Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
Профиль 020 «Прикладная математика и информатика»

Время выполнения задания — 240 мин.
Решения олимпиадных заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается из 10 баллов, максимальная сумма — 100 баллов.

1. Найти $\det(e^A)$ - определитель матричной экспоненты для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 19 & -48 \\ 8 & -21 \end{pmatrix}$$

2. Найдите функцию $y = y(x)$ такую, что

$$\frac{dy}{dx} = y + \int_0^1 xy(x)dx, \quad y(0) = 1.$$

3. Назовем турниром ориентированный граф $G = (V, E)$ такой, что $(x, x) \notin E$ для любой вершины $x \in V$, а для любых двух различных вершин $x \neq y$, $x, y \in V$ либо $(x, y) \in E$, либо $(y, x) \in E$.

Множество вершин назовем игроками, каждая пара игроков ровно один раз встречаются на матче, если игрок x выигрывает у игрока y, то $(x, y) \in E$. Гамильтоновым путем графа назовем перестановку вершин $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что для всех i игрок x_i выигрывает у x_{i+1}. Покажите, что найдется такой турнир на n вершинах, для которого число гамильтоновых путей не меньше чем $n!/(2^{n-1})$.

4. Верно ли, что в любом непланарном графе есть цикл длины 3 или 4?

5. На плоскости проведено 30 прямых общего положения (это означает, что никакие 2 не параллельны и никакие 3 не пересекаются в одной точке). Все точки пересечения покрашены в 2 цвета. Известно, что число одноцветных треугольников делится на 11. Докажите, что число разноцветных треугольников не делится на 11.

6. Назовём **правильными скобочными последовательностями** семейство строк, состоящих из символов `'('` и `')'`, определяемое следующими свойствами:

- пустая строка — правильная скобочная последовательность;
- правильная скобочная последовательность, взятая в скобки — правильная скобочная последовательность (то есть если S — правильная скобочная последовательность, то и (S) — правильная скобочная последовательность);
- конкатенация двух правильных скобочных последовательностей — тоже правильная скобочная последовательность.

1) Предложите алгоритм, который для заданной строки $s_1 \ldots s_n$, состоящей из символов `'('` и `')'`, определяет, существует ли i, для которого $s_{i+1} \ldots s_n s_1 \ldots s_i$ — правильная скобочная последовательность. Оцените время его работы и затраты дополнительной памяти.

Time to complete the task is 240 min.
Solutions should be written in English or Russian language. A solution of each problem costs 10 points, the maximum sum equals to 100 points.

1. Calculate $\det(e^A)$, the determinant of exponential matrix, for the matrix

2. Calculate the function $y = y(x)$ given that

3. Tournament is a directed graph $G = (V, E)$, such that $(x, x) \notin E$ for any vertex $x \in V$, and for every two vertices $x \neq y$, $x, y \in V$ either $(x, y) \in E$, or $(y, x) \in E$.

A set of vertices is called players, every player encounters every other player exactly once, if player x beats player y, then $(x, y) \in E$. Hamiltonian path is a permutation of vertices $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in such a way that for every i a player x_i beats x_{i+1}. Show that there is a tournament of n vertices that contains at least $n!/(2^{n-1})$ Hamiltonian paths.

4. Is it true that any non-planar graph has cycles of length 3 or 4?

5. A plane contains 30 straight lines of general position (if no two of them are parallel, and no three of them meet in the same point). All the points of intersection are colored with two colors. It is known that the number of unicolorous triangles is divisible by 11. Prove that the number of multicolored triangles is not divisible by 11.

6. Let **correct bracket sequence** be a collection of strings, consisting of the symbols `'('` and `')'`, with given properties:

- an empty string is a correct bracket sequence;
- a correct bracket sequence in parentheses is a correct bracket sequence (meaning if S is a correct bracket sequence, then (S) is also a correct bracket sequence);
- concatenation of two correct bracket sequences is also a correct bracket sequence.

1) For a given string $s_1 \ldots s_n$, consisting of symbols `'('` и `')'`, propose an algorithm determining the existence of i for which $s_{i+1} \ldots s_n s_1 \ldots s_i$ is a correct bracket sequence. Assess the amount of time and additional storage needed to execute it.

2) Оптимизируйте процедуру так, чтобы она работала за $O(n)$ операций.

2) Optimize the procedure so that it executes in $O(n)$ operations.

7. Предложите алгоритм, позволяющий выбрать из массива `A[1:n]` два максимальных элемента, используя не более $n +]\log n[$ сравнений (здесь $]\cdot[$ означает взятие верхней целой части, то есть наименьшего целого числа, большего или равного заданного).

