Случай $F = \mathrm{Id}$ должен приводить к гомотопической 3-алгебре, и это соответствует "комплексности 2"для категории Θ_2 (отметим что теория комплесности для Θ_n, $n \geq 2$, пока не существует).

Список использованных источников

1. M.Gerstenhaber, On the deformation of rings and algebras Ann. of Math. (2) 79 (1964), 59-103

2. M.Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, Lett. Math. Phys. 66 (2003), no. 3, 157-216.

3. J.E.McClure, J.H.Smith, A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture, Recent progress in homotopy theory (Baltimore, MD, 2000), 153-193, Contemp. Math., 293, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

4. M.Batanin, The Eckmann-Hilton argument and higher operads, Adv. Math. 217 (2008), no. 1, 334-385.

5. B.Shoikhet, Tetramodules over a bialgebra form a 2-fold monoidal category, Appl. Categ. Structures 21 (2013), no. 3, 291-309.

2.3 Суперсингулярные обобщенные поверхности Куммера

Также сотрудники лаборатории занимались дзета-функциями суперсингулярных поверхностей Куммера над конечными полями. Поверхность Куммера $K(A)$, ассоциированная с абелевой поверхностью A — это разрешение особенностей фактора A по инволюции $a \mapsto -a$. Если характеристика не равна 2, то $K(A)$ будет поверхностью K3. Дзета-функции таких поверхностей были классифицированы в статье [1]. Нас интересуют дзета-фунции поверхностей над конечным полем, которые изоморфны $K(A)$ над алгебраическим замыканием. Мы используем следующую конструкцию. Пусть характеристика основного поля $p > 5$. Если A — абелева поверхность с действием конечной группы G, которое сохраняет нуль группового закона на A, то по теореме Кацуры фактор A/G будет бирационален поверхности K3, если выполнены следующие условия: действие группы G симплектическое, не имеет неподвижных кривых, и все особые точки фактора рациональны. В этом случае разрешение особенностей A/G называется обобщенной поверхностью Куммера $K(A, G)$. По теореме Огуса, если $K(A, G)$ суперсингулярна, то она изоморфна над алгебраическим замыканием обычной поверхности Куммера ассоциированной с, возможно, какой-то другой суперсингулярной абелевой поверхностью. Возможные группы, которые могут действовать на абелевой поверхности над алгебраически замкнутым полем, и для которых выполняются три условия выше, были описаны Кацурой. При этом остался открытым вопрос, над какими конечными полями такие действия возможны. Для ответа на этот вопрос мы получили классификацию Кацуры другим методом.

А именно, скажем, что действие группы G на абелевом многообразии A жесткое, если представление G в модуле Тейта $T_\ell(A)$ не имеет неподвижных точек, то есть для каждого $g \in G$ порядка r собственные значения g на $T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}$ являются примитивными корнями из единицы степени r. Это условие эквивалентно тому, что при $r > 1$ у действия g на A только конечное число неподвижных точек. В основе нашей классификации лежит следующий результат. Пусть ζ_n обозначает примитивный корень из единицы степени n. Мы будем обозначать символом H_q алгебру кватернионов с центром $\mathbb{Q}$ и нетривиальными инвариантами в простом числе q и в бесконечности. Для вещественного квадратичного расширения K поля $\mathbb{Q}$ мы обозначаем через $H_\infty(K)$ алгебру кватернионов с центром K и нетривиальными инвариантами в бесконечности.

Теорема. Пусть $p > 5$, и пусть A — абелево многообразие над совершенным полем k. Группа G из списка Кацуры жестко действует на абелевом многообразии из класса изогении A, тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм алгебры с делением H_G в алгебру $\mathrm{End}_k(A) \otimes \mathbb{Q}$, где алгебра H_G — это либо $\mathbb{Q}(\zeta_n)$, если G циклическая группа порядка n, либо определяется согласно следующей таблице:

G	BD_2	BD_3	BD_4	BD_5	BD_6
H_G	H_2	H_3	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$

G	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$	$\mathrm{CSU}_2(\mathbb{F}_3)$	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$
H_G	H_2	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$

Эти результаты сводят вопрос существования абелевых поверхностей над конечным полем с действием данной группы к вопросу о вложимости полупростых алгебр над

$\mathbb{Q}$, а эта задача чисто вычислительная. Получив список возможных пар (A, G) можно установить, когда такое действие будет симплектическим и как устроены особенности фактора A/G. Отсюда мы получаем список возможных дзета-функций обобщенных поверхностей Куммера $K(A, G)$.

Список использованных источников

1. S. Rybakov. The finite group subschemes of abelian varieties over finite fields. Finite Fields and Their Applications. 29 (2014), 132-150. arXiv:1006.5959

2.4 Стабильные векторные расслоения

Научный руководитель Лаборатории Ф.А. Богомолов в отчетный период провел несколько исследований, совместно с сотрудниками лаборатории Е. Америк, Н. Курносовым и М. Вербицким, которые подробно описаны ниже, в разделе “Специальные многообразия”.

Кроме того, совместно с Е. Луксен, Ф.А. Богомолов получил ряд результатов о стабильных векторных расслоениях на алгебраических поверхностях, представленных как однопараметрические семейства кривых.

Интерес к этой проблематике основывается на том, что многие, а гипотетически и все алгебраические поверхности доминируются такими поверхностями, которые отвечают однопараметрическим семействам кривых; соответствующая гипотеза была высказана Ф.А. Богомоловым ранее, в совместной работе с Ф. Буонерба, и снабжена мотивирующими примерами. Это позволяет в значительной степени свести изучение общих стабильных расслоений на поверхностях к случаю стабильных расслоений на однопарамерических семействах кривых. Последние, в свою очередь, отвечают одномерным циклам в пространтве модулей стабильных расслоений на кривой, которое довольно хорошо изучено.

В частности, разумно предположить, что первый класс Черна расслоения обращается в ноль (чего часто можно добиться подкруткой на линейное расслоение), после чего главным и единственным топологическим онвариантом, контролирующим стабильности, становится второй класс Черна. Кроме того, ограничение расслоения на каждую кривую в семействе также стабильно, в силу классической общей теоремы Богомолова, и поэтому допускает плоскую связность Нарасимхана-Шешадри. Тем самым, возникает возможность построить хотя уже и не плоскую, но весьма каноническую явную эрмитову связность на расслоении, которая ограничивается до связности связности Нарасимхана-Шешадри на каждой кривой в семействе.

Такая связность Богомоловым и Луксен была в самом деле построена и изучена. В ряде примеров для нее были получены явные выражения, и доказана общаая оценка на ее кривизну. Это дает результат о положительности второго класса Черна изучаемого стабильного расслоения.

Полученный результат опубликован в препринте “Stable vector bundles on the families of curves", arxiv:2010.02839. Он значительно продвигает изучение стабильных векторных расслоений на поверхностях описываемого типа, и, возможно, дает новый подход к теореме Чена-Дональдсона-Суна о K-стабильности.

2.5 Факторизационные гомологии и кратные дзета-значения

В отчетный период, сотрудник лаборатории Н. Маркарян проводил исследования по двум связанным между собой направлениям.

Во-первых, было продолжено исследование возможностей применения факторизационных гомологий к разным областям математики. На этот раз целью исследования стала так называемая формальность Концевича. Эта теорема, доказанная Максимом Концевичем в 1999 году, устанавливает квазиизоморфизм между гомотопическими алгебрами Ли коцепей когомологического комплекса Хохшильда и поливекторных полей. Этот квазиизоморфизм зависит от выбора пропагатора и свобода этого выбора довольно велика. Хотя этот факт отмечен в пионерской статье Максима Концевича, для доказательства формальности там используется конкретный пропагатор. Пропагаторы, изучаемые в работах последователей Максима Концевича отличаются от этого пропагатора несущественно. Было показано, что для доказательства формальности можно использовать факторизационные гомологии. Этот подход эквивалентен выбору в доказательстве формальности других пропагаторов из некоторого семейства. Это семейство пропагаторов геометрического происхождения очень интересно и требует дальнейшего исследования. Некоторые результаты этого исследования изложены в препринте "Weyl n-algebras and the Swiss cheese operad", arXiv:2006.09709.

Во-вторых, был начат проект по исследованию кратных дзета значений. Эти числа привлекали внимание еще Л. Эйлера. В современной математике они играют большое значение, например потому, что являются периодами ходжевой реализации тэйтовых мотивов над $\mathbb{Z}$. Большой интерес представляет описание всевозможных соотношений между кратными дзета значениями. Аналогичная, но мало исследованная задача, это описание соотношений между периодами пространства модулей стабильных кривых рода 0. В препринте "On generalized stuffle relations between cell-zeta values", arXiv:2008.00855 были описаны соотношения на эти периоды, которые влекут двойные шаффл соотношения для кратных дзета значений.

Наибольший интерес представляют соотношения между кратными дзета значениями, которые следуют из соотношений на ассоциатор Дринфельда. Гипотетически, это только регуляризованные двойные шаффл соотношения. В препринте "On algebra of big zeta values", arXiv:2011.04944 введены обобщения кратных дзета значений, которые призваны помочь доказать эту гипотезу. Эти объекты выглядят весьма перспективно и требуют дальнейших исследований.

2.6 Дуализуемые объекты и склейка ∞-категорий

В отчетный период, совместно с A. Mazel-Gee и J.Shah, сотрудником лаборатории Г. Кондыревым было получено удобное описание дуализируемых объектов в склейке моноидальных ∞-категорий. А именно, была доказана следующая

Теорема. Пусть $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{Z}$ лакс моноидальный фукнтор моноидальных ∞-категорий и

$$\mathcal{X} = \lim^{\mathsf{lax}}(\mathcal{U} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Z}) \simeq \mathsf{Ar}(\mathcal{Z}) \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{U}.$$

их склейка вдоль φ (иным словами, категория $\mathcal{X}$ моноидально стратифицирована $\mathcal{U}$ и $\mathcal{X}$). Тогда для объекта $x = [u, z \xrightarrow{\alpha} \varphi(u)] \in \mathcal{X}$ следующие условия эквиваленты:

– Объект $x \in \mathcal{X}$ дуализируем справа;

– Объекты u, z дуализируемы справа, и для любого $w \in \mathcal{U}$ отображение

$$z \otimes \varphi(w) \xrightarrow{\alpha} \varphi(u) \otimes \varphi(w) \xrightarrow{\mathsf{can}} \varphi(u \otimes w)$$

в $\mathcal{Z}$ эквивалентность;

– Объекты u, z дуализиуремы справа, и отображения

$$\gamma : z \otimes \varphi(1_{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\alpha} \varphi(u) \otimes \varphi(1_{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\mathsf{can}} \varphi(u)$$

$$g : z \otimes \varphi(u^{\vee}) \xrightarrow{\alpha} \varphi(u) \otimes \varphi(u^{\vee}) \xrightarrow{\mathsf{can}} \varphi(u \otimes u^{\vee})$$

в $\mathcal{Z}$- эквивалентности.

Более того, если объект $x \in \mathcal{X}$ дуализируем справа, то его правый двойственный $x^{\vee}$ это $[u^{\vee}, z^{\vee} \xrightarrow{\beta} \varphi(u^{\vee})]$, где отображение β получено из композиции $1 \xrightarrow{\mathsf{can}} \varphi(1) \xrightarrow{\varphi(\eta)} \varphi(u \otimes u^{\vee}) \simeq z \otimes \varphi(u^{\vee})$.

Теорема выше была так же обобщена для более сложных моноидальных стратификаций, что позволяет эффективно анализировать дуализируемые объекты в G-спектрах, квазикогерентых пучках на склейках схем, категориях возникающих в хроматической теории гомотопий.

Использую теорему выше, была так же описана универсальная стратифицированная ∞-категория с дуализируемым объектом:

Теорема. Пусть $\mathcal{X}$- это склейка моноидальных ∞-категорий $\mathcal{U}, \mathcal{Z}$ вдоль лакс моноидального функтора $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{Z}$. Тогда пространство коммутативных диаграмм

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Bord} \arrow[r, "\mathsf{Id}_{\mathsf{Bord}}{,}\mathsf{const}_*"] \arrow[d, dashed] & \mathsf{Bord} \times \mathsf{Fin} \arrow[d, dashed] \\
\mathcal{U} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{Z}
\end{tikzcd}$$

в которых вертикальные функторы моноидальны, за Fin обозначена (∞)-категория конечных множеств, а Bord- это ∞-категория замкнутых фреймованных 0-мерные многообразий и компактных фреймованных бордизмов, эквивалентна пространству дуализируемых объектов в $\mathcal{X}$.

Кроме того, совместно с R. Haugseng и A. Prikhodko, Г. Кондыревоым была развита теория обогащенных ∞-категорий. А именно, были определены понятия (ко)конца и взвешенного (ко)предела для обогащенных ∞-категорий, изучено пополнение обогащенных ∞-категорий относительно множества диаграмм с весами, доказаны фундаментальные теоремы о представимости, сопряженном функторе и локализации обогащенных ∞-категорий. Была развита теория обогащенных доктрин, и в ее рамках была построена теория представимых обогащенных ∞-категорий относительно (разумной) доктрины, а так же базовые теоремы для таких категорий.

2.7 Теория Черна-Вейля в положительной характеристике

Пусть X гладкое многообразие над произвольным полем и E векторное расслоение на X. Если базовое поле это поле комплексных чисел, то теория Черна-Вейля позволяет явно написать формулы для выражения классов Черна E в когомологиях Ходжа используя следы степеней класса Атии, где класс Атии соответствует препятствию к существованию глобальной голоморфной связности. При этом эти формулы не имеют смысла в положительной характеристике в связи с возникающими знаменателями.

Используя средства производной алгебраической геометрии, стажером лаборатории Г. Терентюком была построена конструкция характеристического многочлена, которая сопоставляет совершенному комплексу M, локально свободному пучку L и морфизму $A : M \to M \otimes L[1]$ классы в когомологиях $H^i(X, \Lambda^i L)$. Было доказано, что если применить эту конструкцию к случаю, когда в роли совершенного комплекса выступает расслоение E, в роли локально свободного пучка пучок дифференциальных 1-форм, а в роли морфизма A класс Атии, то получатся классы Черна E в когомологиях Ходжа.

Также, используя препятствие к подъёму F^*E до кристалла по модулю p^2, где F - отображение Фробениуса, с помощью аналогичной техники характеристического многочлена Г. Терентюком были построены классы в чётных когомологиях де Рама и было показано, что k-ый построенный класс получается из k-го класса Черна E умножением на $k!$.

2.8 Категорификация, шоберы и 2-теория Морса

В течение этого года, стажером лаборатории Л. Сухановым были опубликованы результаты исследований теории 2-Морса, (2-Morse theory and algebra of the infrared, Geometry and Physics). Теория 2-Морса изучает комбинаторику орбит пары градиентноподобных коммутирующих векторных полей v_1, v_2 на гладком многообразии M. Выясняется, что такой набор данных генерирует на множестве совместных нулей v_1, v_2

структуру инфракрасной алгебры, изученную Гайотто, Муром и Виттеном (в работе Algebra of the infared) в совершенно другом геометрическом контексте. В работе Гайотто, Мура и Виттена строится некая A_∞ алгебра и элемент Маурера-Картана в ней, описывающий категорию Фукаи-Зайделя комплексного многообразия X, снабженного голоморфным потенциалом W. Выдвинута гипотеза о том, что формально аналогичная конструкция в рамках теории 2-Морса будет описывать категорию траекторий первого векторного поля (dg-категорию, объектами которой являются нули поля v_1, а морфизмами - полиэдральные цепи пространства идущих между критическими точками i и j траекторий поля v_1). Таким образом, в рамках этой гипотезы теория 2-Морса дает комбинаторную моделью пространств траекторий поля v_1 при помощи действия на них коммутирующего поля v_2 (сходную с обычной теорией Морса).

Также продолжены исследования шоберов - категорификации понятия извращенного пучка и его связи с инфракрасной алгеброй. Результаты исследований, совместных с М.Капрановым и Я.Сойбельманом, опубликованы в препринте “Perverse schobers and the Algebra of the Infrared”, arXiv:2011.00845. Шобер это “извращенный пучок категорий”, и хотя его общее определение пока что неясно, в тех ситуациях, когда извращенные пучки допускают хорошее колчанное описание, это описание обычно поддаётся категорификации. В частности, изучались шоберы на римановых поверхностях - они описываются следующим образом: пускай дана поверхность S с отмеченными точками $p_1, \cdots, p_n$. Тогда шобером называется локальная система Ψ (претриангулированных) dg-категорий над $S \setminus \{p_1, \cdots, p_n\}$, и набор локальных систем Φ_i над сферизациями касательного расслоения в точках p_i, снабженных сферическими функторами $a : \Phi_i \longrightarrow \Psi$, $a^* : \Psi \longrightarrow \Phi_i$ (для какого-нибудь ростка кривой, выходящего из точек p_i, с соответствующими данными согласования). Никаких высших условий когерентности на такое данное не накладывается. Данная конструкция допускает явную комбинаторную интерпретацию для шобера на диске: он может быть (после фиксации системы разрезов) задан как категория Ψ и набор категорий $\Phi_1, \cdots, \Phi_n$, снабженных сферическими функторами $a_i : \Phi_i \longrightarrow \Psi$, без каких-либо условий согласования между ними, что является прямым аналогом описания категории извращенных пучков на диске Гельфанда-Макферсона-Вилонена. Вводится аналог функтора глобальных сечений, который строит по этим данным категорию Γ, обладающую полуортогональным разложением $\Phi_1, \cdots \Phi_n$. В случае, когда шобер происходит из семейства категорий Фукаи над $\mathbb{C}$, задаваемого голоморфным потенциалом W на многообразии X, данная конструкция восстанавливает глобальную категорию Фукаи-Зайделя (X, W) (давая, таким образом, ещё одно комбинаторное описание категории Фукаи-Зайделя, конкурирующее с гипотетическим описанием из инфракрасной алгебры). Изучается подход к инфракрасной алгебре в рамках теории шоберов - в частности, выпуклая геометрия, фигурирующая в инфракрасной алгебре получает объяснение в рамках категорного аналога преобразования Фурье-Сато для извращенного пучка. Из теории шоберов может быть получен “инфракрасный комплекс”, являющийся базовым строительным блоком инфракрасной монады, однако сам процесс построения инфракрасной монады пока что является гипотетическим - хотя и предполагается, что его можно получить напрямую из понятия шобера, ожидается что это станет намного легче после построения более регулярной теории самих шоберов, включающей высшие данные когерентности с самого начала.

Также продолжались исследования комплексных поверхностей, имеющих неколлапсируемый, но стягиваемый дуальный комплекс SNC-вырождения. Доказательства основных фактов, опубликованных в препринте “Non-Collapsible Dual Complexes and Fake del Pezzo Surfaces” были значительно упрощены. Эти результаты находятся в стадии подготовки к публикации. Кратко опишем здесь конструкцию. Строится вырожденная SNC-поверхность с рациональными компонентами и рациональными компонентами локуса особенностей, дуальный комплекс которой стягиваем, но неколлапсируем - в данной работе это известный в геометрической топологии “шутовской колпак”. Далее, методами теории деформаций доказывается возможность сгладить данную поверхность (где и лежит основная техническая трудность результата и основное, пока неопубликованное упрощение). Данное сглаживание (его общий слой) будет автоматически являться нерациональной поверхностью с $h^{1,0} = h^{2,0} = 0$, $h^{1,1} = 9$. Высказывается гипотеза, что эта поверхность лежит в деформационном классе поверхности Барлоу. Данный пример отвечает на вопрос из работы Коллара, Ксу и де Ферне о существовании вырождений со стягиваемым, но неколлапсируемым комплексом (отметим, что в этой работе доказывается, что для рациональной поверхности такой комплекс был бы с необходимостью коллапсируем). Отметим также возможность получения других, аналогичных примеров при помощи SNC-разрешения примеров сглаживаний с $p_g = 0$, построенных корейской школой (Кеум, Ли).

2.9 Полутопологическая K-теория

Комлекс де Рама гладкого собственного многообразия над полем комплексных чисел обладает несколькими дополнительными структурами, такими, например, как Ходжева (aka “глупая”) фильтрация, позволяющая определить спектральную последовательность Ходжа-де Рама (она же Фрелихера), вырождающуюся на первом листе, и рациональная структура, приходящая из отождествления когомологий Бетти с (алгебраическими) когомологиями де Рама $\mathrm{H}_B(X, \mathbb{Q}) \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathrm{H}^{\mathrm{an}}_{dR}(X/\mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}_{dR}(X/\mathbb{C})$. Некоммутативная алгебраическая геометрия рассматривает k-dg-категории (иногда с некоторыми дополнительными предположениями) как некоммутативный аналог схем над k. Этот подход оказывается удивительно плодотворным: для dg-категорий можно определить аналоги многих свойств и инвариантов схем, таких как, например, гладкость, собственность, когомологии Ходжа и де Рама; соответствие между коммутативным и некоммутативным миром задается функтором, сопоставляющим схеме X/k k-dg-категорию совершенных комплексов на X $\mathrm{Perf}(X)$.

Последние два инварианта представлены в некоммутативном сеттинге гомологиями Хохшильда и периодическими циклическими гомологиями, которые приходят вместе со спектральной последовательностью Ходжа-де Рама, которая вырождается для гладких собственных dg-категорий в характеристике 0. В статье 2008 года, Л. Кацарков, М. Концевич и Т. Пантев формулируют ряд гипотез о структурах типа Ходжа на некоммутативных схемах над комплексными числами, например, гипотезу о существовании рациональной структуры на периодических циклических гомологиях, то есть функтора $F : dgCat_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{Q} - Mod$ вместе с естественным преобразованием $F \to \mathrm{HP}(\cdot/\mathbb{C})$, таким что для гладкой собственной $\mathbb{C}$-dg-категории T индуцированный морфизм $F(T) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \to \mathrm{HP}(T/\mathbb{C})$ – эквивалентность, то есть квазиизоморфизм.

