Лицей НИУ ВШЭ. Дополнительный набор
Направление «Математика»
Материалы для подготовки

Здесь представлены основные темы математических дисциплин и некоторые задачи, предлагавшиеся лицеистам в различных видах работ в 10-ом классе. Для полноценной подготовки необходимо ориентироваться на учебную и специальную литературу.

Рекомендуемые учебники:

1. М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, В. Н. Соломин, А. Н. Головин, Алгебра и начала математического анализа (10-11) Углублённый уровень, Просвещение, 2020.

2. Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич, Геометрия, Дрофа/Просвещение, 2021.

Дополнительная литература

1. В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко, Задачи по математике. Алгебра. – М.: Физматлит, 2007.

2. В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко, Задачи по математике. Уравнения и неравенства. – М.: Физматлит, 2007.

3. М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич, Сборник задач по алгебре: учебное пособие для 8—9 классов с углубленным изучением математики – М.: Просвещение, 2001.

4. Р.К. Гордин, ЕГЭ 2019. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень) / Под ред. И.В.Ященко. – М.: МЦНМО, 2019.

5. Р.К. Гордин, Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы. – М: МЦНМО, 2004.

6. А.П. Иванов, Тесты и контрольные работы по математике. – М.: МФТИ, 2002.

7. А.П. Иванов, Тематические тесты для систематизации знаний по математике (в двух частях). – М. Физматкнига, 2015.

8. О.А. Иванов, Практикум по элементарной математике: Алгебро-аналитические методы: Учеб. пособие. —- М.: МЦНМО, 2001.

9. С.В. Кравцев, Ю.Л. Макаров, М.И. Максимов и др., Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. – М.: Экзамен, 2001.

10. С.Н. Олехник, М.К Потапов, Ю. В. Нестеренко, Конкурсные задачи по математике: Справочное пособие. – Изд. 3-е, стер. —- М.: Физматлит, 2003.

11. И.Н. Сергеев, Математика: задачи с ответами и решениями. – М.: КДУ, 2013.

12. В.В. Ткачук, Математика — абитуриенту. —- М.: МЦНМО, 2020.

13. Е.В. Хорошилова, Элементарная математика. Учебное пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 1: Теория чисел. Алгебра. – М.: МГУ, 2010.

14. Е.В. Хорошилова, Элементарная математика: Учеб. пособие для слушателей подготовительных отделений, абитуриентов и старшеклассников. Часть 2. – М.: МГУ, 2011.

15. И.Ф. Шарыгин, Геометрия. – М: Дрофа, 2018.

Алгебра

Основные темы

Понятие многочлена. Многочлены от одной переменной. Метод неопределённых коэффициентов

Теорема Безу и её следствия. Совпадение формального и функционального равенства многочленов

Интерполяционная формула Лагранжа

Понятие функции

Монотонность и экстремумы функции. Способы задания функции. График функции.

Некоторые элементарные функции

Чётные и нечётные функции. Периодические функции

Элементарные преобразования графиков функций

Поведение функции вблизи точек разрыва и в бесконечности. Понятие об асимптотах

Корень натуральной степени. Обобщение понятия степени

Логарифм

Логарифмическая функция и её монотонность

Обобщённый угол. Измерение углов в радианах и градусах. Единичная (тригонометрическая) окружность.

Синус, косинус, арксинус, арккосинус. Тангенс, котангенс, арктангенс, арккотангенс.

Тригонометрические формулы. Метод вспомогательного аргумента.

Тригонометрические функции и их свойства. Обратные тригонометрические функции Тригонометрические уравнения

Понятие производной. Производная как скорость.

Производные некоторых элементарных функций.

Задача о касательной. Уравнение касательной.

Производная произведения, частного, композиции функций.

Исследование функции с помощью производной.

Построение эскизов графиков с помощью производной.

Решение задач с помощью производной.

Задачи

$\boxed{\mathbf{1}}$ Многочлен $P(x)$ при делении на $x-2$ дает остаток 5, а при делении на $x+1$ — остаток 7. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на x^2-x-2.

