

Направление: «230. Прикладная математика»

Треки:

«Математические методы анализа в экономике»	Код – 230.1
«Математические методы в прикладной социальной психологии»	Код – 230.2
«Математические методы в социологии»	Код – 230.3
«Прикладная математика в инженерии и естественных науках»	Код – 230.4

Время выполнения – 240 мин.

Максимальный балл – 324.

ИНВАРИАНТНАЯ ЧАСТЬ

Задание 1 (11 баллов).

По 21 наблюдению из нормального распределения с неизвестными математическим ожиданием и дисперсией был оценен 90% доверительный интервал для матожидания: [0.825; 11.175]

- 1) Можно ли на основе этих данных утверждать, что гипотеза о равенстве математического ожидания рассматриваемой случайной величины нулю $H_0: \mu = 0$ отвергается на 10% уровне значимости?
- 2) Найдите выборочное среднее и выборочную оценку дисперсии
- 3) Проверьте гипотезу $H_0: \mu = 2$ на 5% уровне значимости

Задание 2 (11 баллов).

Рассмотрите фрагмент данных проведённого в России исследования об использовании информационно-коммуникационных технологий. В ходе психологического опроса респонденты ответили на два вопроса, в частности.

Вопрос 1: «Сколько часов в день Вы проводите в интернете – по работе или с личными целями?».

Вопрос 2: «Укажите, пожалуйста, ваш возраст».

Можно ли считать два этих показателя линейно коррелированными? Рассчитайте коэффициенты корреляции Пирсона. Интерпретируйте полученные ответы. Осуществите проверку статистической значимости коэффициента, приняв уровень доверительной вероятности равным 0,95. Интерпретируйте полученный ответ. Ответьте на вопрос о том, есть ли справедливые основания утверждать на уровне доверительной вероятности 0,95, что в среднем участники исследования проводят в интернете около 4 часов, используя методику расчета доверительного интервала.

Респондент	Время, проведённое в интернете, ч.	Возраст
1. Алексей	1	21
2. Мария	3	32
3. Екатерина	2	27
4. Дмитрий	5	34
5. Николай	4	32
6. Александр	6	34
7. Ольга	7	37

Задание 3 (11 баллов).

В ходе небольшого исследования, посвящённого теме *бюджета времени* и выборка которого случайна, в 2012 году приняли участие 4 девушки, студентки второго курса (которые в течение определённого периода заполняли специальные дневники, фиксируя информацию о том, сколько времени они выделяют на те или иные виды деятельности). Так, было зафиксировано, сколько обычно часов в неделю они расходуют *на отдых и развлечения*. Спустя год, в 2013 году исследование повторили (с тем же составом участников и по той же схеме). Были получены следующие результаты:

(в ячейках указаны данные о еженедельных расходах времени на отдых и развлечения)

	Катерина	Ольга	Алла	Луиза
Данные 2012 года (учились на 2 курсе)	30 часов	37 часов	45 часов	34 часов
Данные 2013 года (перешли на 3 курс)	21 часов	35 часов	40 часов	34 часов

Можно ли сказать (при имеющихся данных), что с возрастом (по мере перехода на более старший курс обучения в университете) девушки склонны в меньшей степени тратить время на отдых и развлечения? Проверку соответствующей статистической гипотезы реализуйте на уровне доверительной вероятности 0,95 против *направленной* альтернативной гипотезы.

Задание 4 (11 баллов).

Привести пример матриц A и B , таких что $B \cdot A = I$, $B \cdot A \neq I$ где I – единичная матрица.

ВАРИАТИВНАЯ ЧАСТЬ

Трек 230.1. «Математические методы анализа в экономике»

Задание 5 (7 баллов).

Evaluate the following limit:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \left[x \left(\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) - \ln \frac{x}{2} \right) \right]$$

Задание 6 (7 баллов).

Analyze the presence and nature of a conditional extremum:

A) Function. $F(x, y) = x^2 + y^2 + 2 - 2(x + y)$

B) Constraint. $G(x, y) = \sqrt{y^2 + x^2 + 4(1 - x) - 2y(x - 2)} = 4$. Constraint contains the point $(x, y) = (6, 2)$.

Задание 7 (7 баллов).

Solve the following differential equation: $y dx = (x^2y + x) dy$

Задание 8 (7 баллов).

