О. Е. Галкин, О последовательностях операторов композиции в пространствах функций ограниченной Ф-вариации, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 330–341

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm3891

Математические заметки

Том 85 выпуск 3 март 2009

УДК 517.518.24+517.518.3

О последовательностях операторов композиции в пространствах функций ограниченной Ф-вариации

О. Е. Галкин

Основные результаты работы содержатся в теоремах 1 и 2. В теореме 1 найдены необходимые и достаточные условия на последовательность функций $h_n\colon \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$, $n=1,2,\dots$, при которых для любой функции $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, имеющей конечную Ф-вариацию, ограничена последовательность Ψ-вариаций $\{V_\Psi(\langle c,d\rangle; f\circ h_n)\}_{n=1}^\infty$, вычисленных для композиций функций f и h_n. В теореме 2 то же сделано для последовательности функций $h_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\dots$, и последовательности Ψ-вариаций $\{V_\Psi(\langle a,b\rangle; h_n\circ f)\}_{n=1}^\infty$.

Библиография: 10 названий.

1. Предварительные сведения

1.1. Основные определения и обозначения.

Определение 1 [1], [2]. 1) Назовем *φ-функцией* непрерывную неограниченную неубывающую функцию $\Phi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ такую, что $\Phi(x)=0$ только при $x=0$.

2) Будем говорить, что φ-функция Φ удовлетворяет *Δ_2-условию около нуля*, если существуют такие $\delta>0$ и $K>0$, что $\Phi(2x)\leqslant K\Phi(x)$ при всех $x\in[0,\delta]$ (что, очевидно, равносильно существованию такого $K_1>0$, что $\Phi(2x)\leqslant K_1\Phi(x)$ при всех $x\in[0,1]$).

Определение 2. *Промежутком* $\Pi=\langle c,d\rangle$ при $c\leqslant d$ будем называть каждое из подмножеств $[c,d]$, (c,d), $[c,d)$, $(c,d]$ вещественной оси $\mathbb{R}$. Пустое и одноточечные множества также будем считать промежутками.

Всюду далее Φ и Ψ – φ-функции, $\langle a,b\rangle$ и $\langle c,d\rangle$ – непустые промежутки.

Обозначим символом $\tau\langle a,b\rangle$ множество всех разбиений $T=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ промежутка $\langle a,b\rangle$ (здесь $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $a\leqslant t_0<t_1<\dots<t_n\leqslant b$).

Определение 3 (см. п. 1.2). *Ф-вариацией* функции $f\colon\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ по промежутку $\langle a,b\rangle$ называется величина

$$V_\Phi(\langle a,b\rangle; f)=\sup\{V_\Phi[T;f] \mid T\in\tau\langle a,b\rangle\},$$

где $V_\Phi[T;f]=\sum_{i=1}^n \Phi(|f(t_i)-f(t_{i-1})|)$ – *предвариация* функции f по разбиению $T=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ промежутка $\langle a,b\rangle$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 03-01-00473, 06-01-00761).

Символом $BV_\Phi\langle a,b\rangle$ обозначим множество всех функций $f\colon \langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, имеющих конечную Φ-вариацию на $\langle a,b\rangle$.

Если $\Phi(x)\equiv x$, то будем записывать $V_\Phi(\langle c,d\rangle;g)$ как $V(\langle c,d\rangle;g)$ и $BV_\Phi\langle c,d\rangle$ как $BV\langle c,d\rangle$.

Определение 4. *Модулем непрерывности* функции $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на отрезке $[u,v]$ называется функция $\omega_h([u,v])\colon[0,\infty)\to[0,\infty]$, определяемая равенством

$$\omega_h([u,v];\delta)=\sup\{|h(t)-h(s)|\mid t,s\in[u,v],\ |t-s|\leqslant\delta\}.$$

Для каждого $N\in\mathbb{N}$ обозначим через $\mathbf{J}_N\langle c,d\rangle$ семейство всех подмножеств промежутка $\langle c,d\rangle$, которые можно представить в виде объединения N промежутков (ср. [3]). Тогда $\mathbf{J}\langle c,d\rangle=\bigcup_{N=1}^\infty\mathbf{J}_N\langle c,d\rangle$ – набор подмножеств из $\langle c,d\rangle$, представимых в виде объединения конечного числа промежутков.

Если $E\in\mathbf{J}\langle c,d\rangle$, то обозначим через $|E|$ наименьшее число промежутков, объединение которых дает E.