$\boxed{\mathbf{2}}$ При делении $P(x)$ на $S(x)$ получились неполное частное $Q(x)=x^2+1$ и остаток $R(x)=x^3+5x$. Каким будет остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите, что $x^3+2x^2-3x-2>0$ при $x\geq 2$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Верно ли, что $(ax^3+x^2-x-b)\,\vdots\,(x^2+1)\iff ab=1$?

$\boxed{\mathbf{5}}$ При каких значениях a и b многочлен $(x^4+ax^2+1)^4+(x^4-bx^2+1)^4$ делится на x^2+1?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Многочлен $P(x)=2x^3+ax^2+bx-3$ при делении на $x-2$ дает остаток 27, а при делении на $x+3$ — остаток -3. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x+2$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Найдите остаток от деления многочлена $(x^2-x-1)^{239}-a(x^2+x-1)^2$ на $x-1$, если при делении на $x-2$ он дает остаток 50.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Существует ли вещественное число a, такое что $(x^6+x^3+a)\,\vdots\,(x^3+x-a)$?

$\boxed{\mathbf{9}}$ При каких значениях параметра a справедливо $(x^3+y^3+z^3+axyz)\,\vdots\,(x+y+z)$?

$\boxed{\mathbf{10}}$ Неравные многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(Q(x)=Q(P(x))$. Докажите, что $(P(P(x))-Q(Q(x)))\,\vdots\,(P(x)-Q(x))$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Найдите сумму квадратов корней многочлена

$$4x^3-18x^2+24x-8$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Постройте кубический многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена

$$x^3+x^2-2x-1=0.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Найдите все многочлены с рациональными коэффициентами $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ такие, что числа a, b, c являются корнями уравнения $P(x)=0$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Пусть известно, что все корни уравнения

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

положительны. Какому дополнительному условию должны удовлетворять его коэффициенты p, q и r для того, чтобы из отрезков, длины которых равны этим корням, можно было составить треугольник?

$\boxed{\mathbf{15}}$ Покажите, что все корни многочлена

$$P(x)=x(x-2)(x-4)(x-6)+(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

вещественны.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Найдите все многочлены $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_1x+a_0$, где $a_i\in\{-1;1\}$ для всех $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, корни которых вещественны.

$\boxed{\mathbf{17}}$ Докажите, что многочлен

$$P(x)=x^n+2nx^{n-1}+2n^2x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\cdots+a_1x+a_0,\ n\geq 2,$$

не может иметь n вещественных корней.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Докажите, что при $n > 0$ многочлен

$$nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$$

делится на $(x-1)^2$.

$\boxed{\mathbf{19}}$ Докажите, что при $n > 0$ многочлен

$$P(x) = n^2x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1$$

делится на $(x-1)^3$.

$\boxed{\mathbf{20}}$ Найдите границы действительных корней многочлена

$$P(x) = x^4 - 35x^3 + 380x^2 - 1350x + 1000.$$

$\boxed{\mathbf{21}}$ Произведение двух из четырех корней многочлена

$$P(x) = x^4 - 18x^3 + ax^2 + 200x - 1984$$

равно -32. Найдите все значения a, при которых это возможно.

$\boxed{\mathbf{22}}$ Найдите все n, при которых многочлен $(x+1)^n+x^n+1$ делится на $(x^2+x+1)^2$.

$\boxed{\mathbf{23}}$ Коммуникабельный лицеист может общаться в зуме и без зума, поддерживая и развивая любую беседу. Обычно, видя, что разговаривать в общем-то и не о чем, он задает такой вопрос: при каких a и b многочлен $P(x) = (a+b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$? Что бы вы ему ответили?

$\boxed{\mathbf{24}}$ Профессор НИУ ВШЭ Н.Е. Рациональный считает своим долгом видеть во всем рациональное начало и совершать только рациональные поступки. Помогите профессору найти все рациональные корни многочлена

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24.$$

$\boxed{\mathbf{25}}$ Гуляя по Лихолесью, Радагаст Бурый обнаружил произведение корней многочлена

$$4x^4 - 24x^3 + 31x^2 + 6x - 8.$$

Присмотревшись поближе, он понял, что это единица. Волшебник был так заинтригован, что решил найти все корни этого многочлена. Получится ли это у него сделать?