A statistician estimates the mean of a normal population with known variance σ^2 from a sample that consists of n independent observations. Find the confidence level for the following intervals:

a) $\bar{X} - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

b) $\bar{X} - 1.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 2.5\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Here μ denotes the population mean and \bar{X} denotes the sample mean.

Standard normal cumulative distribution function $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, $Z \sim N(0, 1)$.

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

Задание 9 (7 баллов).

Random variables X_1, \dots, X_n are independent and identically distributed with the following probability density function:

$$f(x; a) = a + 2x(1 - a), x \in [0; 1]$$
$$f(x; a) = 0 \text{ otherwise}$$

Here $a \in [0; 2]$ is an unknown parameter.

- a) Random variable $\hat{a} = m - 3(X_1 + X_2)$ is an unbiased estimator for a . What is the value of m ?
b) Derive the method of moments estimator for a .

Задание 10 (7 баллов).

Let

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \dots$$

Find the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4^n \sin(\pi \xi 2^{n^2}))$$

or prove that this limit does not exist.

Задание 11 (7 баллов).

For each $n \geq 2$, let A_n be the $n \times n$ matrix (a_{ij}) satisfying

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 - n & \text{if } i = j \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

i.e.

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 - n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 - n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 - n \end{pmatrix}$$

Prove that the matrix A_n is invertible and find A_n^{-1}

Задание 12 (7 баллов).

N points are selected randomly and independently in the segment $[0, 1]$ of the axis Ox of the coordinate plane Oxy (the distance from each of them to the origin is a uniformly distributed random variable). An ant is placed at each of the selected points. At the zero moment of time, each ant begins to move at a constant speed 1 in the positive direction of the axis Oy (perpendicular to Ox). When an ant reaches the straight line $x + y = 1$, it stops and no longer moves. Let the random variable Y be the moment when the last ant stops moving.

- (a) Find the cumulative distribution function of Y .
(b) Find the expected value of Y .

Трек 230.2. «Математические методы в прикладной социальной психологии»

Задание 13 (28 баллов).

Consider a compound contingency table that illustrates the age group to which participants belong, and information about the degree of their agreement with the following statement – «I use social networks for fun», one of which was asked in the psychological research related to social networks:

Age group of respondents	The degree of agreement with the statement («...for fun»)				
	Never	Less than once a month	1 time per month	Few times a week	Daily
18-19 (young age)	1	9	16	38	27
30-59 (adulthood)	19	11	11	11	7

Make contingency table analysis using the chi-square test, calculate and analyze standardized residuals. Carry out the hypothesis test at the significance level $\alpha=.10$.

Note. The task solving and interpretation of results must be in English. Answers in Russian will not be taken into account by the commission.

Задание 14 (28 баллов).

One well-known business magazine decided to find out whether the attitudes of women to start their own business affect the duration of their consumption of the magazine's content. The study analyzes women who are: a) extremely interested in starting their own business, b) very interested in starting their own business, c) weakly interested in starting their own business, and d) not at all interested in starting their own business. Thus, the studied variable is the time that a woman spends looking at the content of a given magazine during the week (in hours). Below is a table of data obtained during the study. For each category of women, the number of hours devoted to consuming the content of the magazine is indicated, as well as their number in the group:

Extremely interested	Very interested	Weakly interested	Not at all interested
21,16,9,18,19,9,8,19,17	8,10,11,7,13,15,12,16,18,20	6,8,7,9,7,6,3	0,4,6,8,2,4,6,4,8,2,1
$n_1=9$	$n_2=10$	$n_3=7$	$n_4=11$

Does the duration of viewing the content of this business magazine depend on the attitude of women towards starting their own business? Assume the confidence level when testing the null hypothesis equal to .95.

Note. The task solving and interpretation of results must be in English. Answers in Russian will not be taken into account by the commission.

Трек 230.3. «Математические методы в социологии»

В рамках трека вам предлагается **выбрать** из 4 вопросов **два** и написать по ним **два мини эссе**, направленных на использование математических методов и социологическую интерпретацию результатов.

Задание 15 (28 баллов).

Проведено исследование среди малых предпринимателей Москвы и Архангельска. На основе указанных респондентами **мотивов** создания своего дела были выделены три группы малых предпринимателей: **Профессионалы** (рассматривают дело как реализацию себя в своей профессии), **Инноваторы** (готовы к риску и хотят реализовать свои идеи) и **Семейный бизнес** (занимаются семейным делом, в частности, продолжают дело родителей).