Множество всех функций $g\colon\langle c,d\rangle\to\mathbb{R}$ таких, что прообраз $g^{-1}(\Pi)$ принадлежит $\mathbf{J}_N\langle c,d\rangle$ для любого промежутка $\Pi\subset\mathbb{R}$, обозначим через $\mathbf{FJ}_N\langle c,d\rangle$. Ясно, что $\mathbf{FJ}_N\langle c,d\rangle\subset\mathbf{FJ}_{N+1}\langle c,d\rangle$. Символом $\mathbf{FJ}\langle c,d\rangle$ обозначим объединение $\bigcup_{N=1}^\infty\mathbf{FJ}_N\langle c,d\rangle$.

Определение 5. Будем говорить, что множества A и B из класса $\mathbf{J}\langle c,d\rangle$ *отделены* (*друг от друга*), если между любыми двумя промежутками, один из которых входит в A, а другой – в B, найдется хотя бы одна точка, не принадлежащая ни одному из этих промежутков.

Пример. Множества $(0;1)$ и $(1;2)$ отделены друг от друга, а множества $(0;1]$ и $(1;2)$ – нет.

Определение 6. Назовем функцию $g\colon\langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$ *кусочно-постоянной*, если $\langle c,d\rangle$ можно разбить на конечное число непересекающихся промежутков, на каждом из которых g постоянна (это равносильно тому, что g принадлежит $\mathbf{FJ}\langle c,d\rangle$ и принимает конечное число значений).

В настоящей работе мы исследуем, при каких условиях на последовательность функций $h_n\colon\langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$ (соответственно $h_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$), $n=1,2,\dots$, последовательность операторов правой композиции $f\mapsto f\circ h_n$ (соответственно операторов левой композиции $f\mapsto h_n\circ f$) на пространстве $BV_\Phi\langle a,b\rangle$ поточечно ограничена по Ψ-вариации, т.е. для любой функции f из класса $BV_\Phi\langle a,b\rangle$ ограничена последовательность Ψ-вариаций $\{V_\Psi(\langle c,d\rangle;f\circ h_n)\}_{n=1}^\infty$ (соответственно $\{V_\Psi(\langle a,b\rangle;h_n\circ f)\}_{n=1}^\infty$).

1.2. Об истории проблемы. Напомним, что впервые понятие вариации функции было введено Жорданом [4], а понятие Φ-вариации функции было определено: Винером [5] для $\Phi(x)=x^2$, Марцинкевичем [6] и Янгом [7] для $\Phi(x)=x^p$, $p\geqslant1$, и Янгом [8] в общем случае. Пространства функций ограниченной вариации с различных точек зрения изучались, в частности, Мущелаком и Орличем [1], Лещневичем и Орличем [2], Чистяковым и Галкиным [9].

Джозефи [3] показал, что если $h\colon[0;1]\to[0;1]$, то

1) $h\circ f\in BV[0;1]$ для любой функции $f\in BV[0;1]$ тогда и только тогда, когда h – липшицева;
2) $f\circ h\in BV[0;1]$ для любой функции $f\in BV[0;1]$ тогда и только тогда, когда $h\in\mathbf{FJ}[0;1]$.

Цемночоловский и Орлич [10; теорема 1] доказали, что если функция Ψ удовлетворяет Δ_2-условию около нуля и $h_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h_n(0)=0$ для $n=1,2,\dots$, то условие

а) $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle a,b\rangle; h_n\circ f)<\infty$ для любой $f\in BV_\Phi\langle a,b\rangle$

равносильно условию

б) для любого $v>0$ существует вещественное $K_v>0$ такое, что при всех $n=1,2,\dots$ выполняется неравенство

$$\Psi(|h_n(u_2)-h_n(u_1)|)\leqslant K_v\Phi(|u_2-u_1|),\qquad u_1,u_2\in[-v,v].$$

Этот результат является обобщением результата 1) Джозефи.

2. Основные результаты

2.1. Функции h_n действуют справа.

Теорема 1. *Пусть $h_n\colon \langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$ для $n=1,2,\dots$. Тогда условие*

а) $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle c,d\rangle; f\circ h_n)<\infty$ *для любой* $f\in BV_\Phi\langle a,b\rangle$

равносильно условию

б) *существует такое натуральное N, что $h_n\in \mathbf{FJ}_N\langle c,d\rangle$ при всех $n=1,2,\dots$, и если $\sup_{0<x<1}\Psi(x)/\Phi(x)=\infty$, то при каждом $n=1,2,\dots$ функция h_n принимает не более N значений.*

Кроме того, если выполнено условие б), *то*

1) *если $\sup_{0<x<1}\Psi(x)/\Phi(x)<\infty$, то для любых $f\in BV_\Phi\langle a,b\rangle$ и всех $n=1,2,\dots$ выполняется оценка*

$$V_\Psi(\langle c,d\rangle; f\circ h_n)\leqslant 2K_fN\cdot V_\Phi(\langle a,b\rangle; f),$$