$\boxed{\mathbf{26}}$ Однажды, борясь с бессоницей, я стал вычислять значения многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами при целых значениях x. Так случилось, что для некоторых a_1, a_2, a_3 и a_4 я получил следующее:

$$P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = P(a_4) = 2020.$$

После этого я уснул. На утро я не вспомнил ни коэффициенты $P(x)$, ни числа a_1, a_2, a_3 и a_4. И самое главное! Я не помню, получал ли я значение 2022 или нет. Помогите, пожалуйста, вспомнить хоть что-нибудь из этого.

27 Пусть $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\ f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

Найдите $f(x)$.

28 Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ f(x^2 + x) + 2f(x^2 - 3x + 2) = 9x^2 - 15x$$

Найдите $f(2016)$.

29 Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ f(x + f(y)) = x + y$$

Найдите $f(x)$.

30 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$2|x - 2a| - a^2 + 15 + x = 0$$

не имеет решений. При каких значениях a уравнение имеет решения и все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-9, 10]$?

31 Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ f(f(x + y)) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy$$

Найдите $f(x)$.

32 Найдите все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y \\ x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27 \end{cases}$$

имеет два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2), удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$$

33 Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ и

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ f(n + 2) + \frac{1}{f(n)} = 2$$

Указание: найдите значения функции еще в некоторых точках, а затем используйте индукцию.

$\boxed{\mathbf{34}}$ Найдите все сюръективные функции $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}\ f(f(x-y)) = f(x) - f(y)$$

$\boxed{\mathbf{35}}$ Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \le 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{\mathbf{36}}$ $3\cos\, x + 2tg\, x = 0$

$\boxed{\mathbf{37}}$ $4\sin\, x + 2\cos\, x = 2 + 3tg\, x$

$\boxed{\mathbf{38}}$ $ctg\, x - 2\cos\, 2x = 1$

$\boxed{\mathbf{39}}$ $\sqrt{3}\cos\, x + ctg^2\, x = \dfrac{\sin^3\, x + 1}{\sin^2\, x}$

$\boxed{\mathbf{40}}$ При каких a уравнение

$$2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right) = a + \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right)$$

имеет хотя бы одно решение?

$\boxed{\mathbf{41}}$ $5\sin\, x - 4ctg\, x = 0$

$\boxed{\mathbf{42}}$ $16\sin x - \sin\, 2x = 1 - \cos\, 2x$

$\boxed{\mathbf{43}}$ $tg^2 x = \dfrac{1 - \cos\, x}{1 - \sin\, x}$

$\boxed{\mathbf{44}}$ $4\sin^2\, x = \sin\, 2x + 2\sin\, x + 5\cos\, x + 5$

$\boxed{\mathbf{45}}$ При каких значениях a сумма различных корней уравнения

$$\cos\, x - \sin\, 2x + \sin\, 4x = a(ctg\, x + 2\cos\, 3x),$$

принадлежащих отрезку $[3\pi/4, 22\pi/3]$, максимальна?

Основные темы

Множество. Элемент множества. Пустое множество. Пересечение и объединение множеств. Подмножество. Конечные и бесконечные множества. Число элементов объединения и пересечения двух конечных множеств. Числовые промежутки. Принцип Дирихле.

Взаимно–однозначные отображения множеств. Понятие мощности множества. Сравнение мощностей множеств. Теорема Кантора–Бернштейна. Счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Несчетные множества. Несчетность отрезка.

Ограниченные и неограниченные множества. Минимальные и максимальные элементы множества. Верхние и нижние грани, точные верхние и нижние грани. Открытые и замкнутые множества.

Понятие последовательности. Определение предела последовательности. Арифметические действия над сходящимися последовательностями Предел монотонной последовательности. Число е. Подпоследовательности.