В таблице даны основные параметры групп, а также средние оценки:

1. успешности их бизнеса:

«Как Вы оцениваете финансовый результат Вашего бизнеса в настоящее время?» (ответ по 5-балльной шкале, где 1 – очень сложное положение, ... 5 – можно назвать очень успешным)

2. решения продолжать свой бизнес:

«Думали ли Вы о закрытии своего предприятия?» (ответ по 5-балльной шкале, где 1 – Никогда не было такой мысли, а 5 - Я уже почти принял(-а) это решение).

	Группы предпринимателей			По всей выборке
	Профессионалы	Инноваторы	Семейный бизнес	
<i>N</i>	54	47	41	142
<i>Возраст* (лет), среднее</i>	32,8	36,0	38,3	35,5
<i>Стандартное отклонение</i>	9,4	10,0	9,1	9,7
<i>Стаж ведения бизнеса* (лет), среднее</i>	5,1	7,1	8,6	6,7
<i>Стандартное отклонение</i>	3,9	6,6	8,02	6,3
<i>Наличие образования, связанного со сферой предприятия (% по столбцу)</i>	55,6	44,7	39,0	47,2
Оценка финансовой успешности своего бизнеса*				
<i>Средняя оценок</i>	4,02	3,38	3,61	3,60
<i>Стандартное отклонение</i>	0,85	0,94	0,99	0,95
Решение продолжать свое дело*				
<i>Средняя оценок</i>	1,8	2,02	2,34	2,00
<i>Стандартное отклонение</i>	1,2	1,18	1,17	1,19

* Переменные имеют нормальное распределение

Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига», 2 этап, 2021 г.

Задание:

- 1) На основе имеющихся данных проверьте гипотезу о связи мотивов открытия своего бизнеса с его финансовой успешностью и решением его продолжать. При выборе критерия проверки гипотезы дайте подробное обоснование.
- 2) По итогам проверки гипотезы предложите свою интерпретацию полученных результатов.

Задание 16 (28 баллов).

В рамках исследовательского проекта, посвященного влиянию Антитабачного законодательства на снижение распространения курения в России, социологи обратились к анализу **социально-экономических факторов** потребления табачных изделий. Для достижения поставленной цели была применена бинарная логистическая регрессия. В качестве **зависимой переменной** выступил следующий вопрос «Вы курите в настоящее время?» (ответ по дихотомической шкале, где 0 – «Нет, не курю», 1 – «Да, курю»). Ряд характеристик (пол, наличие высшего образования, семейное положение, наличие проблем со здоровьем) также измерялись в дихотомической шкале (см. таблицу ниже), в то время как показатели «самооценка здоровья» (1 – «Хорошее здоровье», 2 – «Среднее здоровье» и 3 – «Плохое здоровье») и «удовлетворенность жизнью» (1 – «Удовлетворены жизнью», 2 – «Средне удовлетворены», 3 – «Не удовлетворены») – в порядковой.

Независимые переменные	B	Стандартная ошибка	Вальд	Значимость	Exp(B)
Мужской пол (женский пол = 0)	0,978	0,259	4,272	0,000	2,658
Возраст (в годах)	0,105	0,03	11,978	0,001	1,900
Наличие высшего образования (0 – отсутствие ВО)	-0,488	0,202	5,845	0,016	0,614
Состоит в браке (не состоит в браке = 0)	-0,388	0,23	2,852	0,091	0,678
Количество своих детей младше 18 лет	-0,057	0,007	8,607	0,000	0,745
Логарифм собственных доходов	0,408	0,098	1,227	0,000	1,504
Наличие проблем со здоровьем в последнее время (0 – нет проблем)	-0,259	0,16	4,071	0,006	0,326
Среднее здоровье	0,894	0,976	2,201	0,074	1,019
Плохое здоровье	-0,861	3,001	9,135	0,001	0,951
Средне удовлетворены жизнью	0,174	8,423	5,254	0,295	2,233
Не удовлетворены жизнью	0,963	0,942	3,984	0,032	1,728
Константа	-0,489	0,076	1,693	0,043	0,513

Задание:

- 1) Представьте общую спецификацию (уравнение) регрессионной модели. Уровень

Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига», 2 этап, 2021 г.

доверительной вероятности равен 0,95. Опишите контрольную группу. Что означает константа?

2) Дайте содержательную интерпретацию результатов регрессионной модели. Какие факторы повышают/снижают вероятность курения?