В отчетный период, стажером лаборатории Андреем Коноваловым были изучены свойства топологической и полутопологической K-теории dg-категорий, определенных Э. Бланком. Рационализированная топологическая K-теория – естественный кандидат на роль рациональной структуры на периодических гомологиях.

Топологическая K-теория dg-категории T строится в два шага. На первом применяется функтор реализации – то есть берется некоторый копредел алгебраических K-теорий подкруток T при помощи $\mathbb{C}$-алгебр конечного типа. Получается инвариант (спектр), который, например, в коммутативном случае $T = \mathrm{Perf}(X)$ более тонкий, чем топологическая K-теория пространства комплексных точек X, но более понятный и поддающийся вычислению, чем алгебраическая K-теория X. На втором шаге на спектре полутопологической K-теории обращается действие т.н. элемента Ботта – получающийся инвариант естественно называть топологической K-теорией: например, в случае $T = \mathrm{Perf}(X)$ восстанавливается классическая топологическая K-теория пространства комплексных точек.

Было показано, что полутопологическая, а значит, и топологическая K-теория dg-категорий вида $T = \mathrm{Perf}(B)$ для связной dg-алгебры B (или, равносильно, K-теория самой B, рассмотренной как dg-категория с одним объектом) производно нильинвариантна, то есть отображения связных dg-алгебр $B_1 \to B_2$ такие, что на $\pi_0 = H_0$ они факторизации по нильпотентному идеалу, индуцируют эквивалентность на соответствующих K-теориях. Для доказательства было изучено поведение гомологий Хохшильда и циклических гомологий при аналогичных процедурах реализации.

С помощью этого результата удается значительно продвинуться в понимании топологической K-теории dg-категорий и в частности доказать гипотезу о рациональной структуре в ряде случаев, собранных в теореме ниже. Также результат о нильинваваринтности, например, позволяет получить cdh-спуск полутопологической K-теории при ограничении на квазикомпактные квазиотделимые схемы.

Теорема. Пусть T – $\mathbb{C}$-dg-категория, которая Морита-эквивалентна одной из следующих: a) $T = \mathrm{Perf}(B)$, где B – связная dg-алгебра, такая что $\mathrm{H}_0(B)$ – нильпотентное расширение коммутативной $\mathbb{C}$-алгебры конечного типа (в частности, сюда входят связные собственные dg-алгебры; b) $T = \mathrm{Perf}(C_*(\Omega M), \mathbb{C})$, где M – многообразие, такое что $\pi_1 M$ гиперболическая группа (или такая, что для нее выполнены гипотезы Burghelea и Фаррелла-Джонса); c) $T = \mathrm{Perf}(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – производная $\mathbb{C}$-схема, такая что ее классическое обрезание – отделимая схема конечного типа.

Тогда комплексификация топологического характера Черна

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C}} : \mathrm{K}^{\mathrm{top}}(T) \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{HP}(T/\mathbb{C})$$

– эквивалентность.

Пункт b) теоремы выше связан с многими вопросами об алгебраической K-теории и вопросами теории групп. Мы ожидаем, что условие гиперболичности можно значительно ослабить. Также вместо ∞-категории локальных систем на M, можно рассматривать правильно определенные категории конструктивных пучков. Они, и ∞-категории локальных систем в частности, появляются как определенные wrapped категории Фукая при изучении гомологеской зеркальной симметрии. Мы ожидаем, что для конструктивных пучков можно получить результаты в духе теоремы выше; также было бы интересно узнать их геометрическую интерпретацию.

2.10 Некоммутативные кристальные когомологии

Кристальные когомологии – это придуманное Гротендиком обобщение когомологий де Рама, который позволяет сопоставить алгебраическому многообразию над совершенным полем конечной характеристики группы когомологии с коэффициентами в кольце характеристики ноль (а именно, в кольце его векторов Витта). Наряду с этальными когомологиями, они позволяют доказать гипотезы Вейля о дзета-функции, построить полоценный формализм весов и весовой фильтрации, и доказать массу алгебро-геометрических результатов. Однако в отличие от этальных когомологий, кристальные когомологии основаны на когомологиях де Рама, которые, как известно с начала 1980-х годов, существуют в значительно большей общности – а именно, имеюстя периодические циклические гомологии, которые дают полное обобщение когомологий де Рама в некоммутативную ситуацию (т.е. для дифференциально-градуированных алгебр).

В связи с этим, можно надеятся, что кристальые когомологии также допускают некоммутативное обобщение, и такое обобщение действительно было построено, причем как минимум двумя разными способами. Во-первых, такое обобщение дается так называемыми "гомологиями Хохшильда-Витта", открытыми некоторое время назад заведующим лабораторией Д. Калединым. Во-вторых, имеется более прямая недавняя конструкция В. Вологодского и А. Петрова, которая, хотя и дает чуть меньше (в частности, не дает действия Фробениуса и прочих структур мотивного типа), однако работает сразу для дифференциально-градуриванных алгебр, и весьма естественно.

Двумя словами конструкцию Вологодского-Петрова можно сформулировать так. Пусть дана дифференциально-градуированная алгебра $A_\bullet$ над совершенным полен k положительной характеристики p. Тогда сперва рассматриваем периодические циклические гомологии $HP_\bullet(A_\bullet/W(k))$ алгебры $A_\bullet$, понимаемой как дг-алгебра над кольцом $W(k)$ векоторов Витта. Эти группы неправильные, они слишком велики. Однако правильные некоммутативные кристальные когомологии выделяются в комплексе

$HP_\bullet(A_\bullet/W(k))$ как каноническое прямое слагаемое. При этом критическое место в конструкции это ситуация для точки, т.е. вычисление $HP_\bullet(k/W(k))$. Вологодский и Петров доказывают, что очевидное отображение $HP_\bullet(W(k)/W(k)) \to HP_\bullet(k/W(k))$ допускает каноническое расщепление, т.е. является вложением на прямое слагаемое.

К сожалению, явной конструкции такого расщепления Вологодский и Петров не приводят, а ограничиваются довольно неявной теоремой существования. Это существенно затрудняет работу с их конструкцией и доказательство для нее теорем сравнения (например, с гомологиями Хохшильда-Витта).

В текущий отчетный период, заведующий лабораторией Д. Каледин исследовал конскртукцию рассщепления Вологодского-Петрова, и получил его явное описание в терминах циклических обьектов.

А именно, очевидное отображение, которое нам надо расщепить, задается отображением $W(k) \to (k/W(k))_\sharp$, где $W(k)$ – постоянный циклический обьект со значением $W(k)$, а $(k/W(k))_\sharp$ – циклический обьект, отвечающий k, которое рассмотрено как дг-алгебра над $W(k)$ (тем самым, значение $(k/W(k))_\sharp([n])$ на обьекте $[n] \in \Lambda$ есть n-кратное производное тензорное произведение $k \overset{\mathsf{L}}{\otimes}_{W(k)} k \overset{\mathsf{L}}{\otimes}_{W(k)} \dots \overset{\mathsf{L}}{\otimes}_{W(k)} k$, и в частности, имеет нетривиальные высшие группы гомологий при $n \geq 2$). Обратного отображения $(k/W(k))_\sharp \to W(k)$ не существует по очевидным причинам, однако есть надежда построить отображение $(k/W(k))_\sharp \to K_\bullet$ в какой-нибудь циклический комплекс $K_\bullet$ такой, что индуцированное отображение $HP_\bullet(W(k)) \to HP_\bullet(K_\bullet)$ является изоморфизмом.

Именно это и удалось сделать Каледину, причем в качестве $K_\bullet$, как выяснилось, можно взйать комплекс, хорошо известный в теории циклических гомологий в положительной характеристике. А именно, рассмотрим p-кратное накрытие Λ_p категории Λ. Тогда имеем бирасслоение Гротендика $\pi : \Lambda_p \to \Lambda$, слой которого – группоид с одним обьектом и группой автоморфизмов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, и можно взять относительный тэйтовский прямой образ $\pi^\flat W(k)$ постоянного p-циклического обьекта $W(k)$. Тогда комплекс $K_\bullet$ – его каноническое обрезание в нуле по отношению к стандартной t-структуре (известное также как connective cover). Это комплекс, у которого нечетных гомологий нет, а четные все равны постоянному циклическому обьекту k, но при этом $HP_\bullet(K_\bullet)$ совпадает с $HP_\bullet(W(k))$ (т.е. обращается в 0 в нечетных степенях, и изоморфно $W(k)$ в четных).

Отметим, что довольно важное свойство расщепления Вологодского-Петрова – это что оно является отображением E_∞-алгебр; строго говоря, в самом конструкции некоммутативных кристальных когомологий это не используется, но критически важно, например, для формулы Кюннета и отображения внщнего умножения. В модели Каледина это свойство хорошо видно, т.к. комплекс $K_\bullet$ естественно наделяется структурой алгебры в категории циклических комплексов (на самом деле, даже коммутативной алгебры). Однако, что явилось полной неожиданностью и некоторым открытием, эта структура вовсе не та, которую можно ыло бы ожидать. А именно, это не стандартное умножение на когомологиях Тэйта, которое дало бы алгебру $k[u]$ полиномов от одной образующей u степени 2; напротив, в ответе получается алгебра $k\{u\}$ полиномов с разделенными степенями (в частности, $u^p = 0$). Это совершенно новое обнаруженное нами обстоятельство в настоящее время является обьектом самого внимательного изучения.

3 Геометрическая теория представлений

3.1 Полиномиально подобные отображения

Препринт [1] обобщает понятие полиномиально подобного отображения. Пусть $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — полиномиальное отображение степени d. Обозначим через K_P заполненное множество Жюлиа многочлена P, то есть множество точек, орбиты которых при действии многочлена P не убегают на бесконечность. Будем предполагать, что K_P связно. Напомним, что внешние лучи для P определяются как координатные линии постоянного аргумента в той полярной системе координат на $\mathbb{C} \setminus K_P$, в которой отображение P возводит модуль в степень d и умножает аргумент на d. Разрезом называется объединение $\Gamma = R \cup L \cup \{a\}$, в котором a — периодическая точка многочлена P, а R и L — внешние лучи, заканчивающиеся в этой точке. Точка a называется корневой точкой разреза Γ. Если $R = L$, то разрез называется вырожденным, а иначе невырожденным. Известно, что невырожденные разрезы разделяют множество K_P. Конечное множество разрезов $\mathcal{Z}$ называется допустимым, если $P(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$, и при этом все разрезы из $\mathcal{Z}$ лежат на границе одной и той же компоненты дополнения до $\bigcup \mathcal{Z}$. Последняя компонента называется главной компонентой. Определим множество $A_P(\mathcal{Z})$ (avoiding set) как множество точек, орбиты которых не выходят из замыкания главной компоненты.

По определению, $\Gamma \cap K_P \subset A_P(\mathcal{Z})$ для каждого $\Gamma \in \mathcal{Z}$. Формально говоря, множество $A_P(\mathcal{Z})$ определено и в том случае, когда $\mathcal{Z} = \varnothing$. В этом случае имеем $A_P(\varnothing) = K_P$. Во всех остальных случаях $A_P(\mathcal{Z})$ является собственным подмножеством в K_P. Корневая точка a разреза $\Gamma \in \mathcal{Z}$ называется наружно параболической, если a — параболическая периодическая точка, и некоторая компонента Фату из $K_P \setminus A_P(\mathcal{Z})$ содержит притягивающий лепесток точки a. Через $\mathrm{Rt}_{\mathcal{Z}}$ обозначается множество всех корневых точек всех разрезов из $\mathcal{Z}$. Следующая теорема является следствием классической теории полиномиально подобных отображений Дуади–Хаббарда.

Известная теорема. Пусть $\mathcal{Z}$ допустимо, и предположим, что $A_P(\mathcal{Z})$ связно. Если в $\mathrm{Rt}_{\mathcal{Z}}$ нет ни критических, ни наружно параболических точек, то найдутся жордановы области $U \Subset V$, такие, что отображение $P : U \to V$ полиномиально подобно, и $A_P(\mathcal{Z})$ является заполненным множеством Жюлиа этого полиномиально подобного отображения. В частности, $P|_{A_P(\mathcal{Z})}$ гибридно эквивалентно ограничению $Q|_{K_Q}$ некоторого многочлена Q степени $< d$.

Основным результатом препринта [1] является следующее обобщение сформулированной выше теоремы, которое позволяет существенно ослабить предположения, лишь незначительно ослабив заключение.

Новая теорема. Рассмотрим допустимый набор разрезов $\mathcal{Z}$. Допустим, что множество $A_P(\mathcal{Z})$ связно, всякая критическая точка из $\mathrm{Rt}_{\mathcal{Z}}$ рано или поздно отображается в отталкивающую периодическую орбиту, и ни одна точка множества $\mathrm{Rt}_{\mathcal{Z}}$ не является наружно параболической. Если $P|_{A_P(\mathcal{Z})}$ не инъективно, то $P|_{A_P(\mathcal{Z})}$ квазисимметрично сопряжено с $Q|_{K_Q}$ для некоторого многочлена Q степени $< d$. Более того, сопряжение можно сделать конформным во внутренности множества $A_P(\mathcal{Z})$.

Квазисимметричное сопряжение — это, в частности, топологическое сопряжение. В том случае, когда имеются наружно параболические точки, квазисимметричного сопряжения получить нельзя. Однако, возможно, все равно существует топологическое сопряжение. Возможно, его удастся построить в классе отображений Давида.

За отчетный период были опубликованы статьи [2, 3].

3.2 Комбинаторная интерпретация двойных многочленов Шуберта типов B, C и D

Многочлены Шуберта — это семейство многочленов $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ с целыми коэффициентами от счетного числа переменных, где $w \in S_\infty$ — множество финитных перестановок, определяющееся свойством

$$\partial_i \mathfrak{S}_w = \begin{cases} \mathfrak{S}_{ws_i}, & \ell(ws_i) < \ell(w), \\ 0, & \ell(ws_i) > \ell(w), \end{cases}$$

где $\ell(w)$ — длина перестановки w, а $\partial_i f = \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}$ — это i-й оператор разделенной разности.

Эти многочлены были определены в работах И.Н.Бернштейна, И.М.Гельфанда и С.И.Гельфанда [4] и А.Ласку и М.-П.Шютценберже [9] на рубеже 1970-х и 80-х гг. и с тех пор являются объектами постоянного интереса как геометров, так и специалистов по алгебраической комбинаторике. Они представляют классы соответствующих многообразий Шуберта $[X_w] \in H^*(\mathrm{GL}(n)/B)$ в кольце когомологий многообразия полных флагов в $\mathbb{C}^n$ при эпиморфизме Бореля $R \to H^*(\mathrm{GL}(n)/B)$. Также можно определить двойные многочлены Шуберта от двух наборов переменных $x_1, x_2, \dots$ и $y_1, y_2, \dots$, представляющие классы $[X_w]$ в кольце T-эквивариантных когомологий $H^*_T(\mathrm{GL}(n)/B)$.

Многочлены Шуберта обладают многими замечательными комбинаторными свойствами. Так, например, они образуют базис кольца $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$. Так, например, их коэффициенты неотрицательны, и им можно придать комбинаторный смысл: они нумеруются так называемыми rc-графами, или pipe dreams, которые можно рассматривать как обобщение понятия таблиц Юнга для многочленов Шура (см., например, [7]).

Представляет интерес обобщение данных результатов на случай многообразий флагов других классических групп. С. В. Фомину и А. Н. Кириллову [6] принадлежит несколько (различных) чисто комбинаторных описаний многочленов Шуберта в типе B. В работе С. Билли и М. Хаймана [5] представлена единообразная конструкция многочленов Шуберта, аналогичная описанной выше конструкции с операторами разделенных разностей, и показано, что такие многочлены представляют классы многообразий Шуберта в когомологиях многообразий флагов G/B, где G — редуктивная алгебраическая группа типа B, C или D. Эти многочлены являются элементами кольца $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, p_1, p_3, p_5, \dots]$, где $p_k = x_1^k + x_2^k + \dots$ — ньютоновские степенные суммы (многочлены Шуберта зависят лишь от ньютоновских степенных сумм нечетной степени). Далее, Т. Икеда, Л. Михалча и Х. Нарусэ [8] определили двойные многочлены Шуберта в данных типах, представляющие T-эквивариантные классы когомологий $[X_w] \in H_T^*(G/B)$, где T — максимальный тор в $B \subset G$. Их специализация при $t_i = 0$ дает многочлены Шуберта, определенные Билли и Хайманом.

В совместной работе Е. Ю. Смирнова и А. А. Тутубалиной [10] было получено комбинаторное описание обычных и двойных многочленов Шуберта для многообразий флагов типов B, C и D. Предложена конструкция, обобщающая конструкцию rc-графов и позволяющая придать коэффициентам этих многочленов комбинаторный смысл (откуда, в частности, получается новое доказательство их неотрицательности). В терминах этой конструкции также получается естественная интерпретация выражения многочленов Шуберта через функции Стенли, см. [5].

Далее, для групп Вейля типа B, C и D можно выделить класс перестановок, аналогичных грассмановым. Для них известно, что соответствующий многочлен Шуберта является P- или Q-симметрической функцией Шура (эти функции возникают в теории представлений как характеры симплектической и ортогональной группы). P- и Q-функции Шура могут быть проинтерпретированы в терминах заполнений сдвинутых диаграмм Юнга. Мы строим биекцию между такими заполнениями и rc-графами для соответствующих групп, что дает комбинаторное доказательство того, что многочлены Шуберта типов B, C и D грассмановых перестановок равны P- и Q-функциям Шура.

3.3 Кольцо Пухликова-Хованского многогранника Гизина

Кольцо Пухликова–Хованского выпуклого многогранника изначально было построено в работе [13] как функториальное описание кольца когомологий (или кольца Чжоу) гладкого проективного торического многообразия через многочлен объёма его многогранника Ньютона. Позднее это кольцо использовалось и в случае неторических многообразий, таких как многообразия флагов и другие сферические многоообразия (см. например, [12, 16, 11]).

В [14] мы используем кольцо Пухликова–Хованского как инструмент для явного описания многогранников Ньютона–Окунькова многообразий Ботта-Самельсона. По башне многообразий Ботта-Самельсона

$$\{\mathrm{pt}\} = R_\varnothing \leftarrow R_{(i_1)} \leftarrow R_{(i_1,i_2)} \leftarrow \ldots \leftarrow R_{(i_1,i_2,\ldots,i_{\ell-1})} \leftarrow R_I.$$

мы строим башню многогранников

$$\{p\} = P_\varnothing \leftarrow P_{(i_1)} \leftarrow P_{(i_1,i_2)} \leftarrow \ldots \leftarrow P_{(i_1,i_2,\ldots,i_{\ell-1})} \leftarrow P_I$$

с помощью выпукло геометрических операторов Гизина, анонсированных в [15] и построенных в [14, Section 3] в большей общности. В качестве частного случая этой конструкции в типе A получаются многогранники Винберга–Литтельманна-Фейгина–Фурье.

Ключевой ингредиент, позволяющий доказать, что построенные многогранники действительно являются многогранниками Ньютона–Окунькова многообразий Ботта–Самельсона — это теорема, связывающая многочлены объёма и кольца Пухликова–Хованского данного многогранника P и многогранника Δ, полученного из P с помощью выпукло геометрического оператора Гизина. В общем случае конструкция оператора Гизина зависит от выбора многогранника P_Q аналогичного многограннику P (то есть с тем же нормальным веером) и набора $\mathcal{F}$ граней коразмерности два в P. В [14, Section 4] мы доказываем такую теорему о связи колец Пухликова–Хованского R_P и R_Δ многогранников P и Δ, соответственно.

Теорема: Предположим, что существует однородный элемент $D_\mathcal{F} \in R_P$ степени два, такой что $D_\mathcal{F}(\mathrm{vol}_P) = \mathrm{vol}_\mathcal{F}$. Если $D_\mathcal{F}^2 = (\partial_{P_Q - P})D_\mathcal{F} = 0$, то имеется изоморфизм колец

$$R_\Delta \simeq R_P[x]/(x^2 - c_1x + c_2),$$

где c_1 и c_2 — это однородные элементы кольца R_P степеней один и два, соответственно. (Эти элементы можно воспринимать как аналоги классов векторного расслоения ранга 2.) "Классы Черна" c_1 и c_2 можно явно вычислить по P, P_Q и $\mathcal{F}$ таким образом:

$$c_1 = \partial_{P_Q} - \partial_P, \quad c_2 = c(P)D_\mathcal{F}.$$

Последовательные применения теоремы позволяют без громоздких вычислений объёмов установить изоморфизм между кольцом Пухликова–Хованского многогранника P_I и кольцом когомологий (или кольцом Чжоу) многообразия Ботта–Самельсона R_I. Именно это нужно для доказательства, что R_I совпадает с многогранником Ньютона–Окунькова.

В качестве следствия из доказательства теоремы мы также получили следующее описание многочлена объёма vol_Δ многогранника Гизина Δ. Многочлен объёма vol_Δ является решением дифференциального уравнения:

$$F'' - (\partial_{P_Q} - \partial_P)F' + c(P)D_\mathcal{F}F = 0,$$

где неизвестная функция F — это функция от двух переменных $s \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ (здесь n определяется по P), а F' — её производная по s.