где $K_f=\sup\{\Psi(z)/\Phi(z)\mid z>0,\ \Phi(z)\leqslant V_\Phi(\langle a,b\rangle; f)\}<\infty$;

2) *если $\sup_{0<x<1}\Psi(x)/\Phi(x)=\infty$, то $f\circ h_n\in BV_\Psi\langle c,d\rangle$ для любой φ-функции Ψ, причем*

$$V_\Psi(\langle c,d\rangle; f\circ h_n)\leqslant N^2\Psi(M_f),$$

где $M_f=\sup\{|f(x)-f(y)|\mid x,y\in\langle c,d\rangle\}<\infty$.

Следствие. *Пусть $h\colon\langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$. Тогда условие*

а) *$f\circ h\in BV_\Psi\langle c,d\rangle$ для любой $f\in BV_\Phi\langle a,b\rangle$*

равносильно условию

б) *$h\in\mathbf{FJ}\langle c,d\rangle$, и если $\sup_{0<x<1}\Psi(x)/\Phi(x)=\infty$, то h принимает лишь конечное число значений (т.е. кусочно-постоянна).*

Эти утверждения обобщают результат 2) Джозефи.

2.2. Функции h_n действуют слева.

Теорема 2. *Если $h_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ при $n=1,2,\dots$, то условие*

а) $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle a,b\rangle; h_n\circ f)<\infty$ *для любой* $f\in BV_\Phi\langle a,b\rangle$

равносильно условию

б) *для любого $v>0$ существует вещественное $K_v>0$ такое, что при всех $n=1,2,\dots$ выполняется неравенство*

$$\Psi(|h_n(u_2)-h_n(u_1)|)\leqslant K_v\Phi(|u_2-u_1|),\qquad u_1,u_2\in[-v,v]. \tag{1}$$

Если в классе $BV_\Phi\langle a,b\rangle$ есть хотя бы одна непрерывная функция, не являющаяся постоянной, то условия а) и б) равносильны (формально более слабому) условию

а$'$) $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle a,b\rangle; h_n\circ f)<\infty$ *для любой непрерывной* $f\in BV_\Phi\langle a,b\rangle$.

Эта теорема лишь немного усиливает результат Цемночоловского и Орлича (элиминировано Δ_2-условие около нуля на функцию Ψ).

Замечание. 1) В [10; с. 434] показано, что если выполнено условие б), то для любых $f\in BV_\Phi\langle a,b\rangle$ и всех $n=1,2,\dots$ выполняется оценка

$$V_\Psi(\langle a,b\rangle; f\circ h_n)\leqslant K_v\cdot V_\Phi(\langle a,b\rangle; f).$$

2) Если функция Ψ строго возрастает, то неравенство (1), очевидно, равносильно неравенству

$$\omega_{h_n}([-v,v];\delta)\leqslant \Psi^{-1}(K_v\Phi(\delta)),\qquad \delta\in[-v,v]. \tag{2}$$

3) Если $\Psi(Lx)/\Psi(x)\to\infty$ при $L\to+\infty$ равномерно по x из некоторого интервала $(0,\varepsilon)$ (это верно, например, для $\Psi(x)=|x|^p$, $p>0$, и любого $\varepsilon>1$), то из (2) следует, что при некотором $L>0$ выполнено неравенство

$$\omega_{h_n}([-v,v];\delta)\leqslant L\cdot\Psi^{-1}(\Phi(\delta)),\qquad \delta\in[-v,v].$$

4) Если $\Phi(x)=\Psi(x)=1/\ln(1/x)$ при $0<x<\delta_0$ для некоторого $0<\delta_0<1$, то неравенство (2) влечет гёльдеровость функции h_n, поскольку $\Psi^{-1}(K_v\Phi(\delta))=\delta^{1/K_v}$ при $0<\delta<\delta_0$.

5) Согласно лемме 10 (см. далее раздел 3) в классе $BV_\Phi\langle a,b\rangle$ тогда и только тогда найдется хотя бы одна непрерывная функция, не являющаяся постоянной, когда для некоторого $C>0$ при всех $x\in[0,1]$ выполнено неравенство $\Phi(x)\leqslant Cx$.