3) Представьте, что Респондент А имеет следующие характеристики: мужчина, 28 лет, не женат и нет детей, имеет высшее образование и ежемесячный доход в размере 100.000 рублей ($\lg=5$), имеет хорошее здоровье и не имел серьезных проблем со здоровьем в последнее время, средне удовлетворен жизнью. Рассчитайте для респондента с указанными характеристиками вероятность курения.

4) Какие факторы исследователи не учли в модели? Какие переменные Вы бы добавили в качестве предикторов? Предложите методику их измерения, сформулировав вопрос и варианты ответа к нему.

Задание 17 (28 баллов).

Основным исследовательским вопросом группы ученых было понять, **какие ключевые факторы влияют на удовлетворенность жизнью россиян**. Ниже приведена таблица с результатами линейной регрессии по итогам данного исследования.

Задание:

1. Оцените общее качество регрессионной модели.
2. Дайте содержательную интерпретацию связи между ключевыми независимыми и контрольными переменными и зависимой переменной.
3. Опишите, какие из выбранных параметров имеют наибольшее и наименьшее влияние на удовлетворенность жизнью россиян? Почему?
4. Проанализируйте релевантность используемого набора независимых переменных для решения исследовательской задачи. Предложите свой вариант усовершенствования имеющейся модели.

	Удовлетворенность жизнью						
	<i>1 - абсолютно не удовлетворен(а), 7 - абсолютно удовлетворен(а)</i>						
	В	Стд. Ошибка	Станд. Бета коэф.	t	Знч.	Tolerance	VIF
Социально - демографические характеристики (контрольные переменные)							
Возраст (Количество лет)	-0,002	0,003	-0,013	-0,537	0,591	0,578	1,731
Пол (Мужской = 0, Женский = 1)	0,046	0,092	0,01	0,492	0,623	916	1,092
Образование (нет высшего образования = 0, есть высшее образование = 1)	0,101	0,066	0,048	1,522	0,128	0,357	2,799
Количество лет образования	-0,022	0,03	-0,024	-0,74	0,460	0,331	3,019
Общий доход домохозяйства в месяц (руб.)	-0,045	0,019	-0,043	-1,923	0,059	0,59	1,694
Удовлетворенность разными аспектами жизни							
Уровень счастья (1 - абсолютно несчастлив, 7 - абсолютно счастлив)	0,449	0,023	0,422	19,419	0,000	0,741	1,35
Удовлетворенность отношениями в семье (1 -	0,086	0,027	0,064	3,225	0,001	0,88	1,136

Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига», 2 этап, 2021 г.

абсолютно не удовлетворен(а), 7 - абсолютно удовлетворен(а))							
Субъективная удовлетворенность своим здоровьем (1 - абсолютно не удовлетворен(а), 7 - абсолютно удовлетворен(а))	-0,19	0,071	-0,063	-2,692	0,007	0,645	1,55
Удовлетворенность своей работой (1 - абсолютно не удовлетворен(а), 7 - абсолютно удовлетворен(а))	0,154	0,028	0,137	5,543	0,000	0,568	1,76
Удовлетворенность своим материальным положением (1 - абсолютно не удовлетворен(а), 7 - абсолютно удовлетворен(а))	-0,507	0,065	-0,179	-7,816	0,000	0,665	1,505
$R^2 = 0,509$							

Задание 18 (28 баллов).

Группа социологов решила изучить **факторы самоорганизации собственников жилья** в крупных городах. **В качестве переменной**, измеряющей эту самоорганизацию, была выбрана **активность жильцов многоквартирных домов при решении общедомовых вопросов** (доля жильцов, которые приходят на собрания и голосуют на них).

Для обследования были выбраны по 5 многоквартирных домов в 10 крупных городах России (элитные дома не обследовались). Сбор информации осуществлялся в 2020 году, но часть данных удалось собрать за 2015-2020 годы, в том числе данные о количестве голосовавших на собраниях, которые предоставили управляющие организации и инициаторы собраний. Данные за 5 лет агрегировали, т.к. число собраний за год не велико. В результате, был построен ряд линейных регрессионных моделей (см. таблицу).

Переменную по забастовкам и акциям протеста сформировали по информации из городских СМИ и общению с городскими администрациями.

Данные по числу жильцов, «возрасту дома» и стоимости ЖКХ за 2015-2020гг. были предоставлены управляющими организациями.

Данные по числу жильцов с высшим образованием получили в результате сплошного опроса жильцов каждого из 50 обследованных домов, проведенного в 2020г.