3.4 Грассманниан Дринфельда-Гайцгори-Винберга и геометрическое соответствие Сатаке

3.4.1

Обозначим $\Lambda = \bigoplus_n \Lambda^n$ кольцо симметрических функций, снабжённых базисом функций Шура s_λ. Оно также снабжено естественным коумножением. Классическое исчисление Шуберта — это базированный изоморфизм биалгебры Λ с кольцом когомологий $H^\bullet(\mathrm{Gr}, \mathbb{Z})$ (удваивающий степени), переводящий s_λ в фундаментальный класс соответствующего многообразия Шуберта σ_λ. Здесь Gr обозначает бесконечный Грассманниан $\mathrm{Gr} = \varinjlim \mathrm{Gr}(k,m) \simeq BU(\infty)$, а коумножение на $H^\bullet(\mathrm{Gr},\mathbb{Z})$ происходит из структуры H-пространства на классифицирующем пространстве $BU(\infty)$.

Вот более алгебро-геометрическая конструкция коумножения на $H^\bullet(\mathrm{Gr},\mathbb{Z})$. Имеем $H^{2n}(\mathrm{Gr},\mathbb{Z}) = H^{2n}(\overline{\mathrm{Sch}}_n,\mathbb{Z}) = H^{2n}_c(\overline{\mathrm{Sch}}_n,\mathbb{Z}) = H^{2n}_c(\mathrm{Sch}_n,\mathbb{Z})$, где $\mathrm{Sch}_n \subset \mathrm{Gr}$ (соотв. $\overline{\mathrm{Sch}}_n \subset \mathrm{Gr}$) обозначает объединение всех n-мерных (соотв. $\leq n$-мерных) клеток Шуберта (относительно некоторого фиксированного флага).

Напомним определение фазового пространства интегрируемой системы Калоджеро-Мозера $\mathcal{C}_n$: это пространство пар $n\times n$-матриц (X,Y), таких что $[X,Y]+\mathrm{Id}$ имеет ранг 1, отфакторизованное по одновременному сопряжению X,Y. Интегрируемая система $\pi_n\colon \mathcal{C}_n \to \mathbb{A}^{(n)}$ сопоставляет паре (X,Y) спектр матрицы X. Уилсон [27] открыл следующие два ключевых свойства интегрируемой системы Калоджеро-Мозера:

(a) для $n_1+n_2=n$ имеет место факторизационный изоморфизм

$$\mathcal{C}_n \times_{\mathbb{A}^{(n)}} (\mathbb{A}^{(n_1)}\times\mathbb{A}^{(n_2)})_{\mathrm{disj}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}_{n_1}\times\mathcal{C}_{n_2}) \times_{(\mathbb{A}^{(n_1)}\times\mathbb{A}^{(n_2)})} (\mathbb{A}^{(n_1)}\times\mathbb{A}^{(n_2)})_{\mathrm{disj}}.$$

(b) Для $x\in\mathbb{A}^1$ имеет место изоморфизм $\pi_n^{-1}(n\cdot x) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sch}_n$.

Теперь вышеупомянутое коумножение

$$\Delta = \bigoplus_{n_1+n_2=n} \Delta_{n_1,n_2}\colon H^{2n}_c(\mathrm{Sch}_n,\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{n_1+n_2=n} H^{2n_1}_c(\mathrm{Sch}_{n_1},\mathbb{Z})\otimes H^{2n_2}_c(\mathrm{Sch}_{n_2},\mathbb{Z})$$

определяется как морфизм коспециализации[1] для когомологий с компактным носителем слоёв морфизма π_n, ограниченного на подсемейство $\pi_n^{-1}(n_1\cdot x + n_2\cdot y)\subset\mathcal{C}_n$ (коспециализация со слоёв над диагональю $x=y$ на внедиагональные слои $x\neq y$), ср. [22].

3.4.2

Пусть дана редуктивная комплексная алгебраическая группа G. Шидер [26] построил биалгебру $\mathcal{A}$, играющую роль $\bigoplus_n H^{2n}_c(\mathrm{Sch}_n,\mathbb{C})$ для аффинного Грассманниана Gr_G (вместо Gr). Чтобы объяснить его конструкцию, мы должны ввести основные обозначения, касающиеся группы G и её аффинного Грассманиана Gr_G.

Мы фиксируем борелевскую и картановскую подгруппы $G\supset B\supset T$ и обозначаем W группу Вейля (G,T). Пусть N обозначает унипотентный радикал борелевской группы B, а N_- обозначает унипотентный радикал противоположной борелевской подгруппы B_-. Пусть Λ (соотв. $\Lambda^\vee$) обозначает решётку ковесов (соотв. весов), а $\Lambda^+\subset\Lambda$ (соотв. $\Lambda^{\vee+}\subset\Lambda^\vee$) обозначает конус доминантных ковесов (соотв. весов). Пусть также $\Lambda^{\mathrm{pos}}\subset\Lambda$ (соотв. $\Lambda^{\vee,\mathrm{pos}}\subset\Lambda^\vee$) обозначает подмоноид, порождённый простыми кокорнями (соотв. корнями) $\alpha_i,\ i\in I$ (resp. $\alpha_i^\vee,\ i\in I$). Мы обозначаем $G^\vee\supset T^\vee$ Ленглендс-двойственную группу, так что Λ (соотв. $\Lambda^\vee$) является решёткой весов (соотв. ковесов) группы $G^\vee$.

[1] терминология статьи [26, 6.2.7].

Пусть $\mathcal{O}$ обозначает кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[z]]$, а $\mathcal{K}$ обозначает его поле частных $\mathbb{C}((z))$. Аффинный Грассманниан $\mathrm{Gr}_G = G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}$ является инд-проективной схемой, объединением $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda^+}\mathrm{Gr}_G^\lambda$ $G_{\mathcal{O}}$-орбит. Замыкание орбиты Gr_G^λ является проективным многообразием $\overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda = \bigsqcup_{\mu\leq\lambda}\mathrm{Gr}_G^\mu$. Множество неподвижных точек Gr_G^T естественно отождествляется с решёткой ковесов Λ; и $\mu\in\Lambda$ лежит в Gr_G^λ если и только если $\mu\in W\lambda$.

Для ковеса $\nu\in\Lambda=\mathrm{Gr}_G^T$ мы обозначаем $S_\nu\subset\mathrm{Gr}_G$ (соотв. $T_\nu\subset\mathrm{Gr}_G$) орбиту группы $N(\mathcal{K})$ (соотв. of $N_-(\mathcal{K})$), проходящую через ν. Пересечения $S_\nu\cap\overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda$ (соотв. $T_\nu\cap\overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda$) являются аттракторами (соотв. репеллентами) однопараметрической группы $\mathbb{C}^\times$, действующей через гомоморфизм 2ρ в картановский тор $T\curvearrowright\overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda$: $S_\nu\cap\overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda = \{x\in\overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda : \lim\limits_{c\to0}2\rho(c)\cdot x=\nu\}$ и $T_\nu\cap\overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda=\{x\in\overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda : \lim\limits_{c\to\infty}2\rho(c)\cdot x=\nu\}$. В пределе $\mathrm{Gr}_G=\lim\limits_{\lambda\in\Lambda^+}\overline{\mathrm{Gr}}_G^\lambda$, S_ν (соотв. T_ν) является аттрактором (соотв. репеллентом) точки ν в Gr_G. Замыкание $\overline{S}_\nu$ является объединением $\bigsqcup_{\mu\leq\nu}S_\mu$, а $\overline{T}_\nu=\bigsqcup_{\mu\geq\nu}T_\mu$.

Определение. (a) Для $\theta\in\Lambda^{\mathrm{pos}}$ мы обозначаем Sch_θ (соотв. $\overline{\mathrm{Sch}}_\theta$) пересечение $S_\theta\cap T_0$ (соотв. $\overline{S}_\theta\cap\overline{T}_0$).[2] Это пересечение равноразмерно размерности $\langle\rho^\vee,\theta\rangle$ (см. [18, §6.3]).[3]

(b) Положим $\mathcal{A}_\theta := H_c^{\langle2\rho^\vee,\theta\rangle}(\mathrm{Sch}_\theta,\mathbb{C}) = H_c^{\langle2\rho^\vee,\theta\rangle}(\overline{\mathrm{Sch}}_\theta,\mathbb{C})$, и $\mathcal{A}:=\bigoplus_{\theta\in\Lambda^{\mathrm{pos}}}\mathcal{A}_\theta$.

Пусть фиксирована гладкая кривая X и $\theta\in\Lambda^{\mathrm{pos}}$. Тогда открытое пространство застав $\mathring{Z}^\theta$ (см. например, [18]) снабжено проекцией $\pi_\theta\colon\mathring{Z}^\theta\to X^\theta$ на пространство конфигураций степени θ кривой X. Эта проекция обладает свойством факторизации, и для каждой точки $x\in X$ имеется канонический изоморфизм $\pi_\theta^{-1}(\theta\cdot x)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Sch}_\theta$. Для $\theta_1,\theta_2\in\Lambda^{\mathrm{pos}}$ таких, что $\theta_1+\theta_2=\theta$, коумножение $\Delta_{\theta_1,\theta_2}\colon\mathcal{A}_\theta\to\mathcal{A}_{\theta_1}\otimes\mathcal{A}_{\theta_2}$ определяется так же, как в 3.4.1 через морфизм коспециализации для подсемейства $\pi_\theta^{-1}(\theta_1\cdot x+\theta_2\cdot y)$.

Чтобы построить умножение $\mathsf{m}\colon\bigoplus_{\theta_1+\theta_2=\theta}\mathcal{A}_{\theta_1}\otimes\mathcal{A}_{\theta_2}\to\mathcal{A}_\theta$, нам понадобится интерполяционное семейство Дринфельда-Гайцгори $\widetilde{\mathrm{Sch}}_\theta\to\mathbb{A}^1$ [21, §2.2], построенное по $\mathbb{C}^\times$-действию на $\overline{\mathrm{Sch}}_\theta$, происходящему из кохарактераr 2ρ картановского тора T. Главное свойство интерполяционного семейства $\widetilde{\mathrm{Sch}}_\theta\to\mathbb{A}^1$ состоит в том, что все его слои над $a\neq0$ изоморфны $\overline{\mathrm{Sch}}_\theta$, а нулевой слой $(\widetilde{\mathrm{Sch}}_\theta)_0$ изоморфен несвязному объединению $\bigsqcup\limits_\lambda\overline{\mathrm{Sch}}_\theta^{+,\lambda}\times\overline{\mathrm{Sch}}_\theta^{-,\lambda}$. Здесь λ (ковес в Λ^{pos} такой, что $\lambda\leq\theta$) пробегает множество $\mathbb{C}^\times$-неподвижных точек $\overline{\mathrm{Sch}}_\theta$, а $\overline{\mathrm{Sch}}_\theta^{+,\lambda}$ (соотв. $\overline{\mathrm{Sch}}_\theta^{-,\lambda}$) обозначает соответствующий аттрактор (соотв. репеллент), равный $S_\lambda\cap\overline{T}_0$ (соотв. $\overline{S}_\theta\cap T_\lambda$). Легко видеть, что $H_c^{\langle2\rho^\vee,\theta\rangle}((\widetilde{\mathrm{Sch}}_\theta)_0,\mathbb{C})=\bigoplus_{\theta_1+\theta_2=\theta}H_c^{\langle2\rho^\vee,\theta_1\rangle}(\mathrm{Sch}_{\theta_1},\mathbb{C})\otimes H_c^{\langle2\rho^\vee,\theta_2\rangle}(\mathrm{Sch}_{\theta_2},\mathbb{C})$, и умножение m, которое мы хотели построить, есть не что иное, как морфизм коспециализации для когомологий с компактным носителем слоёв интерполяционного семейства Дринфельда-Гайцгори.

[2]Здесь название Sch дано в честь S. Schieder.

[3]Строго говоря, только неравенство $\dim(S_\theta\cap T_0)\leq\langle\rho^\vee,\theta\rangle$ проверено сразу после доказательства [18, Proposition 6.4]. Обратное неравенство следует, например, из существования факторизационного семейства $\pi_\theta\colon\mathring{Z}^\theta\to X^\theta$, обсуждаемого в следующем абзаце.

Шидер выдвинул гипотезу о том, что биалгебра $\mathcal{A}$ изоморфна универсальной обёртывающей алгебре $U(\mathfrak{n}^\vee)$ алгебры Ли $\mathrm{Lie}(N^\vee)$, где $N^\vee \subset B^\vee \subset G^\vee$ является унипотентным радикалом борелевской подгруппы Ленглендс-двойственной группы $G^\vee$. Целью нашей работы является доказательство гипотезы Шидера.

3.4.3

Чтобы построить изоморфизм $U(\mathfrak{n}^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$, мы предъявляем действие биалгебры $\mathcal{A}$ на геометрическом функторе слоя категории Сатаке. Точнее, мы обозначаем $r_{\nu,+}$ (соотв. $r_{\nu,-}$) локально замкнутое вложение $S_\nu \hookrightarrow \mathrm{Gr}_G$ (соотв. $T_\nu \hookrightarrow \mathrm{Gr}_G$). Кроме того, мы обозначаем $\iota_{\nu,+}$ (соотв. $\iota_{\nu,-}$) замкнутое вложение точки ν в S_ν (соотв. в T_ν).

Как доказано в работах [19, 21], есть канонический изоморфизм функторов $\iota^*_{\nu,-}r^!_{\nu,-} \simeq \iota^!_{\nu,+}r^*_{\nu,+}\colon D^b_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G) \to D^b(\mathrm{Vect})$. Для пучка $\mathcal{P} \in D^b_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$, его гиперболический слой в точке ν определяется как $\Phi_\nu(\mathcal{P}) := \iota^*_{\nu,-}r^!_{\nu,-}\mathcal{P} \simeq \iota^!_{\nu,+}r^*_{\nu,+}\mathcal{P}$. Согласно [25], для $\mathcal{P} \in \mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$, гиперболический слой $\Phi_\nu(\mathcal{P})$ живёт в единственной когомологической степени $\langle 2\rho^\vee, \nu\rangle$, и имеется каноническое разложение в прямую сумму $H^\bullet(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{P}) = \bigoplus_{\nu\in\Lambda} \Phi_\nu(\mathcal{P})$. Более того, абелева категория $\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ моноидальна относительно операции свёртки $\star$, и функтор $H^\bullet(\mathrm{Gr}_G, -)\colon (\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G), \star) \to (\mathrm{Vect}, \otimes)$ является функтором слоя, отождествляющим $(\mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G), \star)$ с тензорной категорией $\mathrm{Rep}(G^\vee)$ (геометрическая эквивалентность Сатаке).

Основным шагом в доказательстве гипотезы Шидера является построение морфизма функторов $\mathcal{A}_\theta \otimes \Phi_\nu \to \Phi_{\nu+\theta}$. Для этого (а также для проверки различных тензорных совместимостей) мы рассматриваем интерполяционный грассманниан Дринфельда-Гайцгори-Винберга: относительную компактификацию $\mathrm{VinGr}^{\mathrm{princ}}_G$ интеполяционного семейства Дринфельда-Гайцгори $\widetilde{\mathrm{Gr}}_G \to \mathbb{A}^1$. Мы также рассматриваем расширенный вариант $\mathrm{VinGr}_G \to T^+_{\mathrm{ad}} := \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\Lambda^{\vee,\mathrm{pos}}]$ и ещё один вариант VinGr_{G,X^n} для Грассманниана Бейлинсона-Дринфельда. Эти семейства неявно содержались уже в работе Шидера, и были явно построены в более ранней работе Гайцгори и Надлера [23]. Они представляют большой самостоятельный интерес. Например, пусть $\omega \in \Lambda^+$ минискульный доминантный ковес. Тогда многообразие Шуберта Gr^ω_G изоморфно параболическому пространству флагов G/P_ω, и соответствующее подмногообразие VinGr^ω_G интерполяционного Грассманниана Дринфельда-Гайцгори-Винберга VinGr_G изоморфно вырождению Бриона диагонали Δ_{G/P_ω} в схеме Гильберта $\mathrm{Hilb}(G/P_\omega \times G/P_\omega) \times T^+_{\mathrm{ad}}$ [20, §3].

Замечание. (a) Согласно геометрической эквивалентности Сатаке, для $\mathcal{P} \in \mathrm{Perv}_{G_\mathcal{O}}(\mathrm{Gr}_G)$ когомологии $H^\bullet(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{P})$ снабжены действием универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{g}^\vee)$. Например, действие Картановской подалгебры $U(\mathfrak{t}^\vee) \subset U(\mathfrak{g}^\vee)$ происходит из градуировки $H^\bullet(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{P}) = \bigoplus_{\nu\in\Lambda} \Phi_\nu(\mathcal{P})$. Действие подалгебры $U(\mathfrak{n}^\vee)$ происходит из геометрического действия биалгебры Шидера $\mathcal{A}$ на геометрическом функторе слоя категории Сатаке и изоморфизма $U(\mathfrak{n}^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$. Наконец, действие подалгебры $U(\mathfrak{n}^\vee_-)$ сопряжено действию подалгебры $U(\mathfrak{n}^\vee)$ относительно билинейной формы Лефшеца на $H^\bullet(\mathrm{Gr}_G, \mathcal{P})$.

(b) По построению, алгебры Шидера $\mathcal{A}$ снабжена базисом, состоящим из фундаментальных классов неприводимых компонент Sch_θ. Будем обозначать через $\mathcal{A}_\mathbb{Z} \subset \mathcal{A}$ соответствующую целочисленную форму алгебры Шидера. С другой стороны, универсальная обёртывающая алгебра $U(\mathfrak{n}^\vee)$ снабжена полуканоническим базисом [24].[4] Соответствующая целочисленная форма есть не что иное, как форма Шевалле-Костанта универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{n}^\vee)_\mathbb{Z}$. Мы доказываем, что изоморфизм $U(\mathfrak{n}^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ ограничивается до изоморфизма целочисленных форм: $U(\mathfrak{n}^\vee) \supset U(\mathfrak{n}^\vee)_\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_\mathbb{Z} \subset \mathcal{A}$. В простейшем примере $G = SL(2)$, $\mathcal{A}$ $\mathbb{N}$-градуирована, и каждая компонента градуировки $\mathcal{A}_n$ одномерна с базисным вектором e_n; можно убедиться, что $e_n e_m = \binom{n+m}{n} e_{n+m}$. Поэтому два вышеописанных базиса отвечают друг другу при изоморфизме $U(\mathfrak{n}^\vee)_\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_\mathbb{Z}$. Однако, для общей G эти два базиса не переходят друг в друга, как показано в примере для G типа A_5 в степени $(2, 4, 4, 4, 2)$ в [17, Appendix A]. Таким образом, хиггсова реализация [24] универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{n}^\vee)$ отличается от кулоновской реализации [26] биалгебры $U(\mathfrak{n}^\vee)$.

Эти и другие результаты опубликованы в [28].

Список использованных источников

1. Blokh A., Oversteegen L., Timorin V., On critical renormalization of complex polynomials. Preprint. Submitted.

2. Blokh A., Oversteegen L., Timorin V. Dynamical generation of parameter laminations, in: Contemporary Mathematics 744 Dynamics: Topology and Numbers (2020). United States of America : American Mathematical Society, 2020. doi Ch. 13. P. 205–229.

3. Blokh A., Oversteegen L., Ptacek R. Timorin V., Laminational models for some spaces of polynomials of any degree // Memoirs of the American Mathematical Society. 2020. Vol. 265. No. 1288. P. 1–116.

4. I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, and S. I. Gelfand. Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P. Uspehi Mat. Nauk, 28(3(171)): 3–26, 1973.

5. Sara Billey and Mark Haiman. Schubert polynomials for the classical groups, Journal of the American Mathematical Society 8.2 (1995): 443–482.

6. Sergey Fomin and Anatol Kirillov. Combinatorial B_n-analogues of Schubert polynomials, Transactions of the American Mathematical Society 348.9 (1996): 3591–3620.

7. Sergey Fomin and Anatol N. Kirillov, The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials, Proceedings of the 5th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Florence, 1993), vol. 153, 1996, pp. 123–143.

[4] построенном в случае, когда матрица Картана группы G симметрична.

8. Takeshi Ikeda, Leonardo Mihalcea, Hiroshi Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups, Advances in Mathematics, 226 (1), 2011, 840–886.

9. Lascoux, Alain; Schützenberger, Marcel-Paul. Polynômes de Schubert. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982), no. 13, 447–450.

10. Evgeny Smirnov and Anna Tutubalina. Pipe dreams for Schubert polynomials of the classical Weyl groups, preprint `arXiv:2009.14120` (2020) 36 pp.

11. J. Hofscheier, A. Khovanskii, L. Monin Cohomology rings of toric bundles and the ring of conditions, препринт arXiv:2006.12043 [math.AG]

12. K. Kaveh, Note on cohomology rings of spherical varieties and volume polynomial, J. Lie Theory 21 (2011), no. 2, 263–283.

13. A.G.Khovanskii and A.V.Pukhlikov, The Riemann–Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials on virtual polytopes, Algebra i Analiz, 4 (1992), no.4, 188–216

14. V. Kiritchenko, Push-pull operators on convex polytopes, preprint

15. V. Kiritchenko, Convex geometric push-pull operators and FFLV polytopes, Oberwolfach Reports 46/2019

16. V. Kiritchenko, E. Smirnov, V. Timorin, Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes, Russian Math. Surveys, 67 (2012), no.4, 685–719

17. P. Baumann, J. Kamnitzer, A. Knutson, The Mirković-Vilonen basis and Duistermaat-Heckman measures (with appendix by A. Dranowski, J. Kamnitzer, and C. Morton-Ferguson), arXiv:1905.08460.