Понятие предела функции. Два определения предела функции и их эквивалентность. Вычисление предела с помощью теорем об арифметических действиях с пределами Замечательные пределы. Асимптоты Порядок малости. Шкала бесконечно малых Определение непрерывности Теоремы о промежуточном значении Теорема Вейерштрасса

Понятие производной. Производная как скорость Производные некоторых элементарных функций Задача о касательной. Уравнение касательной Производная произведения, частного, композиции функций Исследование функции с помощью производной «Французские» теоремы

Задачи

$\boxed{\textbf{46}}$ Внутри шляпы волшебника живут 100 кроликов: белые, синие и зелёные. Известно, что если произвольным образом вытащить из шляпы 81 кролика, то среди них обязательно найдутся три разноцветных. Какое наименьшее количество кроликов нужно достать из шляпы, чтобы среди них точно было два разноцветных?

$\boxed{\textbf{47}}$ В школе 2000 учеников. В году 366 дней. Доказать, что найдутся не менее шести учеников с совпадающим днем рождения.

$\boxed{\textbf{48}}$ В тренажерном зале занимаются n человек, некоторые из которых знкомы между собой. Докажите, что существуют хотя бы два человека с одинаковым числом знакомств.

$\boxed{\textbf{49}}$ Пять точек находятся внутри равностороннего треугольника со стороной 1. Докажите, что существуют хотя бы две точки из пяти данных, расстояние между которыми меньше 0,5.

$\boxed{\textbf{50}}$ В правильном шестиугольнике каждая вершина соединяется с остальными пятью вершинами красным или синим отрезком. Докажите, что существует треугольник, в котором все стороны одного цвета.

$\boxed{\textbf{51}}$ В квадрате площади 6 расположены три многоугольника площади 3. Докажите, что среди их найдутся два многоугольника, площадь общей части которых не меньше 1.

$\boxed{\textbf{52}}$ В квадрате площади 5 расположено 9 многоугольников площади 1. Докажите, что среди них найдутся 2 многоугольника, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{9}$.

$\boxed{\textbf{53}}$ В классе 33 ученика, всем вместе им 430 лет. Докажите, что если выбрать 20 самых старших из них, то им вместе будет не меньше, чем 260 лет.

$\boxed{\textbf{54}}$ Имеется 19 гирек весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 19 г. Девять из них железные, девять бронзовые и одна золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес всех бронзовых. Найдите вес золотой гирьки.

$\boxed{\textbf{55}}$ Каждая точка плоскости, имеющая целочисленные координаты, раскрашена в один из цветов. Докажите, что найдется прямоугольник с вершинами в точках одного цвета.

$\boxed{\textbf{56}}$ Трое играют в настольный теннис "на вылет". В итоге Никанор сыграл 10 партий, Филимон — 15, Агафон — 17. Кто из них проиграл во второй партии?

$\boxed{\textbf{57}}$ В ящике лежат 100 шариков: белые, синие, красные. Извстно, что если, не заглядывая в ящик, вытащить 26 шариков, то среди них обязательно найдутся 10 шариков одного цвета. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 30 шариков одного цвета?

$\boxed{\textbf{58}}$ Имеется $2k+1$ карточек, занумерованных числами от 1 до $2k+1$. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлеченных номеров не был равен сумме двух других извлеченных номеров?

$\boxed{\textbf{59}}$ Единичный квадрат разрезан на n треугольников. Докажите, что одним из труголльников можно накрыть квадрат со стороной $\dfrac{1}{n}$.

$\boxed{\textbf{60}}$ Докажите, что в любом множестве, состоящем из 117 попарно различных трехзначных чисел, можно выбрать четыре попарно непересекающихся подмножества, суммы чисел в которых равны.

$\boxed{\textbf{61}}$ Дан выпуклый 2000-угольник, никакие три диагонали которого не пересекаются в одной точке. Каждая из его диагоналей покрашена в один из 999 цветов. Докажите, что существует треугольник, все стороны которого целиком лежат на диагоналях одного цвета. (Вершины треугольника не обязательно должны оказаться вершинами исходного многоугольника).