По итогам сплошного опроса жильцов была смоделирована сетевая структура сообщества жильцов каждого дома и измерена степень центральности сети жильцов каждого из 50 обследованных домов.

Задание:

1. Проинтерпретируйте полученные результаты. Какие содержательные выводы о самоорганизации сообществ можно из них сделать?
2. Если бы у Вас была возможность повторить данное исследование, то что бы Вы изменили, добавили и/или убрали из моделей? Почему?
3. В условии задачи не сказано, как измерялась и рассчитывалась переменная «степень центральности». На основе каких данных Вы бы ее измеряли? И как бы рассчитывали ее значение?

Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига», 2 этап, 2021 г.

Стандартизованные регрессионные коэффициенты

(зависимая переменная – средняя доля жильцов, участвовавших в голосованиях общедомовых собраний за 2015-2020 годы)

Независимые переменные	модели			
	1	2	3	4
Степень центральности сообщества жильцов дома, 2020г.	–	–	0,490** (3,647)	0,482** (3,104)
Среднегодовое число жильцов, имеющих право участвовать в голосовании, 2015-2020гг.	-0,644** (-3,171)	-0,778* (-3,642)	-0,458* (-2,554)	-0,498* (-2,402)
Доля жильцов с высшим образованием, имеющих право участвовать в голосовании, 2020г.	0,401* (1,988)	0,420* (2,068)	0,258 (1,470)	0,211 (1,115)
«Возраст дома» (от года сдачи дома в эксплуатацию), лет	0,580** (3,498)	0,434** (2,463)	0,360* (2,362)	0,298 (1,861)
Средняя плата за содержание и ремонт жилого помещения и коммунальные услуги на 1 квартиру дома, 2015-2020гг.	–	-0,334 (-2,024)	–	-0,179 (-1,169)
Среднегодовое число забастовок и акций протеста в городе, 2015-2020гг.	–	-0,136 (-0,950)	–	-0,003 (-0,023)
Число обследованных домов	50	50	50	50
R ²	0,343	0,373	0,529	0,521

Примечание. В скобках приведены значения t-статистики (двусторонний тест).

*p<0.05; **p<0.01

Трек 230.4. «Прикладная математика в инженерии и естественных науках»

Задание 19 (12 баллов).

Пусть A – квадратная матрица порядка n , элементы которой заданы условиями $a_{ij}=i^2+j^2$.

- Вычислить определитель матрицы A
- Вычислить $f'(0)$, если $f(x)=\det(xA+I)$, где I – единичная матрица порядка n , x – вещественное число.

Задание 20 (14 баллов).

Найдите решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения:

Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига», 2 этап, 2021 г.

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}$$

при условиях $y(0) = 1$ и

$$\int_0^{+\infty} y(x) dx = 0$$

Задание 21 (14 баллов).

Ниже представлена программа на языке программирования Python. Что выведет данная программа?

```
def fun(num):
    lst = [1, 1]
    n = 0
    while len(lst) < num:
        lst.append(1)
        lst.append(1)
        n += 1
        for k in range(n):
            term = lst[-n-1] + lst[-n-2]
            lst.append(term)
    return lst[num-1]

print(fun(2021) / fun(2020))
```

Задание 22 (16 баллов).

На некотором пешеходном переходе установлен светофор для пешеходов, который горит либо зеленым светом (разрешено движение для пешеходов), либо красным (движение для пешеходов запрещено). Далее мы предполагаем, что время измеряется в минутах.

Известно, что если в момент времени t включен зеленый, то вероятность того, что зеленый переключится на красный на интервале времени $(t, t+\delta)$ ($\delta \downarrow 0$), равна $\delta + o(\delta)$ и не зависит от предыстории процесса.

Если в момент времени t включен красный, то вероятность того, что красный переключится на зеленый на интервале времени $(t, t+\delta)$ ($\delta \downarrow 0$), равна $\frac{1}{2}\delta + o(\delta)$ и не зависит от предыстории процесса.

1. Если сейчас светофор зеленый, то какова вероятность того, что через 2 минуты пешеход увидит зеленый свет?
2. Предположим, что 1 января 2021 года в 8 часов горел зеленый свет. Найти приближенную вероятность того, что 1 января 2022 года в 8 часов пешеход увидит красный свет светофора (при условии, что весь год светофор работает в том же режиме без поломок и сбоев).