18. A. Braverman, M. Finkelberg, D. Gaitsgory and I. Mirković, Intersection cohomology of Drinfeld's compactifications, Selecta Math. 8 (2002), no. 3, 381–418. Erratum: Selecta Math. 10 (2004), no. 3, 429–430.

19. T. Braden, Hyperbolic localization of intersection cohomology, Transform. Groups 8 (2003), 209–216.

20. M. Brion, Group completions via Hilbert schemes, J. Algebraic Geom. 12 (2003), no. 4, 605–626.

21. V. Drinfeld, D. Gaitsgory, On a theorem of Braden, Transform. Groups 19 (2014), 313–358.

22. M. Finkelberg, V. Ginzburg, Calogero-Moser space and Kostka polynomials, Adv. Math. 172 (2002), no. 1, 137–150.

23. D. Gaitsgory, D. Nadler, Spherical varieties and Langlands duality, Mosc. Math. J. 10 (2010), no. 1, 65–137.

24. G. Lusztig, Semicanonical bases arising from enveloping algebras, Adv. Math. 151 (2000), no. 2, 129–139.

25. I. Mirković, K. Vilonen, Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings, Ann. of Math. (2) 166 (2007), no. 1, 95–143; Erratum: Ann. of Math. (2) 188 (2018), no. 3, 1017–1018.

26. S. Schieder, Monodromy and Vinberg fusion for the principal degeneration of the space of G-bundles, arXiv:1701.01898.

27. G. Wilson, Collisions of Calogero-Moser particles and an adelic Grassmannian, Invent. Math. 133 (1998), 1–41.

28. M. Finkelberg, V. Krylov, I. Mirković, Drinfeld-Gaitsgory-Vinberg interpolation Grassmannian and geometric Satake equivalence (with ap- pendix by Dennis Gaitsgory), Journal of Topology 13 (2020), no. 2, 683–729.

4 Классическая геометрия

4.1 Исследование групп автоморфизмов и бирациональной жёсткости многообразий Фано. Приложения к исследований группы Кремоны

Мы продолжаем изучать вопрос классификации рациональных многообразий Фано с действием конечной группы автоморфизмов, которые не допускают эквивариантных бирациональных перестроек в другие G-многообразия Фано и расслоения Мори. Классификация таких многообразий представляет особый интерес с точки зрения задачи классификации конечных подгрупп в трёхмерной группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Стратегия классификации таких подгрупп была описана в работе И. Долгачева и В. Исковских [1]: для классификации этих подгрупп достаточно описать G-минимальные терминальные $G\mathbb{Q}$-факториальные расслоения Мори и морфизмы между ними. Даже в двумерном случае остаются отдельные открытые вопросы, а в трехмерном задача в целом выглядит очень сложной в своей максимальной общности. По этой причине логично ограничиться описанием G-многообразий, которые не имеют перестроек в другие многообразия, так называемых бирационально жёстких многообразий. Мы рассматриваем многообразия первого типа с дополнительным условием: канонический класс делится на 2 в группе Пикара (такие многообразия называются G-многообразиями дель Пеццо). Ранее были классифицированы многообразия дель Пеццо степеней 3 и 4 такого типа, а также некоторые многообразия дель Пеццо степени 2. В случае степени 4 оказалось, что G- бирационально жёсткими могут быть только 5 отдельных многообразий и одно однопараметрическое семейство. В случае степени 3 классификация устроена ещё проще – только два многообразия являются бирационально жёсткими относительно всей группы автоморфизмов. Для одного из них были классифицированы все подгруппы полной группы автоморфизмов, относительно которых многообразие является эквивариантно бирационально жёстким. Также была опубликована статья с классификацией бирационально жёстких многообразий дель Пеццо степени 2 с 15 обыкновенными двойными точками, оно оказалось ровно одно.

В отчетный период продолжалось исследование многообразий дель Пеццо степени 2, имеющих только нодальные особенности. Поскольку для приложений к изучению группы Кремоны нас интересуют только рациональные многообразия, то, согласно результату Чельцова, Шрамова и Пржиялковского (см. [2]), имеет смысл изучать только многообразия, имеющие более 6 особенностей. Согласно их теореме, многообразия, не являющиеся $\mathbb{Q}$-факториальными почти всегда рациональны, но в факториальном случае вопрос рациональности всё ещё открыт. В не $\mathbb{Q}$-факториальном случае были описаны все многообразия, имеющие достаточно большую группу автоморфизмов, чтобы они имели шанс быть бирационально жёсткими. Для многих подгрупп в группе автоморфизмов удалось доказать бирациональную жёсткость, в частности, удалось найти некоторое количество бирационально жёстких многообразий относительно симметрической группы ранга 4. В факториальном случае ситуация сложнее, поскольку в этом случае геометрия многообразия гораздо беднее. В этом случае удалось получить список потенциальных кандидатов на то, чтобы быть бирационально жёсткими, например, было показано, что многообразий такого типа с 11 и 9 особенностями не бывает, а в случае 7 особенностей оно всего одно. В случае 12, 10 и 8 особенностей ситуация несколько сложнее, имеется несколько семейств потенциально бирационально жестких многообразий. Однако в некоторых случаях сложно понять полную группу автоморфизмов, и, скорее всего, многие многообразия из этого списка на самом деле не являются бирационально жесткими даже относительно полной группы автоморфизмов. Работа в этом направлении будет продолжена в дальнейшем.

Список использованных источников

1. I. Dolgachev, V. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, In Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, Progr. Math., 269 (2009), 443–548.

2. I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, Which quartic double solids are rational? J. of Alg. Geom. 2019, 28, 201–243

4.2 Бирациональная жесткость трехмерных многообразий Фано

В совместной работе [1] Ахмадинежада, Парка и Чельцова, получена полная классификация бирационально жестких трехмерных взвешенных гиперповерхностей Фано. Напомним, что при применении программы минимальных моделей к трехмерному рационально связному многообразию, мы получим (на выходе) некоторое Мори расслоенное пространство, которое может иметь один из следующим трех типов: $\mathbb{Q}$-факториальное многообразие Фано с терминальными особенностями и группой Пикара $\mathbb{Z}$, расслоение на поверхности дель Пеццо, и расслоение на коники. Можно задать вопрос — когда данное Мори расслоенное пространство является единственным Мори расслоенным пространством в своем классе бирациональной эквивалентности? Наиболее естественно этот вопрос звучит для многообразий Фано — если трехмерное многообразие Фано является единственным Мори расслоенным пространством в своем классе бирациональной эквивалентности, то его принято называть бирационально жесткими. На данный момент бирационально жесткие многообразия Фано не классифицированы, но Ахмадинежад, Парк и Чельцов сделали первый шаг на пути к этой классификации. Чтобы его описать, рассмотрим трехмерное многообразие Фано X в терминальными $\mathbb{Q}$-факториальными особенностями. Пусть A — некоторый дивизор Вейля на многообразии X такой что $-K_X = \iota_X A$, где ι_X — максимальное натуральное число с таким свойством. В этом случае, число ι_X принято называть индексом многообразия X. Известно, что существует ровно 130 семейств трехмерных многообразий Фано, таких что кольцо

$$R(X,A)=\bigoplus_{m\geqslant 0} H^0\big(X,-mA\big)$$

имеет ровно 5 образующих. Пусть x,y,z,t,w — эти образующие, а $a_0,\ldots,a_4$ — их соответствующие степени. В этом случае, сечения x,y,z,t,w связаны некоторым соотношением $f(x,y,z,t,w)=0$, которое имеет степень d. Это соотношение реализует X как гиповерхность во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)$, которая задана квазиоднородным уравнением

$$f(x,y,z,t,w)=0,$$

а индекс многообразия X равен $\iota_X=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4-d$. Среди этих 130 семейств, ровно 95 имеет индекс 1, а их бирациональная жесткость была исследована ранее Парком и Чельцовым, которые показали следующий результат

Теорема. Все квазигладкие трехмерные гиперповерхности Фано индекса 1 являются бирационально жесткими.

В частности, все квазигладкие трехмерные гиперповерхности Фано индекса 1 нерациональны. Рациональность многообразий Фано в оставшихся 35 семействах была исследована Вуазен, Гриненко, Клеменсом, Гриффитсом и Окадой, которые полностью решили задачу рациональности для общих членов этих семейств. Информация об этих семействах и рациональности общих многообразий в них приведена в следующей таблице.

№	$X_d\subset\mathbb{P}(a_0,\ldots,a_4)$	ι_X	P?	№	$X_d\subset\mathbb{P}(a_0,\ldots,a_4)$	ι_X	P?
96	$X_3\subset\mathbb{P}(1,1,1,1,1)$	2	$-$	114	$X_6\subset\mathbb{P}(1,1,2,3,4)$	5	$+$
97	$X_4\subset\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$	2	$-$	115	$X_6\subset\mathbb{P}(1,2,2,3,3)$	5	$+$
98	$X_6\subset\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$	2	$-$	116	$X_{10}\subset\mathbb{P}(1,2,3,4,5)$	5	$-$
99	$X_{10}\subset\mathbb{P}(1,1,2,3,5)$	2	$-$	117	$X_{15}\subset\mathbb{P}(1,3,4,5,7)$	5	$-$
100	$X_{18}\subset\mathbb{P}(1,2,3,5,9)$	2	$-$	118	$X_6\subset\mathbb{P}(1,1,2,3,5)$	6	$+$
101	$X_{22}\subset\mathbb{P}(1,2,3,7,11)$	2	$-$	119	$X_6\subset\mathbb{P}(1,2,2,3,5)$	7	$+$
102	$X_{26}\subset\mathbb{P}(1,2,5,7,13)$	2	$-$	120	$X_6\subset\mathbb{P}(1,2,3,3,4)$	7	$+$
103	$X_{38}\subset\mathbb{P}(2,3,5,11,19)$	2	$-$	121	$X_8\subset\mathbb{P}(1,2,3,4,5)$	7	$+$
104	$X_2\subset\mathbb{P}(1,1,1,1,1)$	3	$+$	122	$X_{14}\subset\mathbb{P}(2,3,4,5,7)$	7	$-$
105	$X_3\subset\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$	3	$+$	123	$X_6\subset\mathbb{P}(1,2,3,3,5)$	8	$+$
106	$X_4\subset\mathbb{P}(1,1,1,2,2)$	3	$+$	124	$X_{10}\subset\mathbb{P}(1,2,3,5,7)$	8	$+$
107	$X_6\subset\mathbb{P}(1,1,2,2,3)$	3	$-$	125	$X_{12}\subset\mathbb{P}(1,3,4,5,7)$	8	$+$
108	$X_{12}\subset\mathbb{P}(1,2,3,4,5)$	3	$-$	126	$X_6\subset\mathbb{P}(1,2,3,4,5)$	9	$+$
109	$X_{15}\subset\mathbb{P}(1,2,3,5,7)$	3	$-$	127	$X_{12}\subset\mathbb{P}(2,3,4,5,7)$	9	$+$

110	$X_{21} \subset \mathbb{P}(1,3,5,7,8)$	3	$-$	128	$X_{12} \subset \mathbb{P}(1,4,5,6,7)$	11	$+$
111	$X_4 \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,3)$	4	$+$	129	$X_{10} \subset \mathbb{P}(2,3,4,5,7)$	11	$+$
112	$X_6 \subset \mathbb{P}(1,1,2,3,3)$	4	$+$	130	$X_{12} \subset \mathbb{P}(3,4,5,6,7)$	13	$+$
113	$X_4 \subset \mathbb{P}(1,1,2,2,3)$	5	$+$				

В работе [1] Ахмадинежад, Парк и Чельцов доказали следующий результат.

Теорема. Пусть X — квазигладкая трехмерная гиперповерхность Фано №n. Тогда

– существует бирациональное отображение X в расслоение на поверхности дель Пеццо или расслоение на коники если

$$n \notin \{100, 101, 102, 103, 110\},$$

– существует бирациональное отображение X в другое (не изоморфное) трехмерное многообразие Фано с терминальными $\mathbb{Q}$/факториальными особенностями и группой Пикара $\mathbb{Z}$ если

$$n \in \{100, 101, 102, 103, 110\}.$$

В частности, если $\iota_X \geqslant 2$, то X не является бирационально жестким.

Следствие 1. Квазигладкая трехмерная гиперповерхность Фано бирационально жестка если и только если она имеет индекс 1.

В совместной работе [2] Дюбуло, Кишимото и Чельцова, полностью решена проблема G-бирациональной жесткости для трехмерных торических G/многообразий Фано, где G — подгруппа нормализатора максимального тора, которая содержит максимальный тор. Напомним, что G-многообразие Фано это пара (X, G), состоящая из многообразия Фано X и алгебраической подгруппы G в $\mathrm{Aut}(X)$ такая что

– особенности многообразия X терминальны,

– G-инвариантная группа $\mathrm{Cl}(X)^G$ имеет ранг 1 (G-минимальность).

Напомним также что G-многообразие Фано является G-бирационально сверхжестким если не существует никаких G-эквивариантных линков Саркисова, которые начинаются с многообразия X. Аналогично, G/многообразие Фано называется G-бирационально жестким если каждый G-эквивариантный линк Саркисова, который начинается с X, также заканчивается в X. Также назовем G-многообразие Фано G-цельным если X не может быть G-эквивариантно перестроено в (небирациональное) расслоение на рационально связанные многообразие над базой положительной размерности. Дюбуло, Кишимото и Чельцов нашли все G-бирационально сверхжесткие, G-бирационально жесткие и G-цельные трехмерные трехмерные торические G-многообразия Фано X в случае когда G — алгебраическая подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$, которая содержит и нормализует максимальный тор. Чтобы описать их классификацию, обозначим символом G_X нормализатор максимального тора в $\mathrm{Aut}(X)$, и отметим, что существует расщепимая точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow G_X \xrightarrow{\nu_X} \mathbb{W}_X \longrightarrow 1,$$

где $\mathbb{W}_X$ — конечная подгруппа группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, которую принято называть группой Вейля. Также, рассмотрим четыре хорошо известные трехмерные торические многообразия Фано. Во первых, положим $V_6 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Во вторых, пусть V_4 — полное пересечение в $\mathbb{P}^5$, заданное уравнениями

$$xu - yw = xu - zt = 0.$$

В третьих, пусть Y_{24} — дивизор степени $(1,1,1,1)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, который задан уравнением

$$x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4.$$

В четвертых, пусть X_{24} — фактор $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ по инволюции, которая действует диагонально на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а на каждом факторе действует как $[x : y] \mapsto [-x : y]$. Во всех этим четырех случаях, группа Вейля $\mathbb{W}_X$ изоморфна группе $\mathfrak{S}_4 \times \boldsymbol{\mu}_2$. Дюбуло, Кишимото и Чельцов получили исчерпывающий следующий результат:

Теорема. Пусть X — трехмерное торическое многообразие Фано, которое имеет не более чем терминальные особенности, пусть $\mathbb{T}$ — максимальный тор в $\mathrm{Aut}(X)$, а G_X — его нормализатор в группе $\mathrm{Aut}(X)$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

- X является G_X-минимальным и G_X-цельным;
- X является одним из многообразий V_6, V_4, X_{24}, Y_{24} и $\mathbb{P}^3$.

Пусть G — алгебраическая подгруппа в G_X, и пусть $\nu_X\colon G_X \to \mathbb{W}_X$ — фактор-морфизм. Если X является одним из трехмерных торических многообразий Фано V_6, V_4, X_{24}, Y_{24} или $\mathbb{P}^3$, то имеют место следующие утверждения:

- если X является G-минимальным и G-цельным, то $\nu_X(G)$ содержит подгруппу изоморфную $\mathfrak{A}_4$;
- если $\nu_X(G)$ содержит подгруппу изоморфную $\mathfrak{A}_4$, то многообразие X является G-минимальным кроме следующих случаев:
  - $X = V_4$, $\nu_X(G) \cong \mathfrak{S}_4$, а G действует интранзитивно на $\mathbb{T}$-инвариантных поверхностях;
  - $X = V_4$ и $\nu_X(G) \cong \mathfrak{A}_4$.
- если X является G-минимальным, а $\nu_X(G)$ contains $\mathfrak{A}_4$ и $|G| \geqslant 32 \cdot 24^4$, то X является G-цельным.

Из доказательства этой теоремы следует следующее следствие:

Следствие 2. Пусть X — одно из следующих трехмерных торических многообразий Фано V_6, V_4, X_{24}, Y_{24}, $\mathbb{P}^3$, пусть $\mathbb{T}$ — максимальный тор в $\mathrm{Aut}(X)$, а G_X — его нормализатор в группе $\mathrm{Aut}(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

– X является G_X-минимальным и G_X-бирационально жестким;

– X является G_X-минимальным и G_X-бирационально сверхжестким;

– либо $X = V_6$, либо $X = Y_{24}$.

Пусть G — алгебраическая подгруппа в G_X, и пусть $\nu_X\colon G_X \to \mathbb{W}_X$ — фактор-морфизм. Предположим, что $\nu_X(G)$ содержит подгруппу изоморфную $\mathfrak{A}_4$. Тогда имеют место следующие утверждения:

– если X является G-минимальным и G-бирационально жестким, то $X = V_6$ or $X = Y_{24}$;

– если $X = V_6$ или $X = X = Y_{24}$, и $|G| \geqslant 32 \cdot 24^4$, то X является G-бирационально жестким.

Список использованных источников

1. H. Ahmadinezhad, I. Cheltsov, J. Park, *On geometry of Fano threefold hypersurfaces*, arXiv:2007.14213

2. I. Cheltsov, A. Dubouloz, T. Kishimoto, *Toric G-solid Fano threefolds* arXiv:2007.14197

4.3 Ограничение нерациональности слоев в расслоениях Фано

Одной из центральных задач бирациональной геометрии является проблема рациональности. Ее решение состоит в том, чтобы определить, является данное многообразие рациональным, или нет. Напомним, что многообразие называется рациональным, если оно бирационально эквивалентно проективному пространству. Интерес также представляет поведение рациональности в семействах. А именно, если предположить, что общий слой семейства является рациональным, верно ли, что и специальный (вырожденный) слой также является рациональным? Мы изучаем проблему рациональности для семейств многообразий Фано размерности 2. Такие многообразия называются поверхностями дель Пеццо.

Хорошо известно, что над алгебраически замкнутым полем гладкая поверхность дель Пеццо является рациональной. С другой стороны, несложно построить вырождение гладкой поверхности дель Пеццо в особую нерациональную поверхность дель Пеццо.

Например, в качестве такого вырождения можно взять однопараметрическое семейство кубических поверхностей в трехмерном проективном пространстве, вырождающихся к конусу над плоской эллиптической кривой. Естественной задачей является исследовать этот феномен в большей общности. Предварительные результаты в этом направлении были получены в работе [4]. Их удалось обобщить в работе [2].

Рассмотрим плоское семейство (быть может, особых) многообразий Фано над кривой, такое, что общий слой является рациональным. Оказывается, что если наложить некоторые условия на семейство, то нерациональность специального слоя можно ограничить в терминах особенностей семейства.

Мы работаем с семействами, размерность слоев которых равна двум. Также мы требуем, чтобы особенности семейства были ограничены (более точно, чтобы они были лог-терминальны по Кавамате). В этом случае общий слой автоматически является рациональной поверхностью дель Пеццо, а компоненты специального слоя бирационально эквивалентны прямому произведению гладкой проективной кривой C на проективную прямую. Под ограничением нерациональности мы понимаем ограничение геометрических инвариантов кривой C, в частности, геометрического рода $g(C)$ и гональности $\mathrm{gon}(C)$. Напомним, что гональностью гладкой проективной кривой называется минимальная степень доминантного морфизма на проективную прямую. Ключевым предположением, позволяющим ограничить гональность, является следующее. Предположим, что особенности пары (X, tF_{red}), где X – тотальное пространство семейства, для некоторого фиксированного $t > 0$ являются ограниченными (более точно, лог-каноническими). Здесь F_{red} – специальный слой, рассмотренный с приведенной структурой. Тогда оказывается, что гональность $\mathrm{gon}(C)$ ограничена в зависимости от t, и если $t > 1/2$, то род $g(C)$ также ограничен в зависимости от t. Если же, кроме того, $t = 1$, то род кривой C не превосходит единицы. Более того, оценка $t > 1/2$ является оптимальной, то есть ее нельзя улучшить.

Доказанное утверждение можно сформулировать и в большей общности. А именно, его можно переформулировать для трехмерных расслоений на логарифмические многообразия Калаби-Яу. Оказывается, что такая переформулировка является более удобной для доказательств. Кроме того, в качестве базы можно рассмотреть многообразие положительной размерности, в частности, теорема применима и к случаю бирациональных стягиваний. В этом случае мы получаем ограниченность исключительных дивизоров при условии, что особенности многообразия хуже, чем канонические.

Полученный результат позволяется ответить на вопрос, поставленный Дж. Бланком, см [3]: является ли род (соответственно, гональность) кривой C, определенной выше, ограниченной для терминальных расслоений Мори на поверхности дель Пеццо над кривой? Из доказанной теоремы и гипотезы Шокурова, доказанной Биркаром в [1], следует, что ответ на вопрос об ограниченности гональности является положительным. Гипотеза Шокурова позволяет ограничить особенности пар (X, tF), рассмотренных выше, для некоторого фиксированного t, которое определяется особенностями X.