$\boxed{\textbf{62}}$ Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что

$$a_1 = 1, \forall\, n \geq 1 \;\; a_{n+1} = a_n^2 + a_n$$

Докажите, что $\forall n \geq 1 \;\; \dfrac{1}{1+a_1} + \dfrac{1}{1+a_2} + \cdots + \dfrac{1}{1+a_n} < 1$

$\boxed{\textbf{63}}$ Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что

$$a_1 = 1, \forall\, n \geq 1 \;\; a_{n+1} = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

Докажите, что $\forall\, n \geq 1\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$

$\boxed{\mathbf{64}}$ Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что

$$a_1 = a_2 = 1,\ \forall\, n \geq 2\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_{n-1}}$$

Докажите, что $\forall\, n \geq 1\ a_n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\mathbf{65}}$ Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что

$$a_0 = 0,\ \forall\, n \geq 0\ a_{n+1} = \sqrt{4 + 3a_n}$$

Докажите, что эта последовательность является ограниченной.

$\boxed{\mathbf{66}}$ Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что

$$a_1 = 1,\ \forall\, n \geq 1\ a_{n+1} = a_n + \tfrac{1}{a_n^2}$$

Исследуйте эту последовательность на ограниченность. Докажите, что $a_{9000} > 30$.

$\boxed{\mathbf{67}}$ Про последовательность $\{a_n\}$ известно, что

$$0 < a_1 < \tfrac{1}{2},\ \forall\, n \geq 1\ a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$$

Исследуйте эту последовательность на монотонность.

$\boxed{\mathbf{68}}$ Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = 12$, $a_2 = 36$, $a_{n+2} = 12a_{n+1} - 36a_n$ при $n \geq 1$. Запишите формулу общего члена этой последовательности.

$\boxed{\mathbf{69}}$ Найдите формулу общего члена последовательности:

$$\frac{5}{2}, \frac{8}{24}, -\frac{11}{720}, \frac{14}{40320}, \frac{17}{3628800}, -\frac{20}{479001600}, \dots$$

$\boxed{\mathbf{70}}$ Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся числовой последовательности.

$\boxed{\mathbf{71}}$ Пусть $\exists \lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a, \exists \lim_{n\to\infty}\{b_n\} = b$. Сформулируйте о докажите следующие теоремы:

а) о существовании предела последовательности $\{a_n + b_n\}$;

б) о существовании предела последовательности $\{a_n \cdot b_n\}$;

в) о существовании предела последовательности $\{\dfrac{a_n}{b_n}\}$ при условии, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \neq 0$, $b \neq 0$;

г) о существовании предела последовательности $\{{b_n}^{a_n}\}$при условии, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n > 0$, $b > 0$.

$\boxed{\mathbf{72}}$ Пусть $\exists \lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a, \exists \lim_{n\to\infty}\{b_n\} = b$. Тогда если при каждом натуральном n, начиная с некоторого номера, имеет место неравенство $a_n \geq b_n$, то $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} \geq \lim_{n\to\infty}\{b_n\}$.

Далее сформулируйте и докажите эту теорему для случая $a_n > b_n$.

$\boxed{\textbf{73}}$ Пусть $\exists \lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \lim_{n\to\infty}\{b_n\} = A$, при каждом натуральном n, начиная с некоторого номера, имеет место неравенство $a_n \le c_n \le b_n$, тогда $\exists \lim_{n\to\infty}\{c_n\} = A$.

$\boxed{\textbf{74}}$ Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$\boxed{\textbf{75}}$ Пусть $\exists \lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a$. Докажите следующие утверждения:

а) $\exists \lim_{n\to\infty} \sin\{a_n\} = \sin a$;
б) $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ при условии, что $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \ge 0$;
в) $\exists \lim_{n\to\infty} b^{a_n} = b^a$ при условии, что $b > 0, b = const$.

$\boxed{\textbf{76}}$ Докажите теорему о том, что если последовательность $\{a_n\}$ бесконечно малая, а последовательность $\{b_n\}$ ограниченная, то последовательность $\{a_n \cdot b_n\}$ является бесконечно малой.

$\boxed{\textbf{77}}$ Рассмотрите две числовые последоательности с общими членами вида $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$. Изучите характер их монотонности.

$\boxed{\textbf{78}}$ Изучите формулировку и доказательство теоремы Вейерштрасса. Примените эту теорему для доказательства следующего факта: числовая последовательность $\{x_n\}$ определена рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\big(x_n + \frac{3}{x_n}\big)$, $x_1 = 3$, докажите, что $\exists \lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \sqrt{3}$.