7. Propose an algorithm for finding two maximal elements from the array `A[1:n]` in no more than $n +]\log n[$ comparison operations (there $]\cdot[$ is a ceiling function which outputs the least integer greater than or equal to the given one).

8. Специалист по машинному обучению пытается решить некоторую задачу. Для этого он берёт случайную модель, которая определяется случайной величиной $q \backsim N(0, \sigma^2)$ с настоящей оценкой качества (с максимальным значением величины $\hat{q} \backsim q + N(0, \sigma^2)$). Он повторяет выбор модели сто раз и отбирает из них модель с наилучшей оценкой качества $\hat{q}_{max}$. Какое математическое ожидание настоящего качества q_{max} выбранной модели при условии, что её оценённое качество оказалось единично $\hat{q}_{max} = 1$?

Замечание: Рассмотрим величину $M = max_{i \in 100}(q_i + \xi_i)$, где ξ_i – случайный шум, распределенный по нормальному закону, $\xi_i \backsim N(0, \sigma^2)$. Найдите значение математического ожидания выбранного q_i при условии $M_i = 1$.

8. A machine learning specialist is solving a task. He evaluates the real quality of a random model $q \backsim N(0, \sigma^2)$ (getting maximal value of $\hat{q} \backsim q + N(0, \sigma^2)$). He repeats sampling 100 times and chooses a model with the best quality estimation $\hat{q}_{max}$. What is the expected value of the real quality rate q_{max} of the chosen model, given that $\hat{q}_{max} = 1$? normally distributed noise

Note: Consider the value $M = max_{i \in 100}(q_i + \xi_i)$, where ξ_i is normally distributed noise, $\xi_i \backsim N(0, \sigma^2)$. Calculate the expected value of the chosen q_i considering $M_i = 1$.

9. Поверхность некоторой шарообразной планеты состоит из океана и суши (множество мелких островков). Суша занимает больше половины площади планеты. Также известно, что суша есть множество, принадлежащее борелевской σ-алгебре на сфере.

На планету хочет совершить посадку космический корабль, сконструированный так, что концы всех 2020 его ножек могут лежать на поверхности планеты. Посадка окажется успешной, если не меньше 1011 ножек из 2020 окажутся на суше. Всегда ли возможна успешная посадка корабля на планету?

9. The surface of some spherical planet consists of oceans and land (lots of little islands). More than a half planet's surface is covered with land. It is also a known fact that the land is a set belonging to Borel σ-algebra on sphere.

A spaceship wants to land on the planet. The spaceship is designed such that the end of his 2020 legs can lay on the planet's surface. The landing is successful if at least 1011 of 2020 legs lay on the land. Is landing can be always completed successfully?

10. Дана матрица покупок двумя пользователями трех товаров: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) (3 балла) Найдите такие булевы матрицы P и Q ($P_{il}, Q_{lj} \in \{0, 1\}$), что $A = P \circ Q^T$ или в покомпонентной форме $A_{ij} = \bigvee_{l=1}^{k} P_{ik} \cdot Q_{kj}$.

2) (7 баллов) Используя определение сингулярного разложения матрицы, найдите U, Σ и V. Известно, что $\sigma_1 = \sqrt{2}$.

Определение. Для матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m} (n < m)$, ее сингулярное разложение имеет вид $A = U \Sigma V^T$, где $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — ортогональная матрица левых сингулярных векторов ($UU^T = I$), $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – ортогональная матрица правых сингулярных векторов ($VV^T = I$), Σ – матрица сингулярных чисел $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$, такая что $\Sigma_{ii} = \sigma_i$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$), а $\Sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

10. There is a user-item matrix of purchasing three items by two users: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) (3 points) Find the boolean matrices P and Q ($P_{il}, Q_{lj} \in \{0, 1\}$), such that $A = P \circ Q^T$ or in element-wise form $A_{ij} = \bigvee_{l=1}^{k} P_{ik} \cdot Q_{kj}$.

2) (7 points) Based on the definition of singular value decomposition find U, Σ и V. It is known that $\sigma_1 = \sqrt{2}$.

Definition. For matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m} (n < m)$, its singular value decomposition is $A = U \Sigma V^T$, where $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a left-singular vectors orthogonal matrix, ($UU^T = I$), $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ is a right-singular vectors orthogonal matrix ($VV^T = I$), Σ is a matrix of singular values $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$, such that $\Sigma_{ii} = \sigma_i$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$), and $\Sigma_{ij} = 0$ with $i \neq j$.