В частности, если X терминально, мы получаем некоторое $t > 0$, которое и позволяет применить доказанное нами утверждение. Аналогичный вопрос для рода кривой C пока остается открытым, так как мы не можем гарантировать, что полученное t будет больше $1/2$. Интересной представляется задача явного нахождения константы t в гипотезе Шокурова в случае терминальных особенностей трехмерных многообразий.

Список использованных источников

1. C. Birkar; Singularities on the base of a Fano type fibration. J. Reine Angew Math., J. Reine Angew Math., 715 (2016), 125-142.

2. C. Birkar, K. Loginov; Bounding non-rationality of divisors on 3-fold Fano fibrations. arXiv 2007.15754.

3. J. Blanc, I. Cheltsov, A. Duncan, Yu. Prokhorov. Birational self-maps of threefolds of (un)-bounded genus or gonality. arXiv:1905.00940.

4. K. Loginov. On nonrational fibers of del Pezzo fibrations over curves. Math. Notes, 106, 6 (2019), 930–939.

4.4 Автоморфизмы поверхностей Севери–Брауэра

В 2009 году И. В. Долгачев и В. А. Исковских классифицировали конечные подгруппы в группе бирациональных автоморфизмов проективной плоскости над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Одним из направлений нашей работы было обобщение их результатов на случай поверхностей Севери–Брауэра, то есть таких поверхностей S, определенных над (алгебраически незамкнутым) полем $\mathbf{K}$ характеристики 0, что поверхность $S_{\bar{\mathbf{K}}}$ над алгебраическим замыканием $\bar{\mathbf{K}}$ поля $\mathbf{K}$ изоморфна $\mathbf{P}^2_{\bar{\mathbf{K}}}$. Ввиду результатов Долгачева и Исковских, мы рассматривали только нетривиальные поверхности Севери–Брауэра, то есть такие, которые не изоморфны $\mathbf{P}^2$ над полем определения. Согласно классическому результату из теории многообразий Севери–Брауэра, последнее условие равносильно тому, что поверхность Севери–Брауэра не имеет точек над полем определения.

В 2020 году была получена полная классификация конечных подгрупп в группах бирациональных автоморфизмов нетривиальных поверхностей Севери–Брауэра. Пусть $\boldsymbol{\mu}_n$ обозначает циклическую группу порядка n.

Теорема. Пусть n — натуральное число, а G — конечная группа. Выполнены следующие утверждения.

– Существует поле $\mathbf{K}$ характеристики 0 и нетривиальная поверхность Севери–Брауэра S над $\mathbf{K}$, такая что группа $\mathrm{Bir}(S)$ бирациональных автоморфизмов S содержит элемент порядка n, в том и только том случае, если $n = 3^r \prod p_i^{r_i}$, где p_i — простые числа, сравнимые с 1 по модулю 3, и $r \leq 1$ (другими словами, n не делится на 9 и не делится на простые числа, сравнимые с 2 по модулю 3). В этом случае группа $\mathrm{Aut}(S)$ также содержит элемент порядка n;

– Существует поле $\mathbf{K}$ характеристики 0 и нетривиальная поверхность Севери–Брауэра S над $\mathbf{K}$, такая что группа $\mathrm{Aut}(S)$ содержит подгруппу, изоморфную G, в том и только том случае, когда существует натуральное число n, делящееся только на простые, сравнимые с 1 по модулю 3, такое что группа G изоморфна либо $\boldsymbol{\mu}_n$, либо $\boldsymbol{\mu}_{3n}$, либо сбалансированному полупрямому произведению $\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3$, либо прямому произведению $\boldsymbol{\mu}_3 \times (\boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3)$, где полупрямое произведение сбалансировано;

– Существует поле $\mathbf{K}$ характеристики 0 и нетривиальная поверхность Севери–Брауэра S над $\mathbf{K}$, такая что группа $\mathrm{Bir}(S)$ содержит подгруппу, изоморфную G, в том и только том случае, если G либо является одной из групп, перечисленных в пункте (ii), либо $G \cong \boldsymbol{\mu}_3^3$.

Эту теорему можно переформулировать как описание множества всех конечных порядков элементов и множества всех конечных подгрупп в группах $\mathrm{Aut}(S)$ и $\mathrm{Bir}(S)$, где S пробегает множество $\mathcal{S}$ всех нетривиальных поверхностей Севери–Брауэра над всеми полями характеристики 0. А именно, обозначим

$$\begin{aligned}
\mathcal{AO} = \{n \mid n \in \mathbf{Z}_{\geq 1},\ &\text{и существует такая поверхность } S \in \mathcal{S},\\
&\text{что группа } \mathrm{Aut}(S) \text{ содержит элемент порядка } n\},\\
\mathcal{BO} = \{n \mid n \in \mathbf{Z}_{\geq 1},\ &\text{и существует такая поверхность } S \in \mathcal{S},\\
&\text{что группа } \mathrm{Bir}(S) \text{ содержит элемент порядка } n\},\\
\mathcal{AG} = \{G \mid |G| < \infty,\ &\text{и существует такая поверхность } S \in \mathcal{S},\\
&\text{что группа } \mathrm{Aut}(S) \text{ содержит подгруппу, изоморфную } G\},\\
\mathcal{BG} = \{G \mid |G| < \infty,\ &\text{и существует такая поверхность } S \in \mathcal{S},\\
&\text{что группа } \mathrm{Bir}(S) \text{ содержит подгруппу, изоморфную } G\}.
\end{aligned}$$

Также обозначим через $\mathcal{N}$ множество всех натуральных чисел вида $n = \prod p_i^{r_i}$, где p_i — простые числа, сравнимые с 1 по модулю 3, и положим

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} = \{G \mid G \cong \boldsymbol{\mu}_n \rtimes \boldsymbol{\mu}_3 &\text{ является сбалансированным}\\
&\text{полупрямым произведением для некоторого } n \in \mathcal{N}\}.
\end{aligned}$$

В этих обозначениях наша теорема утверждает, что

$$\begin{aligned}
&\mathcal{AO} = \mathcal{BO} = \mathcal{N} \cup \{3n \mid n \in \mathcal{N}\},\\
&\mathcal{AG} = \{\boldsymbol{\mu}_n \mid n \in \mathcal{N}\} \cup \{\boldsymbol{\mu}_{3n} \mid n \in \mathcal{N}\} \cup \mathcal{B} \cup \{\boldsymbol{\mu}_3 \times G \mid G \in \mathcal{B}\},\\
&\mathcal{BG} = \mathcal{AG} \cup \{\boldsymbol{\mu}_3^3\}.
\end{aligned}$$

Можно проверить, что любая поверхность Севери–Брауэра над полем характеристики 0 имеет автоморфизм порядка 3. Тем не менее над некоторыми полями группы автоморфизмов всех нетривиальных поверхностей Севери–Брауэра имеют довольно мало конечных подгрупп. Например, это происходит в случае поля $\mathbf{Q}$ рациональных чисел.

Следствие 3. Пусть S — нетривиальная поверхность Севери–Брауэра над полем $\mathbf{Q}$, а G — конечная подгруппа в группе $\mathrm{Bir}(S)$. Тогда G является подгруппой в группе $\boldsymbol{\mu}_3^3$. В частности, группа G абелева.

Используя терминологию, введенную В. Л. Поповым, можно сказать, что константа Жордана группы бирациональных автоморфизмов любой нетривиальной поверхности Севери–Брауэра над $\mathbf{Q}$ равна 1, в то время как для нетривиальной поверхности Севери–Брауэра над произвольным полем характеристики 0 она не превосходит 3. Отметим, что согласно результатам Е. А. Ясинского константа Жордана для группы бирациональных автоморфизмов проективной плоскости над $\mathbf{Q}$ равна 120.

Список использованных источников

1. C. Shramov, Finite groups acting on Severi-Brauer surfaces, arXiv:2006.14671

2. C. Shramov, V. Vologodsky, Boundedness for finite subgroups of linear algebraic groups, arXiv:2009.14485

3. К. А. Шрамов, Бирациональные автоморфизмы поверхностей Севери-Брауэра, Матем. сб., 211 (2020), no. 3, 169–184.

4.5 Автоморфизмы квазигладких взвешенных полных пересечений

Несмотря на то, что гладкие многообразия являются наиболее естественным объектом для исследования, во многих случаях имеет смысл рассматривать взвешенные полные пересечения с немного более слабым свойством, а именно, квазигладкие взвешенные полные пересечения. В совместной работе с В. В. Пржиялковским был доказан следующий результат о группах автоморфизмов квазигладких взвешенных полных пересечений.

Теорема. Пусть $\mathbf{P}$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство, и пусть $X \subset \mathbf{P}$ — квазигладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что либо $\dim X \geq 3$, либо $\dim X = 2$ и $K_X \neq 0$, либо X является рациональной кривой. Тогда $\mathrm{Aut}(X)$ — линейная алгебраическая группа. Далее, пусть Γ — редуктивная подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$. Тогда существует действие Γ на $\mathbf{P}$, индуцирующее действие Γ на X.

Отметим, что утверждение этой теоремы не выполняется для кривых рода 1, являющихся полными пересечениями.

В качестве следствия из приведенного выше результата можно получить следующее утверждение про автоморфизмы гладких взвешенных полных пересечений.

Следствие 4. Пусть $X \subset \mathbf{P}$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что либо $\dim X \geq 3$, либо $\dim X = 2$ и $K_X \neq 0$, либо X является рациональной кривой. Тогда существует действие $\mathrm{Aut}(X)$ на $\mathbf{P}$, индуцирующее действие $\mathrm{Aut}(X)$ на X.

4.6 Взвешенные полные пересечения Фано

В другой совместной работе с В. В. Пржиялковским было доказано следующее утверждение о гладких взвешенных полных пересечениях Фано основной серии.

Теорема. Пусть X — гладкое хорошо сформированное полное пересечение Фано обильных гиперповерхностей в $\mathbf{Q}$-факториальном проективном торическом многообразии Y. Предположим, что $\dim(X) \geq 2$ и $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X) = 1$. Тогда Y является взвешенным проективным пространством.

Список использованных источников

1. V. Przyalkowski, C. Shramov, On automorphisms of quasi-smooth weighted complete intersections, arXiv:2006.01213

2. V. Przyalkowski, C. Shramov, Smooth prime Fano complete intersections in toric varieties, arXiv:2010.14447

Вышли из печати ранее написанные работы:

3. V. Przyjalkowski, C. Shramov, Hodge level for weighted complete intersections, Collectanea Mathematica, 71 (2020), 549–574.

4. V. Przyjalkowski, C. Shramov, Bounds for smooth Fano weighted complete intersections, Communications in Number Theory and Physics, 14 (2020), no. 3, 511–553.

5. I. Cheltsov, A. Kuznetsov, C. Shramov, Coble fourfold, S6-invariant quartic threefolds, and Wiman–Edge sextics, Algebra and Number Theory, 14 (2020), no. 1, 213–274.

6. I. Cheltsov, J. Park, C. Shramov, Delta invariants of singular del Pezzo surfaces, Journal of Geometric Analysis (2020), опубликованно on-line, `https://doi.org/10.1007/s12220-020-00355-9`

4.7 Существование некоторых поверхностей дель Пеццо над конечными полями

Исследование алгебраических многообразий над конечными полями представляет интерес как для фундаментальной, так и для прикладной математики. В случае алгебраических поверхностей одним из наиболее важных классов являются геометрически рациональные поверхности (то есть поверхности, которые бирационально эквивалентны проективной плоскости над алгебраическим замыканием поля), среди которых наибольший интерес представляют поверхности со структурой расслоения на коники над проективной прямой и поверхности дель Пеццо.

На поверхностях дель Пеццо степени 6 и ниже имеется конечное число (-1)-кривых, образующих определённую структуру. Полная группа автоморфизмов этой структуры для поверхностей дель Пеццо степени $6, 5, 4, \ldots, 1$ — это группа Вейля $W(A_1 \times A_2)$, $W(A_4)$, $W(D_5)$, $W(E_6)$, $W(E_7)$ и $W(E_8)$ соответственно. Любая группа, действующая на поверхности дель Пеццо, отображается в соответствующую группу Вейля, причём, если группа действует геометрически, а степень поверхности меньше 6, то такое отображение инъективно. Также в группу Вейля отображается группа Галуа алгебраического замыкания поля. В случае конечного поля образ этой группы — это циклическая подгруппа группы Вейля, порождённая образом автоморфизма Фробениуса. Зная образ группы Галуа в группе Вейля, можно восстановить ряд важных свойств исходной поверхности, например, найти её дзета-функцию, позволяющую подсчитать количество точек поверхности, определённых над основным полем и его всевозможными конечными расширениями. В связи с этим возникает естественный вопрос: для каких конечных полей можно реализовать поверхность дель Пеццо, соответствующую заданной циклической подгруппе в группе Вейля.

Относительно недавно ответ на этот вопрос был известен только в некоторых частных случаях, однако в ряде работ 2017–2020 годов удалось получить практически полный ответ для поверхностей дель Пеццо степени 2 и выше, за исключением пяти случаев.

- X — минимальная поверхность дель Пеццо степени 3, а образ группы Галуа в $W(E_6)$ — циклическая группа порядка 9 (уникальная с точностью до сопряжения);
- X — поверхность дель Пеццо степени 2, а образ группы Галуа в $W(E_7)$ — циклическая группа порядка 9 (уникальная с точностью до сопряжения);
- X — минимальная поверхность дель Пеццо степени 2, а образ группы Галуа в $W(E_7)$ — циклическая группа порядка 18 (уникальная с точностью до сопряжения);
- X — поверхность дель Пеццо степени 2, являющаяся раздутием минимальной поверхности дель Пеццо степени 4, обладающей структурой расслоения на коники, в точке степени 2, а образ группы Галуа в $W(E_7)$ — циклическая группа порядка 4;
- X — минимальная поверхность дель Пеццо степени 2, обладающая структурой расслоения на коники, а образ группы Галуа в $W(E_7)$ — циклическая группа порядка 4.

В этом году в статье [1] были получены полные результаты, над какими конечными полями существуют соответствующие поверхности дель Пеццо. Для случаев (1),

(2) и (3) соответствующие поверхности дель Пеццо существуют над любыми конечными полями, а для случаев (4) и (5) соответствующие поверхности дель Пеццо существуют над всеми конечными полями, кроме поля из двух элементов.

Для построения поверхности из случая (1) в трёхмерном пространстве был построен определённый набор из 9 прямых, переставляемых элементом Фробениуса, и для этого набора было показано, что он содержится в одномерном семействе кубических поверхностей (то есть поверхностей дель Пеццо степени 3). Далее в этом наборе была найдена гладкая поверхность, которую и требовалось построить. Случай (2) получается из случая (1) при раздутии на соответствующей кубической поверхности точки, не лежащей на прямых, содержащихся в этой поверхности. Такая точка всегда существует, поскольку на поверхностях из случая (1) всегда есть точка, при этом на прямых, содержащихся в этой поверхности точек нет. Для получения случая (3) нужно применить к поверхности из случая (2) скрутку Гейзера.

Для случаев (4) и (5) оставалось неизвестным, существуют ли они над полем из трёх элементов. Для случая (5) над полем из трёх элементов была предъявлена явная конструкция такой поверхности, а случай (4) получается из случая (5) при помощи скрутки Гейзера.

Таким образом, для поверхностей дель Пеццо степени 2 и выше проблема полностью решена, а единственным неисследованным случаем остаётся случай поверхностей дель Пеццо степени 1.

Список использованных источников

1. D. Loughran, A. Trepalin„ Inverse Galois problem for del Pezzo surfaces over finite fields, Math. Res. Lett., 27:3 (2020), 845–853

4.8 Особенности экстремальных трехмерных терминальных окрестностей

Ю. Прохоровым совместно с С. Мори (RIMS, Kyoto University) продолжалась работа над долгосрочным проектом по классификации аналитических типов экстремальных стягиваний трехмерных терминальных стягиваний со слоями размерности ≤ 1 (см. [4]).

Экстремальной окрестностью (X, C) называется росток трехмерного нормального комплексного пространства X с терминальными особенностями вдоль компактной неприводимой кривой C такой, что имеется морфизм-стягивание $f : X \to Z \ni o$ с относительно обильным антиканоническим дивизором $-K_X$ и $C = f^{-1}(o)$ [1]. Такие объекты очень важны в трехмерной бирациональной геометрии и естественным образом появляются в процессе определенных бирациональных перестроек.

Первый шаг в классификации экстремальных окрестностей – установить существование "хорошего" элемента в антиканонической линейной системе. Это, так называемая, "гипотеза об общем антиканоническом элементе". В случае неприводимой центральной кривой C эта гипотеза была доказана ранее:

Теорема ([2], [3]). Пусть (X, C) – росток экстремальной окрестности с неприводимой центральной кривой C. Тогда общий элемент $D \in |-K_X|$ является нормальной поверхностью с дювалевскими особенностями.

Следующий результат был доказан в [5].

Теорема. Пусть (X, C) – росток экстремальной окрестности. Предположим, что (X, C) удовлетворяет следующему условию:

– Каждая неприводимая компонента кривой C содержит не более одной точки индекса > 2.

Тогда общий элемент $D \in |-K_X|$ является нормальной поверхностью с дювалевскими особенностями. Более того, для каждой неприводимой компоненты $C_i \subset C$, содержащей две негоренштейновых точек или точку типа (IC) или (IIB), двойственный граф $\Delta(D, C_i)$ имеет ту же форму, что и неприводимый росток экстремальной окрестности (X, C_i) [2].

Список использованных источников

1. Shigefumi Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. J. Amer. Math. Soc., 1(1):117–253, 1988.

2. János Kollár and Shigefumi Mori. Classification of three-dimensional flips. J. Amer. Math. Soc., 5(3):533–703, 1992.

3. S. Mori and Yu. Prokhorov. On **Q**-conic bundles, III. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 45(3):787–810, 2009.

4. Ш. Мори, Ю. Г. Прохоров, *Трехмерные экстремальные окрестности кривой с одной негоренштейновой точкой*, Изв. РАН. Сер. матем., 83:3 (2019), 158–212

5. S. Mori, Yu. Prokhorov, *General elephants for threefold extremal contractions with one-dimensional fibers: exceptional case*, arXiv: 2002.10693, Матем. сб. (в печати)

4.9 Рациональность многообразий Фано-Мукаи над алгебраически незамкнутыми полями

Пусть $\Bbbk$ – произвольное поле нулевой характеристики. Многообразие Мукаи – это (неособое) n-мерное многообразие Фано X некоторым полем $\Bbbk$ такое, что $\mathrm{Pic}(X_{\bar{\Bbbk}}) = \mathbf{Z}\cdot H$ и $-K_{X_{\bar{\Bbbk}}} = (n-2)H$. Мы считаем, что X не является формой полного пересечения во взвешенном проективном пространстве. Для случая, когда $\Bbbk$ алгебраически замкнуто такие многообразия были классифицированы Мукаем [3]. Основным инвариантом многообразия Мукаи X является род $g(X)$, определяемый формулой $2g(X) - 2 = H^n$, где H – обильная образующая группы $\mathrm{Pic}(X)$ и $n = \dim(X)$.

Простое следствие теоремы Мукаи состоит в том, что над произвольным полем $\Bbbk$ нулевой характеристики любое многообразие Фано-Мукаи является $\Bbbk$-формой линейного сечения одного из максимальных многообразий.

До недавнео времени бирациональные свойства многообразий Фано-Мукаи над произвольными полями не были изучены. Цель проекта – восполнить этот пробел. Случай трехмерных многообразий Фано-Мукаи ранее был изучен А. Кузнецовым и Ю. Прохоровым в работе [1], где для них в случае $g \in \{7, 9, 10, 12\}$ был установлен критерий унирациональности и рациональности над произвольным полем $\Bbbk$ (для $g \in \{6, 8\}$ трехмерные многообразия Фано-Мукаи нерациональны даже над алгебраически замкнутым полем). В этом году А. Кузнецовым и Ю. Прохоровым были рассмотрены многообразия Мукаи размерности $n \geq 4$. Основной результат – следующая теорема.

Теорема. Пусть X – многообразие Фано-Мукаи рода $g = g(X)$ и размерности $n = \dim(X)$ такое, что выполнено одно из следующих

– $g \in \{7, 8, 10\}$ и $n \geq 4$ или

– $g = 9$ и $n = 5$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

– X является $\Bbbk$-рациональным;

– X является $\Bbbk$-унирациональным;

– $X(k) = \varnothing$.

В случае $(g, n) = (9, 4)$ имеется эквивалентность (ii) $\iff$ (iii).

Список использованных источников

1. A. Kuznetsov, Yu. Prokhorov, *Rationality of Fano threefolds over non-closed fields*, arXiv: 1911.08949

2. A. Kuznetsov, Yu. Prokhorov, *Rationality of Mukai varieties over non-closed fields*, arXiv: 2003.10761

3. Mukai, S. *Biregular classification of Fano* 3*-folds and Fano manifolds of coindex* 3, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1989, 86, 3000–3002

4.10 Автоморфизмы и гибкость многообразий Фано

Пусть Y – аффинное многообразие над $\mathbf{C}$. Рассмотрим подгруппу $\mathrm{SAut}(Y)$ группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(Y)$, порожденную всеми однопараметрическими унипотентными подгруппами в $\mathrm{Aut}(Y)$. Многообразие Y называется гибким, если $\mathrm{SAut}(Y)$ действует бесконечно транзитивно на множестве гладких точек Y^{smooth}, то есть m-транзитивно для любого натурального числа m. Существует много примеров гибких аффинных многообразий и исследования на эту тему находятся в активной фазе. Для проективного многообразия гибкость аффинных конусов может зависеть от выбора обильной поляризации.