$\boxed{\textbf{79}}$ Докажите, что :

а) число 0 не яляется пределом последовательности $\{a_n\}$, где $a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$;
б) последовательность с общим членом $a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$ не имеет предела.

$\boxed{\textbf{80}}$ Вычислите пределы (с обоснованием и указанием теорем):

а) $\lim_{n\to\infty}\big(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\big)$; **б)** $\lim_{n\to\infty}\big(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\big)$;
в) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cos(n^2-5n+4)}{\sqrt{n^3+4n}}$; **г)** $\lim_{n\to\infty} \frac{n!+(n+2)!}{((n+1)!+n!)n}$;
д) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n+1}+\sqrt[n]{n+2}}{\sqrt[n]{n}+2}$; **е)** $\lim_{n\to\infty} \sin^2\big(\pi\sqrt{n^2+n}\big)$;
ж) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}\right)$; **з)** $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}$;
и) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2n}-2\sqrt{n^2+n}+n\right)$; **k)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)$;
л) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;
м) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$;

н) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{4n+3}\right)^n$; **о)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2+7}\right)^{3n^2}$;

п) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-2n^2+4n}{4n-2n^2+1}\right)^{n^2+1}$; **р)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2+7}\right)^{\frac{3n^2\sin^2 6n}{n+3}}$.

$\boxed{\mathbf{81}}$ Исследуйте числовую последовательность на монотонность: $a_n=\dfrac{n^3}{n^2-2n+3}$.

$\boxed{\mathbf{82}}$ Найдите наименьший член последовательности: $a_n=n+\dfrac{100}{n}$.

$\boxed{\mathbf{83}}$ Найдите сумму первых n членов последовательности: $\dfrac{1}{2\cdot 5}, \dfrac{1}{5\cdot 8}, \dfrac{1}{8\cdot 11}, \ldots$.

$\boxed{\mathbf{84}}$ Исследуйте числовую последовательность на ограниченность:

$$a_n=n\cdot\left(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}\right)$$

$\boxed{\mathbf{85}}$ Найдите предел последовательности по определению: $a_n=\dfrac{1-2n}{n}$

$\boxed{\mathbf{86}}$ Вычислите:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\cos(n!)}{n+2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5n+1+\cos 3n}{n^2+n+1}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{3n+1}\right)^n$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^2}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3-2n^2+4n}{4n-2n^2+1}\right)^{5n^2\sin^2 3n\cdot(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}$

$\boxed{\mathbf{87}}$ Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x)=x^3-x$ на отрезках $[-1;1]$ и $[0;1]$.

$\boxed{\mathbf{88}}$ На интервалах $(-1;1)$ и $(1;2)$ найти точки, в которых касательная к графику функции $f(x)=(x^2-1)(x-2)$ горизонтальна.

$\boxed{\mathbf{89}}$ На интервале $(0;1)$ найти такую точку ξ, что касательная к графику функции $f(x)=x^3$ в точке $(\xi;\xi^3)$ будет параллельна прямой $y=x$.

$\boxed{\mathbf{90}}$ Доказать, что между двумя действительными корнями многочлена с действительными коэффициентами имеется корень его производной.

$\boxed{\mathbf{91}}$ Доказать, что если функция f дифференцируема n раз на отрезке $[a,b]$ и обращается в нем в нуль в $n+1$ точках, то существует $\xi\in(a,b)$ такое, что $f^{(n)}(\xi)=0$.

$\boxed{\mathbf{92}}$ Докажите неравенства, пользуясь теоремой Лагранжа:

1. $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$, $0 < a < b$, $n \in \mathbb{N}$;

2. $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$,

3. $e^x \geq 1 + x$, $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\mathbf{93}}$ Доказать, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема на $(a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

$\boxed{\mathbf{94}}$ Доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и не является линейной, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$|f'(\xi)| > \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a}$$

$\boxed{\mathbf{95}}$ Доказать, что если функция дифференцируема на отрезке $[1; 2]$, то существует такая точка $\xi \in (1; 2)$, что $f(2) - f(1) = \frac{\xi^2 f'(\xi)}{2}$.