Для плюри-антиканонической поляризации многообразия Фано V, гибкость аффинного конуса Y над V является интересным, но пока плохо изученным свойством V. Среди поверхностей дель Пеццо с их плюри-антиканоническими поляризациями только поверхности степени ≥ 4 имеют гибкие аффинные конусы. Существует много примеров трехмерных многообразий Фано с гибкими аффинными конусами, см., например, обзорную статью [5] и ссылки в ней. Однако известно всего два примера таких четырехмерных многообразий Фано, и одним из них является специальное четырехмерное многообразие Фано-Мукаи рода 10, см. [2]. Ю. Прохоров и М. Зайденберг обобщили последний результат на все четырехмерные многообразия Фано-Мукаи рода 10.

Теорема ([3]). Пусть $V = V_{18}$ – четырехмерное многообразие Фано-Мукаи рода 10. Тогда аффинный конус над V гибок для любой поляризации V.

Доказательство использует критерии гибкости аффинных конусов. Эти критерии основаны на существовании некоторых специальных открытых покрытий подчеркнутого проективного многообразия, например, покрытия гибкими аффинными диаграммами, или подходящими торическими аффинными многообразиями, или аффинными пространствами. Чтобы применить эти критерии, было построено такое покрытие.

Было также завершено описание групп автоморфизмов четырехмерных многообразий Фано-Мукаи рода 10. Связные компоненты единицы этих групп были найдены в предыдущей работе [2]. В этом году были описаны дискретные части. С точностью до изоморфизма существуют три специальные четырехмерные многообразия Фано-Мукаи рода 10 с группами автоморфизмов $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $(\mathbf{G}_{\mathrm{a}} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ и $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2 \rtimes \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ соответственно. Для любого другого четырехмерного многообразия Фано-Мукаи V рода 10 выполнено $\mathrm{Aut}(V) = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2 \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Группы автоморфизмов гладких поверхностей дель Пеццо хорошо изучены. В частности, если X – гладкая поверхность дель Пеццо, то группа $\mathrm{Aut}(X)$ бесконечна, если и только если X является торической. Ю. Прохоров и И. Чельцов получили аналогичный результат для поверхностей дель Пеццо с дювалевская особенностями [4]:

Теорема. Пусть X – дювалевская поверхность дель Пеццо. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ бесконечна тогда и только тогда, когда X принадлежит одному из 53 явно описанных типов.

Этот результат был также независимо доказан в препринте [1] с использованием совершенно другого подхода, который также работает в положительной характеристике.

Из полученной классификации вытекает следующее

Следствие 5 ([4]). Пусть X – дювалевская поверхность дель Пеццо. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ не является редуктивной, если и только если X принадлежит одному из 23 явно описанных типов.

Таким образом, поверхности, перечисленные в этом следствии, не являются K-полистабильными, что, вообще говоря, было известно ранее.

Следствие 6 ([4]). Пусть X – дювалевская поверхность дель Пеццо.

– Если $K_X^2 = 1$ и $\mathrm{Aut}(X)$ бесконечно, то $\rho(X) = 1$;

– Если $K_X^2 > 1$ и $\rho(X) = 1$, то $\mathrm{Aut}(X)$ бесконечна;

– Если $K_X^2 \geq 6$ или $K_X^2 = 5$ и X особа, то $\mathrm{Aut}(X)$ бесконечна.

Отметим, что полная классификация всех поверхностей дювалевская дель Пеццо известна уже давно. Основная проблема заключается в том, что она очень велика и для выбора поверхностей с бесконечной группой автоморфизмов обычно требуется очень много усилий.

Список использованных источников

1. G. Martin, C. Stadlmayr, *Weak del Pezzo surfaces with global vector fields*, arXiv:2007.03665

2. Yu. Prokhorov and M. Zaidenberg, *Fano-Mukai fourfolds of genus* 10 *as compactifications of* $\mathbf{C}^4$, European J. Math., 4(3):1197–1263, 2018

3. Yu. Prokhorov, M. Zaidenberg, Affine cones over Fano-Mukai fourfolds of genus 10 are flexible, arXiv: 2005.12092

4. I. Cheltsov, Yu. Prokhorov, *Del Pezzo surfaces with infinite automorphism groups*, arXiv: 2007.14202

5. I. Cheltsov, J. Park, Yu. Prokhorov, M. Zaidenberg, *Cylinders in Fano varieties*, arXiv: 2007.14207

5 Специальные многообразия

5.1 Гиперкэлеровы многообразия и слоения

В 2020 году, вышла совместная статья сотрудников лаборатории Е. Америк и М. Вербицкого “Collections of Orbits of Hyperplane Type in Homogeneous Spaces, Homogeneous Dynamics, and Hyperkähler Geometry”, International Mathematics Research Notices, Volume 2020, Issue 1, January 2020, Pages 25–38, https://doi.org/10.1093/imrn/rnx319. Это последний этап в доказательстве гипотезы о конусе Каваматы-Моррисона в гиперкэлеровом случае. Также из результатов статьи следует независимость оценки на квадрат Бовилля-Богомолова примитивного класса, порождающего экстремальный луч, от самого многообразия (оценка зависит только от его деформационного типа).

Также Е. Америк написан обзор работы с Вербицким о рациональных кривых на гиперкэлеровых многообразиях Rational curves and MBM classes on hyperkähler manifolds: a survey, он появится в сборнике “Rationality on Algebraic Varieties, Schiermonnikoog volume” в серии Progress in Math.

Статья Е. Америк “Contraction centers in families of hyperkähler manifolds”, тоже совместная с М. Вербицким, переработана в соответствии с отзывом рецензента. Мы надеемся на скорое решение журнала о публикации.

Также проводилась работа над новыми проектами. Во-первых, это доказательство потенциальной плотности рациональных точек на многообразии Калаби-Яу, расслоенном на абелевы поверхности (совместный с Богомоловым). Известно, что на таких многообразиях всегда есть рациональные кривые, не содержащиеся в слоях расслоения. Сотрудники лаборатории надеются доказать, что рациональных или эллиптических кривых достаточно много, чтобы гарантировать потенциальную плотность. Нетрудно видеть (например, из недавней работы Диверио-Фонтанари-Мартинелли), что либо есть трансверсальное эллиптическое расслоение, и тогда плотность очевидна, либо некий дивизор стягивается на кривую. Если кривая не эллиптическая, то плотность тоже легко выводится, и мы пытаемся разобраться с последним случаем. Для многообразий с малым числом Пикара уже разобрались, но общий случай требует доработки.

Во-вторых, это обобщение результата Канта об эргодичности действия группы, порожденной двумя параболическими автоморфизмами поверхности K3, на случай произвольного гиперкэлерова многообразия, в предположении верности лагранжевой гипотезы. Из нее следует, что параболические автоморфизмы бывают лишь у многообразий со структурой абелева расслоения. Мы можем доказать эргодичность в случае, если абелево расслоение, отвечающее хотя бы одному автоморфизму, не изотривиально. Основной элемент доказательства - результаты Делиня о вариациях структур Ходжа.

Результаты исследований докладывались на международных конференциях и семинарах, к сожалению, в онлайн-режиме: Workshop on varieties with trivial canonical class, Luminy, апрель; Европейско-японский симпозиум по гиперкэлеровым многообразиям (миникурс), сентябрь; семинары в Монреале и Форталезе.

5.2 Некэлеровы голоморфно-симплектические многообразия

Целью исследований в этом году также был единственный известный пример некэлерова симплектического односвязного многообразия (так называемого БГ-многообразия), впервые описанного Гуаном и впоследствии изученного Богомоловым. Ранее в совместной работе с М. Вербицким (2019), сотрудник лаборатории Н. Курносов построил форму Богомолова-Бовилля-Фуджики на данном типе многообразий, изучив их теорию деформаций, в частности, показав, что их теория деформаций безпрепятственна.

В совместной работе с Ф. Богомоловым, А. Кузнецовой и Е. Ясинским, Н. Курносовым было показано, что возникающее в результате конструкции Богомолова отображение из БГ-многообразия размерности $2n$ в проективное пространство размерности n является отображением алгебраической редукции. Кроме того было показано, что группа регулярных автоморфизмов БГ-многообразия жорданова. Также была получена частичная классификация подмногообразий БГ-многообразий.

При изучении БГ-многообразий была использована конструкция, описанная в классической статье Ф. Богомолова. Там описывается построение некэлерова многообразия с помощью некэлеровой симплектической поверхности, так называемой поверхности Кодаиры. В схеме Гильберта n точек рассматривается подмногообразие, оно факторизуется по точному действию эллиптической кривой, полученное многообразие называется базой БГ-многообразия и само БГ-многообразие является его конечным накрытием. Исследование конструкции показало, что алгебраическая редукция БГ-многообразия пропускается через алгебраическую редукцию базы и ее образом является проективное пространство. Более того слои алгебраических редукций обоих многообразий это абелевы многообразия. Такая структура расслоения на абелевы многообразия должна сохраняться любым автоморфизмом, это является первым шагом в исследовании группы автоморфизмов БГ-многообразий.

Для более подробного исследования, было исследовано множество вырожденных слоев отображения алгебраической редукции и подмногообразие в проективном пространстве, над точками которого висят слои. Как оказалось, это подмногообразие является дивизором, его особенности стратифицированы своими кратностями. Множество точек максимальной кратности конечно и не содержится в линейном подпространстве. Это позволяет заключить, что группа регулярных автоморфизмов БГ-многообразия жорданова.

Исследование подмногообразий БГ-многообразия проводилось также с использованием конструкции Богомолова. Были изучены подмногообразия в многообразиях, возникающих на каждом шагу конструкции, начиная с общеизвестного случая поверхности Кодаиры. Это позволило показать, что в БГ-многообразии могут присутствовать как алгебраические многообразия (в слоях над точками алгебраической редукции), так и не кэлеровыми (слои над подмногообразиями алгебраической редукции размерности как минимум 2).

5.3 Расслоенния на поверхности Хопфа

В работе ассоциированного сотрудника Лаборатории А. Солдатенкова, изучались гиперкомплексные структуры на компактных многообразиях, расслоенных над кватернионно-кэлеровой базой со слоем, изоморфным поверхности Хопфа. Такие расслоения были построены Саламоном [5] и, в несколько большей общности, Джойсом [2]. Коротко напомним основные шаги данной конструкции.

В качестве базы мы рассматриваем компактное риманово многообразие X одного из двух типов:

(1) X — кватернионно-кэлерово многообразие, $\dim_{\mathbb{R}}(X) = 4n$, $n \geq 2$;

(2) X — четырёхмерное риманово многообразие с антиавтодуальной эйнштейновой метрикой.

Кроме того, мы будем предполагать, что представление голономии связности Леви-Чивита многообразия X неприводимо. Мы будем обозначать группу голономии этой связности через G.

Напомним, что для многообразий типа (1), по определению, $G \subset Sp(n)Sp(1)$, где $Sp(n)Sp(1) = Sp(n) \times Sp(1)/\{\pm 1\}$. Напомним также, что риманов тензор кривизны R канонически разлагается в сумму трёх компонент: кривизны Вейля W, бесследной части кривизны Риччи Ric° и скалярной кривизны S. Известно (см. [1, Chapter 14]), что многообразия типа (1) автоматически являются эйнштейновыми, т.е. для них $Ric^\circ = 0$.

Для многообразий типа (2) имеем: $G \subset SO(4) \simeq Sp(1)Sp(1)$, при этом кривизна Вейля имеет две компоненты $W = W^+ + W^-$. Условие антиавтодуальности означает, что $W^+ = 0$ (заметим, что компоненты $W^\pm$ меняются местами при смене ориентации X; наше условие неявно предполагает, что мы фиксируем ориентацию). Эйнштейновость метрики не следует из антиавтодуальности автоматически, и мы требуем её дополнительно; как будет ясно из дальнейшего обсуждения, многообразия типа (2) являются естественным аналогом кватернионно-кэлеровых многообразий в размерности 4.

Типичными примерами многообразий X являются кватернионные проективные пространства $\mathbb{H}P^n$, в частности четырёхмерная сфера $S^4 \simeq \mathbb{H}P^1$, а также комплексная проективная плоскость с противоположной ориентацией $\overline{\mathbb{C}P^2}$. Заметим, что группа голономии G обычно не сохраняет никакой комплексной структуры, а некоторые из рассматриваемых многообразий, например S^4, вообще не допускают комплексных структур. Тем не менее, существует естественная конструкция главного H-расслоения $\pi\colon \widetilde{X} \to X$, тотольное пространство которого допускает гиперкомплексную структуру, где $H = \mathbb{H}^*/\{\pm 1\}$.

Напомним, что гиперкомплексная структура на многообразии M задаётся тройкой интегрируемых почти-комплексных структур $I, J, K \in \mathrm{End}(TM)$, которые удовлетворяют стандартным кватернионным соотношениям. Для построения H-расслоения $\widetilde{X}$, рассмотрим гомоморфизм групп $G \to H$, получаемый композицией $G \hookrightarrow Sp(n)Sp(1) \to Sp(1)/\{\pm 1\} \hookrightarrow H$. Посредством этого гомоморфизма, каноническое главное G-расслоение над X индуцирует главное H-расслоение, которое мы и обозначаем $\widetilde{X}$. Кроме того, связность Леви-Чивита индуцирует горизонтальное H-инвариантное подрасслоение в $T\widetilde{X}$, и мы получаем разложение в прямую сумму $T\widetilde{X} = T^v\widetilde{X} \oplus T^h\widetilde{X}$ вертикальной и горизонтальной компонент. При этом $T^v\widetilde{X}$ тривиализуется действием H, а $T^h\widetilde{X} \simeq \pi^*TX$. Действие сомножителя $Sp(1) \subset Sp(n)Sp(1)$ на TX задаёт в $\mathrm{End}(TX)$ подрасслоение ранга 3, которое в каждом касательном пространстве индуцирует действие алгебры кватернионов, но, вообще говоря, не тривиализуется над X. При этом обратный образ данного подрасслоения относительно π уже тривиализуется, по построению $\widetilde{X}$, поэтому мы получаем три автоморфизма $I^h, J^h, K^h \in \mathrm{End}(T^h\widetilde{X})$, удовлетворяющих кватернионным соотношениям. Автоморфизмы $I^v, J^v, K^v \in \mathrm{End}(T^v\widetilde{X})$ получаются из тривиализации $T^v\widetilde{X}$ и естественного отождествления слоя этого расслоения с $\mathbb{H}$. Таким образом, на $\widetilde{X}$ построена тройка почти-комплексных структур. Для проверки их интегрируемости существенную роль играют условия на кривизну связности Леви-Чивита на X, в частности условие эйнштейновости.

Построенное многообразие $\widetilde{X}$ некомпактно, но, поскольку $H \simeq SO(3) \times \mathbb{R}_{>0}$, оно допускает действие группы $\mathbb{Z}$ (через вложение в $\mathbb{R}_{>0}$); это действие сохраняет гиперкомплексную структуру. Обозначив фактор по этому действию через M, мы видим, что M является компактным гиперкомплексным многообразием со структурой расслоения $f\colon M \to X$ с гиперкомплексными слоями. Данная конструкция допускает некоторые вариации. Многообразие M по построению является прямым произведением $M' \times U(1)$. Джойс [2] заметил, что, выбрав на X главное $U(1)$-расслоение L с антиавтодуальной связностью, можно M заменить на $M' \times_X L$, и такое многообразие тоже будет обладать гиперкомплексной структурой. При этом часто можно выбрать L так, что полученное многообразие будет односвязным, либо будет иметь конечную фундаментальную группу.

В качестве конкретного примера, рассмотрим $X = \overline{\mathbb{C}P^2}$. В этом случае, описанная выше конструкция даёт гиперкомплексную структуру на многообразии $M = SU(3)$, являющимся группой Ли, при этом $f\colon M \to X$ является отображением факторизации по подгруппе $SU(2) \times U(1)$. Полученная гиперкомплексная структура на M является однородной, и её можно более явно описать в терминах алгебры Ли $\mathfrak{su}(3)$, см. [2], [6].

Построенные гиперкомплексные многообразия M интересны своими необычными свойствами. Как известно (см. [1], [6]), на любом гиперкомплексном многообразии существует единственная связность без кручения, сохраняющая гиперкомплексную структуру, которая называется связностью Обаты. Несложно показать, что связность Обаты на M не сохраняет никакой метрики; кроме того, она не сохраняет касательного пространства к слоям расслоения f. Это существенно отличает построенные многообразия от гиперкэлеровых многообразий, традиционно изучаемых в алгебраической геометрии. Возникает вопрос о том, какова группа голономии связности Обаты на M. Естественным предположением является то, что группа голономии максимальная из возможных, то есть равна $GL(m, \mathbb{H})$, где $\dim_{\mathbb{R}} M = 4m$. В работе [6] это было доказано в случае $M = SU(3)$, описанном выше.

Основным недостатком подхода, использованного в [6] для $M = SU(3)$, является использование классификации неприводимых голономий для связностей без кручения [4]. По сути, одним из шагов доказательства является перебор всех возможных групп голономии из [4] с восьмимерным пространством представления и исключение всех вариантов кроме $GL(2, \mathbb{H})$. Такое доказательство сложно обобщить на произвольное M, кроме того, оно плохо отражает геометрический смысл происходящего. Нашей целью был поиск альтернативного доказательства, которое не использовало бы классификацию [4]. Такое доказательство было найдено, и в этом наш основной результат. Идея состоит в следующем. Как и в [6], в качестве первого шага, нужно показать, что представление голономии связности Обаты на M неприводимо. Это можно сделать, используя неприводимость голономии связности Леви-Чивита на базе X. Далее, заметим, что группа $GL(m, \mathbb{H})$ является вещественной формой группы $GL(2m, \mathbb{C})$, и достаточно доказать, что комплексификация группы голономии совпадает с $GL(2m, \mathbb{C})$. Для этого удобно воспользоваться теоремой Костанта [10]. Учитывая неприводимость представления голономии, из теоремы Костанта следует, что достаточно в алгебре Ли группы голономии найти элемент, который не является нильпотентным и имеет ранг 1 как эндоморфизм $\mathbb{C}^{2m}$. В ряде случаев такой элемент несложно найти, например для $M = SU(3)$ его существование следует из несложного явного вычисления.

Таким образом, нами разработан новый подход к вычислению группы голономии связности Обаты для описанного выше класса гиперкомплексных многообразий. Этот подход является более гибким по сравнению с [6] и допускает обобщение на случай произвольных многообразий описанного класса.

Список использованных источников

1. A. Besse, Einstein manifolds, Springer, 1987.

2. D. Joyce, Compact hypercomplex and quaternionic manifolds, J. Differential Geom. 35 (1992), 743–761.

3. B. Kostant, A characterization of the classical groups, Duke Math. J. 25 (1958), 107–123.

4. S. Merkulov, L. Schwachhöfer, Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections, Ann. of Math. (2) 150 (1999), no. 1, 77–149.

5. S. Salamon, Quaternionic Kähler manifolds, Invent. Math. 67 (1982), 143–171.

6. A. Soldatenkov, Holonomy of the Obata connection on SU(3), Int. Math. Res. Not. (2012), no. 15, 3483–3497.

5.4 Метрика Фейкс-Каледина и (гипер)кэлеровы факторы

Основной темой исследований стажра лаборатории А. Абашевой в последний год стало изучение поведения метрики Фейкс–Каледина ([7],[10]) на тотальных пространствах кокасательных расслоений при взятии факторов по действию групп Ли, а также связь свойств этой метрики с геометрией многообразия. По итогам был опубликован препринт [1]. Также А. Абашева участвовала и организовывала несколько семинаров.

В основе работы А. Абашевой в этом направлении лежит теорема, доказанная независимо Бирте Фейкс ([7]) и Дмитрием Калединым ([10]). Пусть M гладкое комплексное многообразие. Рассмотрим тотальное пространство X кокасательного расслоения к M. На нем имеется стандартная голоморфно-симплектическая форма Ω. В то время как на компактных кэлеровых многообразий наличие голоморфно-симплектической формы гарантирует наличие гиперкэлеровой метрики согласно теореме Яу ([12]), на некомпактных многообразиях применять теорему Яу нельзя. Теорема Фейкс–Каледина дает частичный ответ на вопрос о существовании гиперкэлеровой метрики на тотальных пространствах кокасательных расслоений к кэлеровым многообразиям. Говоря конкретнее, пусть теперь M – кэлерово многообразие с аналитической кэлеровой формой. Тогда на некоторой окрестности $U \subset X$ нулевого сечения существует естественная $U(1)$-инвариантная гиперкэлерова метрика, которая дает исходную кэлерову метрику при ограничении на M. Соответствующая этой гиперкэлеровой метрике голоморфно-симпплектическая форма есть не что иное как стандартная форма Ω.

В общем случае неверно, что метрика Фейкс–Каледина определена на всем X ([7]). Поэтому имеет смысл описать примеры кэлеровых многообразий M, таких что на $X = T^*M$ метрика Фейкс–Каледина определена глобально.

В работе [4] доказано, что если M – торическое многообразие с инвариантной относительно действия вещественного тора кэлеровой формой, то на X определена метрика Фейкс–Каледина. Хорошо известно, что такие торические кэлеровы многообразия получаются кэлеровой редукцией $\mathbb{C}^N$ по действию тора. Абашевой удалось обобщить этот результат на кэлеровы факторы относительно произвольной компактной группы.

Теорема: ([1]) Пусть M гладкий кэлеров фактор векторного пространства $\mathbb{C}^N$ с постоянной кэлеровой формой по линейному действию компактной группы K. Тогда на $X := T^*M$ определена метрика Фейкс–Каледина.

Подобного рода результат был также сформулирован и доказан для негладкого случая.

В доказательстве теоремы используется следующее наблюдение: многообразие X вкладывается в качестве плотного открытого множества в гиперкэлеров фактор многообразия $T^*\mathbb{C}^N$ по действию K. Гиперкэлеров фактор $X' := (T^*\mathbb{C}^N)///K$, будучи полным метрическим многообразием, является метрическим пополнением многообразия X и в то же время является гиперкэлеровым многообразием. Его геометрию оказывается изучать проще, чем геометрию многообразия X. В частности Абашевой был доказан следующий результат:

Теорема: ([1]) Рассмотрим многообразие X' как комплексное многообразие с комплексной структурой $J \in \mathbb{H}$. Это многообразие обладает естественной алгебраической структурой и является аффинным.

Интересен вопрос, когда метрика Фейкс–Каледина на X полна (то есть $X = X'$). Гипотетически необходимое условие для полноты метрики Фейкс–Каледина таково:

Гипотеза: ([3]) Пусть M компактное кэлерово многообразие. Предположим, что метрика Фейкс–Каледина на $X := T^*M$ существует и полна. Тогда касательное расслоение к M численно эффективно.

Р. Белявски доказал эту гипотезу ([3]) по модулю того, что при условиях гипотезы отображение моментов для действия $U(1)$ на X является исчерпывающей функцией. Абашевой удалось доказать последний факт в случае, когда M – кэлеров фактор, и тем самым подтвердить гипотезу Белявского в данном случае ([1]).

Вышеизложенные результаты вошли в бакалаврскую дипломную работу А. Абашевой в НИУ ВШЭ, и в ее же магистерскую дипломную работу в НМУ. Оба диплома были успешно защищены в июне 2020 года. В июле эти результаты были выложены в качестве препринта на arxiv. Текст принят к публикации в International Mathematics Research Notices, и в настоящий момент А. Абашева дополняет его в соответствии с замечаниями рецензентов.

5.5 Положительность касательного расслоения и скрученные кокасательные

Упоминаемые выше результаты А. Абашевой указывают на связь между положительностью касательного расслоения к многообразию M, полнотой метрики Фейкс–Каледина, а так же аффинностью/Штейновостью многообразия $X = T^*M$ с комплексной структурой J. Последнее комплексное многообразие несложно определить также и в случае, когда на X не определена метрика Фейкс–Каледина ([1]), оно называется скрученным кокасательным и зависит только от выбора кэлерового класса.

Гипотеза: Пусть M комплексное проективное многообразие (соотв. многообразие Фано). Следующие условия на M эквиваленты:

– Касательное расслоение к M численно эффективно (соотв. численно эффективно и объемно);

– Для любого обильного класса на M соответствующее скрученное кокасательное является Штейновым многообразием (соотв. аффинным многообразием);

– Для любого обильного класса на M существует представляющая его кэлерова форма ω такая, что на $X = T^*M$ определена метрика Фейкс–Каледина, дающая при ограничении на M исходную кэлерову метрику. Более того эта метрика Фейкс–Каледина полна.

В настоящее время А. Абашева работает над тем, чтобы доказать (или опровергнуть) данную гипотезу. Работы разных авторов ([4],[9],[11]) позволяют полностью подтвердить данную гипотезу для торических многообразий. Недавно Абашевой удалось доказать импликацию (1) $\Rightarrow$ (2) для многообразий Фано. В работе [8] частично доказывается импликация (2) $\Rightarrow$ (1), а именно авторами было получено, что аффинность скрученного кокасательного гарантирует объемность касательного расслоения. Их результат помог Абашевой доказать эквивалентность (1) и (2) для поверхностей дель Пеццо. Есть основания полагать, что работа над этой гипотезой может помочь продвинуться в сторону доказательства гипотезы Кампаны–Петернелла ([5]), которая утверждает, что многообразия Фано с численно эффективным касательным расслоением гипотетически рационально однородны.

Кроме того, за последний год А. Абашевой были сделаны следующие доклады на учебно-исследовательских семинарах:

– Интересные геометрические структуры на касательных группах Ли, по [2] и частичным собственным результатам, семинар Геометрические структуры на многообразиях, матфак ВШЭ, ноябрь 2019;

– Almost Hermitian structures on tangent Lie groups, по [2] и частичным собственным результатам, Geometric structures on manifolds seminar, IMPA, Rio de Janeiro, февраль 2020;

– Теорема Амброуза–Зингера для семейств, по [6], ZoomerFest, zoom, май 2020;

– Three pillars of geometric invariant theory, обзорный доклад, GIT learning seminar, Columbia University, zoom, сентябрь 2020.

Также до января 2020 Абашева участвовала в организации семинара Лаборатории Алгебраической Геометрии, а с сентября 2020 является одним из организаторов GIT learning seminar в Columbia University.

Список использованных источников

1. Abasheva, A. (2020), Feix–Kaledin metric on the total spaces of cotangent bundles to Kähler quotients, Int. Math. Res. Not., to appear, arXiv:2007.05773.

2. Agricola, I.; Ferreira, A. C. (2017), Tangent Lie groups are Riemannian naturally reductive spaces, Adv. Appl. Clifford Algebras, 895-911, arXiv:/1603.06211.

3. Bielawski, R., private communication.

4. Bielawski, R.; Dancer, A. S. (2000), The geometry and topology of toric hyperkähler manifolds, Comm. Anal. Geom.8(4), 727-760.

5. Campana, F.; Peternell, Th. (1991), Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective, Math. Ann. 289(1), 169-187.

6. Cleyton, R.; Moroianu, A.; Semmelmann, U. (2018), Metric connections with parallel skew-symmetric torsion, arXiv:1807.00191.

7. Feix, B. (2001), Hyperkähler metrics on cotangent bundles, J. reine angew. Math. 532, 33-46.

8. Greb, D.; Wong, M. L. (2020) Canonical complex extensions of K?hler manifolds, J. London Math. Soc. 101 no. 2, 786-827, arXiv:1807.01223.

9. Hsiao, J. Ch. (2015), A remark on bigness of the tangent bundle of a smooth projective variety and D-simplicity of its section rings, J. Algebra Appl. 14.

10. Kaledin, D. (2000), Hyperkähler structures on total spaces of holomorphic cotangent bundles, in D. Kaledin, M. Verbitsky, New constructions of hyperkahler manifolds, Intl. Press, Cambridge, MA, arXiv:math/0011256 [math.AG].

11. Yang, Q. (2015), Toric Fano manifolds with nef tangent bundles, arXiv:1506.05565.

12. Yau, Sh. T. (1978), On the Ricci curvature of a compact K?hler manifold and the complex Monge-Amp?re equation. I, Commun. Pure Appl. Math. 31 (3), 339-411.

5.6 Характеристические слоения

В работе ассоциированного сотрудника Лаборатории Р. Абугалиева изучались характеристические слоения гиперповерхностей на голоморфно симплектических многообразиях.

Пусть (X, σ) голоморфно симплектическое многообразие и Y гладкая гиперповерхность в X. Поскольку форма σ симлектическая, T_Y содержит свой ортогонал, и ранг этого ортогонала равен 1 в каждой точке Y. Таким образом, мы получили линейное подрасслоение $F = T_Y^{\perp}$ в касательном расслоение к Y. Это и называется характеристическим слоением. Любое регулярное слоение ранга 1 локально представляют собой векторное поле. Листами слоения мы называем траектории этого векторного поля. Если все листы слоения представляют собой алгебраические кривые, мы называем слоение алгебраически интегрируемым. Заметим, что если X это поверхность, то Y это кривая, характеристическое слоение совпадает со всем касательным пространством к Y, а

Y и является его единственным листом. Поэтому, изучать листы характеристического слоения имеет смысл, только если $\dim X \geq 4$.

Первыми задачу изучения листов характеристического слоения начали изучать Э. Фивег и Дж.-М. Хванг. В работе [5] им удалось доказать, что если Y – многообразие общего типа, то его характеристическое слоение не может быть алгебраически интегрируемым. Е.Ю. Америк и Ф. Кампане в работе [2] удалось усилить это результат. А именно, им удалось доказать характеристическое слоение Y алгебраически интегрируемо только тогда, когда гиперповерхность Y покрывается рациональным кривыми (напомним, что многообразие общего типа покрываться рациональными кривыми не может).

Если слоение не интегрируемо, то можно попытаться узнать, что является наименьшим алгебраическим многообразием, содержащим его общий лист. Ф. Кампана предсказал размерность этих многообразий в зависимости от гиперповерхности Y.

Гипотеза 1. Пусть X голоморфно симплектическое многобразие, Y гладкая гиперповерхность в X и q квадратичная форма Бовиля-Богомолова-Фуджики на $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q})$. Тогда возможны три случая:

– Значение $q(Y)$ отрицательно, и характеристическое слоение Y алгебраически интегрируемо.

– Значение $q(Y)$ равно нулю, и размерность наименьшего алгебраического многообразия, содержащее общий лист характеристического слоения Y, в два раза меньше размерности X.

– Значение $q(Y)$ положительно, и наименьшее алгебраическое многообразие, содержащее общий лист характеристического слоения Y, и есть гиперповерхость Y.

Доказать гипотезу в первом случае не представляется сложным. По результатам из работы С. Буксома [3], в случае отрицательного $q(Y)$, гиперповерхность Y покрывается рациональными кривыми. Не трудно увидеть, что рациональные кривые, заметающие Y и являются листами характеристического слоения Y.

Во втором случае наибольший интерес представляют многообразия X, снабжённые лагранжевым расслоением π. Гипотетически, базой этого расслоения является проективное пространство. Если Y это прообраз, некоторой гиперповерхности $D \subset \mathbb{P}^n$ (см. диаграмму ниже), то её квадрат Бовиля-Богомолова-Фуджики равен нулю. В работе [1] нам удалось доказать гипотезу Кампаны для таких гиперповерхостей Y. А именно, наименьшим алгебраическим многообразием, содержащим общий лист характеристического слоения Y, является слой лагранжевого расслоения π.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ D \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd} \tag{5.6.1}$$

Наконец, третий случай гипотезы Кампаны также был нами изучен. Полученные результаты готовятся к публикации. В частности, была доказана гипотеза Кампаны для гладкой численно эффективной и объёмной гиперповерхности. Далее мы объясняем важность численно эффективных и объёмных гиперповерхностей среди остальных гиперповерхностей с положительным квадратом Бовиля-Богомолова-Фуджики.

В работе [4] Д. Матсушита и Д.-К. Жанг доказали, что из любого неприводимого дивизора в X с $q(Y) > 0$ можно сделать объёмный и численно эффективный дивизор с помощью некоторой "перестройки". То есть, существует такое голоморфно симлектическое многообразие X' бирациональным отображением ψ в X и численно эффективным дивизором Y', что дивизор Y является собственным образом дивизора Y' (см. диаграмму ниже).

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\ X' \arrow[r, dashed, "\psi"] & X \end{tikzcd} \tag{5.6.2}$$

Пользуясь этим результатом и тем, что утверждение гипотеза Кампаны сохраняется при бирациональном отображении, мы можем полагать, что большинство гладких гиперповерхностей с $q(Y) > 0$ бирациональны (как на диаграмме 5.6.2) гладкой численно эффективной и объёмной гиперповерхности. Исключением являются гладкие гиперповерхности Y с особой численно эффективной моделью Y' (Примеры таких Y и Y' нам пока не известны).

Список использованных источников

1. R. Abugaliev, Characteristic foliation on vertical hypersurfaces on holomorphic symplectic manifolds with Lagrangian Fibration , препринт `arXiv:1909.07260`.

2. E. Amerik and F. Campana,Characteristic foliation on non-uniruled smooth divisors on projectivehyperkaehler manifolds , Journal of the London Mathematical Society (2014).

3. S. Boucksom, Divisorial zariski decompositions on compact complex manifolds, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (2004), 45-76

4. D. Matsushita and D.-Q. Zhang, Zariski f-decomposition and lagrangian fibration on hyperkahler manifolds, Mathematical Research Letters20(200907)

5. J.-M. Hwang and E. Viehweg,E. , Characteristic foliation on a hypersurface of general type in a projectivesymplectic manifold, prepublication électronique, Compositio Mathematica **146** (2009).

5.7 Теоремы конечности для орбит параболической группы на сферических многообразий

Действия редуктивных алгебраических групп на алгебраических многообразиях играют фундаментальную роль в современной математике: в том числе алгебраической геометрии, теории представлений, а также современной математической физике. Рассмотрим действие алгебраической редуктивной группы на алгебраическом многообразии. Одним из классических предметов исследования теории действий является исследование орбит борелевской подгруппы, а именно, максимальной разрешимой группы. В частности интересно исследовать подобные орбиты на однородных пространствах. Это обусловлено тем, что орбиты действия борелевской подгруппы на обобщенном многообразии флагов над полем комплексных чисел или вещественных чисел дают клеточное разбиение этого многообразия. Различные свойства клеточного разбиения, соответствующего разбиению на B-орбиты, обобщенных многообразий флагов были исследованы в работах Шуберта, Брюа, Шевалле, Гельфанда И.М., Гельфанда С.И., Бернштейна, Рамануджама, Раманана и многих других. Из сказанного выше, естественно возникает проблема о полном комбинаторном описании орбит борелевской группы на произвольном однородном пространстве, которая является наиболее осмысленной для класса так называемых сферических многообразий введенным Д.Луной, Т.Вюстом и М.Брионом, то есть таких многообразий, в которых содержится открытая орбита борелевской подгруппы. В 1986 Э.Б.Винбергом и независимо М.Брионом, для сферических многообразий, была доказана теорема о конечности числа орбит борелевской подгруппы. Оба независимых доказательства были основаны на методе U-инвариантов, введенном Х.Крафтом, который лег в основу так называемой конструкции орисферического стягивания, построенной В.Л.Поповым. Позднее, Фридрих Кноп, основываясь на идеях Мацуки, предложил другое доказательство этого факта, основанное на разнесении орбит борелевской подгруппы с помощью минимальных параболических подгрупп.

Текущие исследования сотрудников лаборатории по этой теме направлены на исследования действий алгебраических групп на многообразиях над алгебраически незамкнутыми полями и обобщение на этот случай результатов ранее известных в случае алгебраически замкнутых полей. В случае алгебраически незамкнутых полей существует аналог понятия сферичности, где роль борелевской подгруппы играет минимальная параболическая подгруппа, определенная над основным полем. Она характеризуется тем, что является стабилизатором точки максимального полного однородного пространства определенного над основным полем k, доминирующего все полные однородные пространства данной группы. Итак пусть G — редуктивная группа, определенная над алгебраически незамкнутым полем (например полем вещественных или p-адических чисел), действующая на алгебраическом многообразии, определенным над k. И пусть P-минимальная параболическая подгруппа, определенная над полем k. Многообразие называется k-сферическим, если P имеет в нем открытую орбиту, и множество

k-точек плотно по Зарисскому. Орбиты с плотным по Зарисскому множеством k-точек назовем k-плотными. В случае совершенных полей достаточно требовать наличие хотя бы одной точки, определенной над k в открытой P-орбите. Сотрудником лаборатории В.С.Жгуном совместно с Ф.Кнопом доказана теорема конечности для множества k-плотных P-орбит на сферическом многообразии для локально-компактных полей, опубликованная в работе Zhgoon V., Knop F. "On the Complexity of Reductive Group Actions over Algebraically Nonclosed Field and Strong Stability of the Actions on Flag Varieties" // Doklady Mathematics. 2019. Vol. 99. No. 2. P. 132-136. В связи с данной формулировкой результата возникает естественный вопрос, по какой причине рассматривается лишь множество k-плотных орбит. Дело в том, что легко привести пример эквивариантного вложения анизотропной группы с непустым множеством k-точек (в этом случае, совпадает со своей минимальной параболической подгруппой) граница которого содержит бесконечное число орбит, однако ни на одной из этих орбит не будет k-точек. Несколько ранее появилось доказательство этого факта над полем вещественных чисел, полученное в работе Кретца, Шлихтруля 2016 года, основанное на полной классификации сферических подгрупп над вещественными числами. В отличие от этой работы, наше доказательство является концептуальным и подходит для p-адических полей, где не ясно как подойти к вопросу классификации. В случае алгебраически замкнутых полей Ф.Кнопом в 1996 году было введено действие группы Вейля W на множестве орбит Борелевской группы. Это действие интересно с нескольких точек зрения. Во-первых оно позволяет описать интересные подмножества в множестве B-орбит. Например можно рассмотреть W-орбиту открытой клетки. Множество борелевских орбит, входящих в эту орбиту соответствует множеству смежных классов $W/W_{(X)}$, что обобщает знаменитое разложение Брюа для обобщенных многообразий флагов. Более того можно показать, что это множество состоит в точности из орбит максимального ранга. Также хорошо известно, что группа $W_{(X)}$, разлагается в полупрямое произведение подгруппы Леви некоторой параболической подгруппы связанной с многообразием которая является нормализатором открытой B-орбиты, и другой группы, которая назывется малой группой Вейля. Малая группа Вейля связана с разложением Штейна для отображения моментов для кокасательного расслоения и является группой порожденной отражениями, что является интересным и глубоким результатом.

В 2020 году сотрудников лаборатории В.С.Жгуном совместно с Ф.Кнопом были проведены исследования в направлении обобщения указанных результатов на случай алгебраически незамкнутого поля.

Основным результатом является следующая теорема: Для k-сферических многообразий на множестве k-плотных орбит минимальной параболической группы, обладающих максимальным рангом, было построено действие ограниченной группы Вейля (то есть группы Вейля максимального расщепимого тора). Более того, было показано, что это множество состоит из одной орбиты этой группы, а также была построена естественная эквивариантная относительно действия ограниченной группы Вейля биекция между множеством k-плотных орбит минимальной параболической группы максимального ранга и подмножеством компонент поляризованного кокасательного расслоения.

В случае поля вещественных чисел было получено действие ограниченной группы Вейля на множестве всех k-плотных орбит минимальной параболической подгруппы на k-сферическом многообразии. Конструкция этого действия основано на конструкции алгебры Гекке. Ограничения связанные с полем являются техническими, а их причина заключается в том, что авторам не известна теория когомологий, подходящая для решения этой задачи. Тем не менее авторы работают над поиском подобной теории. Эти результаты вошли в работу Жгун В. С., Кноп Ф. О действии ограниченной группы Вейля на множестве орбит минимальной параболической подгруппы // Доклады Академии Наук. Математика. 2019. Т. 490. С. 29-34

Также результаты исследований были доложены на следующих научных мероприятиях:

Научный семинар (Workshop) “Algebra, Geometry and quantization”, МФТИ, 07.12.2019 “Геометрия кокасательного расслоения и действие группы Вейля на орбитах минимальной параболической подгруппы”

Семинар лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ (Москва). Доклад: On complexity of algebraic varieties over algebraically non-closed fields

Восьмая школа-конференция “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов” (Москва). Доклад: О действии группы Вейля на орбитах борелевской погруппы предмаксимального ранга.

На математическом факультете ВШЭ В.С.Жгуном были прочитаны следующие курсы

Algebraic Geometry: A First Geometric Look (Дисциплина общефакультетского пула; где читается: Факультет математики; 3, 4 модуль)Анг Введение в алгебраические группы и их инварианты (Дисциплина общефакультетского пула; где читается: Факультет математики; 3, 4 модуль) Введение в алгебраическую теорию чисел (Дисциплина общефакультетского пула; где читается: Факультет математики; 1, 2 модуль)

5.8 Гессиановы и самоподобные многообразия

В этом году стажер лаборатории П. Осипов завершил работу [1], поданную в журнал Transforamtion groups. Основные результаты работы таковы.

Самоподобное многообразие — это риманово многообразие (M, g) с полем ξ, таким что $\mathcal{L}_\xi g = 2g$. Примером самоподобного гессианова многообразия является риманов конус $(M \times \mathbb{R}^{>0}, t^2 g_M + dt^2)$. В работе описана структуру самоподобных многообразий.

Теорема 5.1 ([1]). Любое глобальное самоподобное многообразие (C, g, ξ) изоморфно следующему:

(i) $\left(\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \left(dx^i\right)^2, \rho + a\eta\right)$, где $a \in \mathbb{R}$, $\rho = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ — радиантное векторное поле и $\eta = \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(x^{2i-1}\frac{\partial}{\partial x^{2i}} - x^{2i}\frac{\partial}{\partial x^{2i-1}}\right)$;

(ii) $\left(\hat{M} = M \times \mathbb{R}^{>0}, \hat{g} = s^2 g_M + s ds \cdot \alpha + ds^2, s\frac{\partial}{\partial s}\right)$, где s — координта на $\mathbb{R}^{>0}$, g_M — риманова метрика M, α — 1-форма на M и

$$g_M(X,X) + 2\alpha(X) + 1 > 0, \quad \text{for any} \quad X \in TM.$$

Любое самоподобное многообразие локально изоморфно глобальному самоподобному.

Самоподобное многообразие (M, g, ξ) называется потенциальным, если ξ является градиентом функции.

Теорема 5.2 ([1]). Пусть (M, g, ξ) глобальное потенциальное самоподобное многообразие.

(i) Если ξ зануляется в какой-то точке, то (M, g, ξ) — евклидово пространство с радиальным векторным полем $\left(\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n (dx^i)^2, \sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$;

(ii) Если ξ не зануляется ни в какой точке, то (M, g, ξ) является римановым конусом.

Гессианово многообразие — это плоское аффинное многообразие с римановой метрикой, локально являющейся гессианом функции.