$\boxed{\mathbf{96}}$ Доказать, что если функция дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f(a) - f(\xi) = \frac{\xi f'(\xi)}{2}$.

$\boxed{\mathbf{97}}$ Постройте график функции $f(x) = \dfrac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$.

$\boxed{\mathbf{98}}$ Постройте график функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x - 2}}$.

$\boxed{\mathbf{99}}$ Постройте график функции $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

$\boxed{\mathbf{100}}$ Постройте график функции $f(x) = \ln\, arctg\, x$.

$\boxed{\mathbf{101}}$ Постройте график функции $f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

$\boxed{\mathbf{102}}$ Постройте график функции $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.

$\boxed{\mathbf{103}}$ Постройте график функции $f(x) = x\, arccos \dfrac{1}{x}$.

$\boxed{\mathbf{104}}$ Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = (x - 3)e^{|x+1|}$ на отрезке $[-2; 4]$.

$\boxed{\mathbf{105}}$ Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^x$ на промежутке $(0; 1]$.

Геометрия

Основные темы Предмет стереометрии. Основные понятия. Аксиомы стереометрии и следствия из них. Способы задания плоскости.

Техника выполнения простейших стереометрических чертежей. Решение задач.

Классификация взаимного расположения прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Признаки скрещивающихся прямых

Параллельные и пересекающиеся прямые в пространстве. Признак параллельности прямых.

Угол между лучами. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярные прямые. Углы с сонаправленными сторонами.

Угол между прямыми в пространстве.

Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости.

Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью плоскости.

Проведение плоскости через точку перпендикулярно данной прямой.

Проведение через точку прямой, перпендикулярно данной плоскости.

Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теоремы о длинах перпендикуляра, наклонных и проекций.

Угол между прямой и плоскостью. Методы нахождения угла между прямой и плоскостью.

Параллельное проектирование и его свойства. Ортогональное проектирование, его свойства.

Параллельность плоскостей. Признак параллельности плоскостей.

Свойства параллельных плоскостей. Пространственная теорема Фалеса.

Двугранные углы. Угол между двумя плоскостями.

Двугранный угол и его измерение.

Методы нахождения двугранных углов и углов между плоскостями.

Перпендикулярность плоскостей. Признак перпендикулярности плоскостей

Свойства перпендикулярных плоскостей.

Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых. Площадь ортогональной проекции многоугольника.

Расстояние между фигурами.

Расстояние между двумя параллельными прямыми; между прямой и параллельной ей плоскостью.

Расстояние между параллельными плоскостями.

Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Геометрические места точек пространства, связанные с расстояниями.

Внутренние и граничные точки, внутренность и граница геометрической фигуры.

Выпуклая, связная, ограниченная геометрическая фигура. Пространственная область.

Геометрическое тело, его внутренность и поверхность.

Многогранник и его элементы: вершины, ребра, грани, плоские углы при вершине, двугранные углы при ребрах. Эйлерова характеристика многогранника.

Теорема Декарта-Эйлера для выпуклого многогранника.

Понятие о развертке многогранника. Свойства выпуклых многогранников.

Понятие объема тела. Свойства объемов тел. Равновеликие и равносоставленные тела. Объем прямоугольного параллелепипеда.

Определение призмы и ее элементов. Количество вершин, рёбер, граней, диагоналей у n–угольной призмы. Прямая и наклонная призмы. Правильная призма. Призматическая поверхность.

Перпендикулярное сечение призмы. Боковая и полная поверхность призмы; формулы вычисления их площадей.

Формулы вычисления объёмов прямой и наклонной призм (без доказательств).

Параллелепипед: наклонный, прямой, прямоугольный. Куб. Свойства диагоналей параллелепипеда. Свойства прямоугольного параллелепипеда. Объем параллелепипеда (без доказательства).

Построение сечений призм и параллелепипедов различными методами.

Определение пирамиды и её элементов. Количество вершин, рёбер и граней n-угольной пирамиды. Некоторые частные виды пирамид.