Самоподобным гессиановым многообразие (M, ∇, g, ξ) называется гессианово многообразие (M, ∇, g)б оснащённое векторным полем ξ, таким что поток вдоль ξ сохраняет аффинную структуру и (M, g, ξ) является самоподобным многообразием.

Поле ρ на плоском аффинном многообразие (M, ∇) называется радиантным, если $\nabla\rho = \mathrm{Id}$. Назовём самоподобное гессианово многообразие (M, ∇, g, ξ) радиантным, если существует такое $\lambda \neq 0$, что $\lambda\xi$ — радиантное векторное поле.

Теорема 5.3 ([1]). Пусть (C, ∇, ξ) — самоподобное гессианово многообразие. Поле ξ потенциально тогда и только тогда, когда (C, ∇, ξ) локально изоморфно прямому произведению радиантных гессиановых многобразий. Кроме того, если пол ξ потенциально и зануляется в какой-то точке, то (C, ∇, g, ξ) радиантное Гессианово многообразие с радиантным векторным полем $\rho = \xi$.

В настоящий момент, П. Осипов работает по двум основным темам.

5.8.1 Однородные самоподобные гессиановы и локально конформно кэлеровы структуры

Открытый выпуклый конус $V \subset \mathbb{R}^n$ называется регулярным, если он не содержит ни одной полной прямой. Трубчатая окрестность регулярного выпуклого конуса $V + \sqrt{-1}\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ биголоморфна ограниченно области в $\mathbb{C}^n$. Все комплескные области, возникающие таким образом, называются областями Зигеля первого рода. Мы будем рассматривать аффинные автоморфизмы конусом и комплексные аффинные автоморфизмы соответствющих трубчатых областей. В этих соглашениях область $V + \sqrt{-1}$

однородна тогда и только тогда когда конус V однороден. Однородная область Зигеля первого рода допускает инвариантную кэлерову структуру ([2]).

Осипов модифицирует конструкцию инвариантной кэлеровой структуры на однородных областях зигеля первого рода для получения некоторого класса инвариантных (глобально) конформно кэлеровых многообразий. В частности, он строит инвариантную конформно кэлерову структуру на областях зигеля первого рода.

Теорема 5.4. Пусть (M, ∇, g, ξ) односвязное самоподобное гессианово многообразие, ξ полно и G — группа аффинных изометрий (M, ∇, g) сохраняющих ξ. Положим, что G действует свободно и транзитивно на линии уровня $\{g(\xi, \xi) = 1\}$. Тогда TM допускает однородную конформно кэлерову структурую

Для окончания работы планируется исследовать кривизну полученных конформно кэлеровых метрика, а так же получить аналогичную конструкцию при переходе от комплексной структуре на M к геперкомплексной на TM. Предполагаемый результат следующий: пусть M — однородное локально конформно кэлерово многообразие, тогда существует инвариантная вайсманова локально конформно гиперкэлерова структура на TM.

5.8.2 Унимодулярные локально конформно кэлеровы алгебры Ли

Точной локально конформно кэлеровой (l.c.K.) алгеброй ли называется набор $(\mathfrak{g}, \Omega = d\eta + \theta\eta, I)$, где η — 1 форма, θ — замкнутая 1-форма, I — комплексная структура и $\Omega*, I*$ — положительно определена. Симплектическим дифференцирование на симплектической алгебре Ли $(\mathfrak{g}, \omega)$ называется отображение $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ удовлетворяющее условиям $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$ и $\omega(DX, Y) + \omega(X, DY) = 0$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Осиповым доказана следующая теорема:

Теорема 5.5. Имеется 1-1 соответствие между $2n + 2$-мерными унимодулярными точными l.c.K. алгебрами Ли $2n$-мерными унимодулярными кэелеровыми алгебрами ли, оснащёнными симплектическими дифференцированиями.

Унимодулярные кэлеровы алгебры Ли описаны. Таким образом требуется описать сиплектические дифференцирования на унимодулярных кэлеровых алгебрах Ли.

Список использованных источников

1. P. Osipov *Selfsimilar Hessian manifolds*, preprint, arXiv:1908.01731.

2. E. B. Vinberg, S. G. Gindikin, I. I. Piatetskii-Shapiro, *Classification and canonical realization of complex homogeneous domains*, Trans. Moscow Math. Soc., 12(1963), 404-437.

5.9 Автоморфизмы и вайсмановы многообразия

В отчетный период, стажер лаборатории Н. Клемятин работал по двум связанным между собой темам.

5.9.1 Действие группы автоморфизмов некэлерова многообразия на когомологиях Дольбо и Ботта-Черна

Пусть (M, J, ω) – комплексное эрмитово многообразие, не допускающее кэлерову метрику. Так как M некэлерово, то различные группы когомологий (когомологии де Рама, когомологии Дольбо и когомологии Ботта-Черна) вообще говоря не совпадают. Поэтому представляет интерес то, каковы взаимоотношения между данными группами когомологий, а также встает вопрос того, как вычислить эти группы.

Один из способов сделать это – вычислять через комплекс форм, инвариантных относительно компактной группы автоморфизмов, т.е. усреднять классы когомологий по голоморфному действию компактной группы. К сожалению, когомологии Дольбо и Ботта-Черна не являются гомотопическими инвариантами, а значит то рассуждение, которое работает для когомологий де Рама, не проходит в нашем случае (хотя оно проходит в случае кэлеровых многообразий, с помощью теории Ходжа). Поэтому первый шаг на этом пути – доказать то, что мы можем усреднять по действию голоморфной группы автоморфизмов.

Следующая теорема была доказана Клемятиным в [1] (Теорема 1.1)

Теорема 5.6. Пусть G – комплексная группа Ли, действующая на компактном эрмитовом многообразии (M, J, ω) голоморфными изометриями. Тогда индуцированное действие G на когомологиях Дольбо и Ботта-Черна тривиально.

5.9.2 Приложение к вайсмановым многообразиям

Одним из важнейших примеров некэлеровых многообразий являются локально конформно кэлеровы многообразия, а среди них – вайсмановы многообразия.

Определение 2. Многообразие (M, J, ω) называется локально конформно кэлеровым, если $d\omega = \theta \wedge \omega$. Очевидно, что форма θ замкнута. Оно называется вайсмановым, если форма θ параллельна относительно связности Леви-Чивита нашей эрмитовой метрики.

Нетрудно видеть, что всякое вайсманово многообразие локально конформно кэлерово.

Можно показать, что определение локально конформно кэлерова многообразия эквивалентно следующему: многообразие M допускает универсальное накрытие, которое кэлерово и фундаментальная группа действует гомотетиями на этом накрывающем пространстве.

Примерами вайсмановых многообразий являются многообразия Хопфа.

Вайсмановы многообразия обладают специальным слоением, которое называется каноническим слоением вайсманова многообразия. Это слоение отвечает интегрируемому распределению, которое порождено векторными полями, двойственными к $\theta^{1,0}$ и $\theta^{0,1}$.

Пользуясь Теоремой 1, Клемятин доказал следующую теорему (см. теорему 1.2 в [1])

Теорема 5.7. Когомологии Дольбо вайсманова многообразия M устроены следующим образом:

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(M) = \begin{cases} \frac{H_b^{p,q}(M)\oplus\theta^{0,1}\wedge H_b^{p,q-1}(M)}{\mathrm{Im}(L_{\omega_0})}, \ p+q \le \dim_{\mathbb{C}}(M) \\ \mathrm{Ker}(L_{\omega_0})\Big|_{H_b^{p,q}(M)\oplus\theta^{0,1}\wedge H_b^{p,q-1}(M)}, \ p+q > \dim_{\mathbb{C}}(M) \end{cases}$$

Здесь $H_b^{p,q}(M)$ обозначает базисные когомологии Дольбо для канонического слоения на вайсмановом многообразии.

Эта теорема была первоначально доказана в [2] с помощью довольно трудоемких вычислений. Клемятину удалось дать более короткое и концептуальное доказательство данной теоремы.

Список использованных источников

1. Nikita Klemyatin, Dolbeault cohomology of compact complex manifolds with an action of a complex Lie group, J. Geom. Phys., Volume 157, November 2020, 103823.

2. K. Tsukada, Holomorphic forms and holomorphic vector fields on compact generalized Hopf manifolds, Compositio Mathematica, Volume 93 (1994) no. 1, 1-22.

5.10 Автоморфизмы, слоения и симплектическая геометрия

Продолжая работу в симплектической геометрии, совместно с М. Энтовым, сотрудник лаборатории М. Вербицкий в отчетный период готовил 2 статьи. В статье “Rigidity of Lagrangian embeddings into symplectic tori and K3 surfaces” доказывается, что класс когомологий лагранжева тора с нулевым индексом Маслова в K3-поверхности и торе примитивный. В статье “Kahler-type embeddings into symplectic tori and hyperkahler manifolds” доказано, что пространство симплектических вложений заданного набора шаров в гиперкэлерово многообразие или тор стягиваемо.

Совместно с Е. Америк, Вербицкий готовил работу об эргодичности действия группы автоморфизмов на гиперкэлеровом многообразии, допускающем некоммутирующие параболические автоморфизмы.

Совместно с Ливиу Орнеа, Вербицкий готовил работу о числе замкнутых траекторий поля Риба на сасакиевом многообразии. Было доказано, что их число не меньше суммы чисел Бетти кэлерова орбиобразия, полученного из этого сасакиева многообразия факторизацией по действию окружности.

Кроме того, Вербицким опубликован препринт "Classification of holomorphic Pfaff systems on Hopf manifolds" (Mauricio Correa, Antonio M. Ferreira, Misha Verbitsky) посвященный классификации голоморфных слоений на поверхности Хопфа; там доказано, что для общей поверхности Хопфа все голоморфные слоения линейны, и препринт "Sections of Lagrangian fibrations on holomorphically symplectic manifolds and degenerate twistorial deformations" (Fedor Bogomolov, Rodion Deev, Misha Verbitsky), где доказано, что любое гладкое сечение голоморфного лагранжева слоения становится голоморфным после подходящей деформации комплексной структуры ("вырожденной твисторной деформации").

В отчетный период Вербицким ппубликованы следующие статьи. Во-первых, статья "Algebraically hyperbolic manifolds have finite automorphism groups" (Fedor A Bogomolov, Ljudmila Kamenova, Misha Verbitsky, Communications in Contemporary Mathematics), где доказан следующий разультат. Пусть M - алгебраически гиперболическое многообразие, то есть такое, что для любой комплексной кривая степени d и рода g выполнено неравенство g> c d для достаточно маленькой константы c. Тогда у M конечная группа автоморфизмов. Это утверждение очевидно для многообразий, гиперболических по Кобаяши; гипотетически, условие гиперболичности по Кобаяши эквивалентно алгебраической гиперболичности, и наш результат является аргументом в пользу этой гипотезы.

Во-вторых, в журнале Transformation Groups была опубликована статья "Twisted Dolbeault cohomology of nilpotent Lie algebras" (совместная с Liviu Ornea). В этой статье была доказана теорема о занулении когомологий Дольбо нильпотентной алгебры Ли с коэффициентами в локальной системе. В числе приложений, получено простое доказательство классификации локально конформно кэлеровых нильмногообразий, и контрпример к версии теоремы Консоле-Фино с коэффициентами в локальной системе.

Наконец, в журнале Mathematische Annalen (377 (1-2), 115-121) вышла статья "Multiplicity of singularities is not a bi-Lipschitz invariant" L. Birbrair, A. Fernandes, J.E. Sampaio, M Verbitsky. В этой статье использована топологическая классификация 5-многообразий для описания классов билипшицевой эквивалентности изолированных особенностей 6-мерных многообразий. Получен контрпример к гипотезе о билипшицевой инвариантности кратности такой особенности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что по результатам проведенных работ, описанным в настоящем отчете, можно сделать следующие краткие выводы. Во-первых, все запланированные на год работы были Лабораторией полностью и успешно проведены. Во-вторых, работы выполнены на самом высоком научно-техническом уровне, сравнимым с лучшими достижениями в данной области и в чем-то даже превосходящем их. В-третьих, работы могут быть и будут успешно применены в дальнейших работах по теоретической математике. В-четвертых, как и с любыми другими работами в области теоретической математики, непосредственное внедрение их в текущую технико-экономическую деятельность не представляется возможным, и в планы не входит.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В заключение отчета, мы приводим список публикаций лаборатории, и список препринтов, подготовленных к печати.

Публикации лаборатории

– Verbitsky M., Liviu O. Hopf surfaces in locally conformally Kahler manifolds with potential // Geometriae Dedicata. 2020. Vol. 207. P. 219-226.

– Bogomolov F. A., Blum-Smith B. Purely noncommuting groups // European Journal of Mathematics. 2019. Vol. 5. No. 4. P. 1173-1191.

– Amerik E. Negative Rational Curves and Their Deformations on Hyperkähler Manifolds, in: Birational Geometry and Moduli Spaces Vol. 39. Springer, 2020. doi Ch. 1. P. 1-11.

– Amerik E., Verbitsky M. Collections of Orbits of Hyperplane Type in Homogeneous Spaces, Homogeneous Dynamics, and Hyperkähler Geometry // International Mathematics Research Notices. 2020. Vol. 2020. No. 1. P. 25-38.

– Cheltsov I., Kuznetsov A. G., Shramov K. Coble fourfold, S_6-invariant quartic threefolds, and Wiman-Edge sextics // Algebra and Number Theory. 2020. Vol. 14. No. 1. P. 213-274.

– Ostrik V. On symmetric fusion categories in positive characteristic // Selecta Mathematica, New Series. 2020. Vol. 26. P. 1-19.

– Abramyan S. Iterated higher Whitehead products in topology of moment-angle complexes // Siberian Mathematical Journal. 2019. Vol. 60. No. 2. P. 185-196.

– Verbitsky M., Birbrair L., Fernandes A., Sampaio J. E. Multiplicity of singularities is not a bi-Lipschitz invariant // Mathematische Annalen. 2020. Vol. 377. No. 1-2. P. 115-121.

– Cheltsov I., Shramov K. Finite collineation groups and birational rigidity // Selecta Mathematica, New Series. 2019. Vol. 25. No. 5. P. 71.

– Cheltsov I., Martinez-Garcia J. Unstable polarized del Pezzo surfaces // Transactions of the American Mathematical Society. 2019. Vol. 372. No. 10. P. 7255-7296.

– Cheltsov I., Zhang K. Delta invariants of smooth cubic surfaces // European Journal of Mathematics. 2019. Vol. 5. P. 729-762.

– Kaledin D. B., Konovalov A., Magidson K. Спектральные алгебры и вырождение некоммутативной спектральной последовательности Ходжа-де Рама // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2019. Vol. 307. P. 63-77. doi

– Kuznetsov A. G., Debarre O. Gushel-Mukai varieties: Linear spaces and periods // Kyoto Journal of Mathematics. 2019. Vol. 4. No. 59. P. 897-953.

– Прохоров Ю. Г. Рациональность трехмерных многообразий Фано с терминальными горенштейновыми особенностями // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2019. Т. 307. С. 230-253.

– Prokhorov Y. Log canonical degenerations of del Pezzo surfaces in Q-Gorenstein families // Kyoto Journal of Mathematics. 2019. Vol. 59. No. 4. P. 1041-1073.

– Soukhanov L. 2-Morse Theory and the Algebra of the Infrared // Journal of Geometry and Physics. 2020. Vol. 149. P. 1-9.

– Timorin V., Shepelevtseva A. Invariant Spanning Trees for Quadratic Rational Maps // Arnold Mathematical Journal. 2019. Vol. 5. P. 435-481.

– Логинов К. В. О нерациональных слоях в расслоениях на поверхности дель Пеццо над кривой // Математические заметки. 2019. Т. 106. С. 881-893.

– Timorin V., Ptacek R., Oversteegen L., Blokh A. Laminational models for some spaces of polynomials of any degree // Memoirs of the American Mathematical Society. 2020. Vol. 265. No. 1288. P. 1-116.

– Lowen W., Sioen M., Van den Haute W. Frames of continuous functions // Topology and its Applications. 2020. Vol. 273. P. 106974.

– Lekili Y., Polishchuk A. Derived equivalences of gentle algebras via Fukaya categories // Mathematische Annalen. 2020. Vol. 376. P. 187-225.

– Polishchuk A., Lekili Y. A modular compactification of $M_{1,n}$ from A^{∞}-structures // Journal fuer die reine und angewandte Mathematik. 2019. Vol. 2019. No. 755. P. 151-189. doi

– Verbitsky M., Kamenova L. Pullbacks of hyperplane sections for Lagrangian fibrations are primitive // Communications in Contemporary Mathematics. 2019. Vol. 21. No. 8. P. 1850065.

– Bogomolov F. A., Kamenova L., Verbitsky M. Algebraically hyperbolic manifolds have finite automorphism groups // Communications in Contemporary Mathematics. 2020. Vol. 22. No. 2. P. 1950003.

– Cheltsov I., Park J., Shramov K. Delta Invariants of Singular del Pezzo Surfaces // Journal of Geometric Analysis. 2020.

– Ballet S., Zykin A. I. Dense families of modular curves, prime numbers and uniform symmetric tensor rank of multiplication in certain finite fields // Designs, Codes and Cryptography. 2019. Vol. 87. No. 2-3. P. 517-525.

- Goncharov E. A., Finkelberg M. V. Coulomb Branch of a Multiloop Quiver Gauge Theory // Functional Analysis and Its Applications. 2019. Vol. 53. P. 241-249.
- Michael Finkelberg, Krylov V., Mirkovic I. Drinfeld-Gaitsgory-Vinberg interpolation Grassmannian and geometric Satake equivalence // Journal of Topology. 2020. Vol. 13. No. 2. P. 683-729.
- Bigeni A., Feigin E. Symmetric Dellac configurations and symplectic/orthogonal flag varieties // Linear Algebra and its Applications. 2019. Vol. 573. P. 54-79.
- Kuznetsov A. G., Smirnov M. On residual categories for Grassmannians // Proceedings of the London Mathematical Society. 2020. Vol. 120. No. 5. P. 617-641.
- Shramov K. Birational automorphisms of Severi-Brauer surfaces // Sbornik Mathematics. 2020. P. 466-480.
- Lekili Y., Polishchuk A. Homological mirror symmetry for higher-dimensional pairs of pants // Compositio Mathematica. 2020. Vol. 156. No. 7. P. 1310-1347.
- Жгун В. С., Кноп Ф. О действии ограниченной группы Вейля на множестве орбит минимальной параболической подгруппы // Доклады Академии Наук. Математика. 2019. Т. 490. С. 29-34.
- Glutsyuk A., Netay I. V. On Spectral Curves and Complexified Boundaries of the Phase-Lock Areas in a Model of Josephson Junction // Journal of Dynamical and Control Systems. 2020. Vol. 26. P. 785-820. doi
- Bogomolov F. A., Tschinkel Y. Noether's problem and descent, in: Proceedings of the Seventh International Congress of Chinese Mathematicians Vol. 1. Boston : International Press of Boston Inc, 2019. Ch. 1. P. 3-15.

Препринты лаборатории

- Prokhorov Y., Cheltsov I., Zaidenberg M., Park J. Cylinders in Fano varieties / Cornell University. Series arxive "math". 2020.
- Prokhorov Y., Cheltsov I. Del Pezzo surfaces with infinite automorphism groups / Cornell University. Series arxive "math". 2020.
- Prokhorov Y., Kuznetsov A. G. Rationality of Mukai varieties over non-closed fields / Cornell University. Series arxive "math". 2020.
- Prokhorov Y., Zaidenberg M. Affine cones over Fano-Mukai fourfolds of genus 10 are flexible / Cornell University. Series arxive "math". 2020.
- Loginov K., Birkar C. Bounding non-rationality of divisors on 3-fold Fano fibrations / Cornell University. Series arxive "math". 2020.

– Kuznetsov A. G., Prokhorov Y. Rationality of Fano threefolds over non-closed fields / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

– Shramov K. Finite groups acting on Severi-Brauer surfaces / Cornell University. Series arxive "math". 2020.

– Shramov K., Przyjalkowski V. On automorphisms of quasi-smooth weighted complete intersections / Cornell University. Series arxive "math". 2020.

– Kuznetsov A. G., Debarre O. Gushel–Mukai varieties: intermediate Jacobians / Cornell University. Series arxive "math". 2020.

– Kuznetsov A. G., Smirnov M., Belmans P. Derived categories of the Cayley plane and the coadjoint Grassmannian of type F / Cornell University. Series arxive "math". 2020.

– Abasheva A. Feix-Kaledin metric on the total spaces of cotangent bundles to Kähler quotients / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2020. No. arXiv:2007.05773.

– Rogov V. Non-algebraic deformations of flat Kähler manifolds / Cornell University. Series arxive "math". 2019.

– Bogomolov F. A., Kurnosov N., Kuznetsova A., Yasinsky E. Geometry and automorphisms of non-Kähler holomorphic symplectic manifolds / Cornell University. Series arxive "math". 2020.

– Cheltsov I., Przyjalkowski V. Fibers over infinity of Landau-Ginzburg models / Cornell University. Series arxive "math". 2020.

– Cheltsov I., Kishimoto T., Dubouloz A. Toric G-solid Fano threefolds / Cornell University. Series arxive "math". 2020.

– Markaryan N. S. Weyl n-algebras and the Swiss cheese operad / Cornell University. Series arxive "math". 2020.

– Bogomolov F. A., Lukzen E. Stable vector bundles on the families of curves / Cornell University. Series arxive "math". 2020.

– Markaryan N. S. On generalized stuffle relations between cell-zeta values / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2020.