Формулы вычисления площадей боковой и полной поверхностей пирамиды. Правильная пирамида и её свойства. Апофема правильной пирамиды. Формула вычисления боковой и полной поверхности пирамиды.

Свойства параллельных сечений пирамиды. Усеченная пирамида, формулы вычисления ее боковой и полной поверхностей. Формулы вычисления площадей боковой и полной поверхностей правильной усеченной пирамиды. Объем пирамиды и формулы его вычисления (без доказательств).

Тетраэдр. Об объёме тетраэдра. Возможность выбора основания у тетраэдра. Свойство отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней.

Правильный тетраэдр. Ортоцентрический тетраэдр. Равногранный тетраэдр. Тетраэдр, все боковые грани которого образуют равные двугранные углы с плоскостью его основания.

Формула вычисления объема тетраэдра через длины двух скрещивающихся ребер. Отношение объемов двух тетраэдров, имеющих равные трехгранные углы.

Построение сечений пирамиды различными методами.

Понятие о многогранном угле. Вершина, грани, рёбра, плоские углы при вершине выпуклого многогранного угла. Многогранные углы при вершинах многогранников. Трёхгранный угол.

Теорема о плоских углах трёхгранного угла (неравенство трехгранного угла). Теорема о сумме плоских углов выпуклого многогранного угла. Теорема синусов и теорема косинусов трёхгранного угла.

Задачи

$\boxed{\textbf{106}}$ Из центра O основания ABC треугольной пирамиды $SABC$, $SA = 12$; $SB = 15$; $SC = 21$, $AB = BC = CA = 12$ провести (обосновать построение) лучи соответственно параллельные прямым SA, SB и SC. Найдите длины отрезков этих лучей, лежащих внутри пирамиды.

$\boxed{\textbf{107}}$ В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны между собой, через вершину B_1 и середины M, L рёбер AB и CC_1 соответственно провести (обосновать построение) сечение S и определить в каком отношении плоскость этого сечения делит отрезок A_1D, где D — середина ребра BC.

$\boxed{\textbf{108}}$ В правильной треугольной пирамиде $PABC$, боковое ребро равно 5, а ребро основания — 6. Точки M и L — середины рёбер AB и CP соответственно. Найдите тангенс угла между прямыми LM и AP.

$\boxed{\textbf{109}}$ В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AB = BC = 4$; $CC_1 = 2$) отмечены точка O — центр грани BCC_1B_1, точка L_1 — середина ребра C_1D_1 и такая точка P ребра AD, что $AP : PD = 3 : 1$.

a) Построить (обосновать построение) сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью L_1OP.

b) Выяснить, в каком отношении плоскость сечения делит ребро DD_1.

c) Найти угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

$\boxed{\textbf{110}}$ Пусть точки A_1, B_1, C_1 — точки пересечения проведённых лучей с гранями SBC, SAC, SAB соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный и найдите его площадь.

$\boxed{\textbf{111}}$ В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны по 12, через вершину B_1 и середины M, L рёбер AB и CC_1 соответственно проведено сечение S. Найдите площадь ортогональной проекции сечения S на плоскость A_1AC.

$\boxed{\textbf{112}}$ Найдите угол между прямой, содержащей высоту данной пирамиды и прямой, содержащей высоту боковой грани. (Два случая).

$\boxed{\textbf{113}}$ Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки K и L — центры граней BB_1C_1C и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что точка пересечения прямой KL с плоскостью основания $ABCD$ равноудалена от вершин B и C.

б) Пусть M — середина ребра CD. Найдите котангенс угла между прямыми MD_1 и KL, если известно, что $AB = 2AA_1$.

$\boxed{\textbf{114}}$ Основание пирамиды $SABCD$ — равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, причём $AD = 2BC = 2AB$. Высота SH пирамиды проходит через точку пересечения прямых AB и CD.

а) Докажите, что треугольник SBD прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости ASD, если $SH = BC = 4$.

$\boxed{\textbf{115}}$ Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра B_1C_1. Прямые CA_1 и BM перпендикулярны.

а) Докажите, что диагональ основания призмы вдвое больше бокового ребра.

б) Найдите угол между прямой CA_1 и плоскостью BCC_1.