3. Вспомогательные утверждения

Перед изложением вспомогательных утверждений приведем таблицу зависимостей между ними:

№ леммы	Где применяется	№ леммы	Где применяется
1	леммы 2 и 9, теорема 1	6	лемма 8
2	лемма 7	7	теорема 1
3	лемма 7	8	теорема 1
4	леммы 7 и 8	9	теорема 1
5	лемма 7, теорема 2	10	теорема 2

Лемма 1. *Пусть $g\in\mathbf{FJ}_N\langle c,d\rangle$ и $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant M$ при $x_1,x_2\in\langle c,d\rangle$ (например, $g(x)\in[0,M]$ при $x\in\langle c,d\rangle$). Тогда*

а) $V(\langle c,d\rangle; g)\leqslant M(2N-1)$, *причем оценка точна для любого* $N\in\mathbb{N}$;

б) *если функция g принимает не более N значений, то $g\in BV_\Psi\langle c,d\rangle$ для любой φ-функции Ψ, причем*

$$V_\Psi(\langle c,d\rangle; g)\leqslant (N^2-1)\cdot\Psi(M).$$

Доказательство (ср. [3; лемма 1]). а) От противного. Пусть $V(\langle c,d\rangle; g)>M(2N-1)$. Тогда существует разбиение T такое, что $V[T;g]=\sum_{i=1}^n|g(t_i)-g(t_{i-1})|>M(2N-1)$. Так как $|g(t_i)-g(t_{i-1})|\leqslant M$, найдется, по крайней мере, $2N$ различных интервалов с концами $g(t_{i_j})$ и $g(t_{i_j-1})$, $j = 1, \dots, 2N$, имеющих непустое пересечение. Пусть z – точка из этого пересечения. Тогда прообраз хотя бы одного из отрезков $[z, g(c)+M]$, $[z, g(c)-M]$ состоит из не менее, чем $N+1$ промежутков. Это противоречит условию леммы.

Теперь докажем точность оценки. Положим $g(x) = MN \cdot x$ при $x \in [0; 1/N)$, и продолжим функцию g периодически с периодом $1/N$ на полуинтервал $[0; 1)$. Тогда $g \in \mathbf{FJ}_N[0;1)$ и $V([0;1); g) = M(2N-1)$.

б) Так как функция g постоянна на промежутках, количество которых не более N^2, то в сумме $\sum_{i=1}^{n} \Psi(|g(t_i) - g(t_{i-1})|) = V_\Psi[T; g]$ имеется не более $N^2 - 1$ ненулевых слагаемых. Каждое из них не превосходит $\Psi(M)$. Поэтому

$$V_\Psi(\langle c, d\rangle; g) = \sup\{V_\Psi[T; g] \mid T \in \tau\langle c, d\rangle\} \leqslant (N^2-1)\Psi(M).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Характеристическая функция χ_E множества $E \subset \langle c, d\rangle$ имеет конечную Φ-вариацию по $\langle c, d\rangle$ тогда и только тогда, когда E есть объединение конечного числа промежутков, т.е. $E \in \mathbf{J}\langle c, d\rangle$. При этом для любого $K \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$V_\Phi(\langle c, d\rangle; K \cdot \chi_E) \geqslant 2\Phi(|K|) \cdot (|E| - 1).$$

Доказательство. 1) Если E есть объединение конечного числа промежутков, то функция χ_E кусочно-постоянна, поэтому согласно пункту б) леммы 1 имеем $V_\Phi(\langle c, d\rangle; \chi_E) < \infty$.

2) Обратно, пусть $V_\Phi(\langle c, d\rangle; \chi_E) < \infty$. Так как для любого разбиения T величина $V_\Phi[T; \chi_E] = \sum_{i=1}^{n} \Phi(|\chi_E(t_i) - \chi_E(t_{i-1})|)$ принимает лишь значения вида $k \cdot \Phi(1)$, где $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, то $V_\Phi \chi_E = V_\Phi[T_0; \chi_E]$ для некоторого разбиения $T_0 = \{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$. Тогда

а) $\chi_E(t) = \chi_E(t_0)$ для любого $t < t_0$, $t \in \langle c, d\rangle$, так как иначе $V_\Phi[\{t\} \cup T_0; \chi_E] > V_\Phi[T_0; \chi_E]$;

б) аналогично, $\chi_E(t_n) = \chi_E(t)$ для любого $t > t_n$, $t \in \langle c, d\rangle$;

в) если $\chi_E(t_{i-1}) = \chi_E(t_i)$, то $\chi_E(t) = \chi_E(t_i)$ при любом $t \in (t_{i-1}, t_i)$, так как иначе $V_\Phi[T_0 \cup \{t\}; \chi_E] > V_\Phi[T_0; \chi_E]$;

г) если $\chi_E(t_{i-1}) \neq \chi_E(t_i)$, то положим $s_i = \inf\{s \in (t_{i-1}, t_i] \mid \chi_E(s) = \chi_E(t_i)\}$. Тогда, во-первых, $\chi_E(t_{i-1}) = \chi_E(t)$ при $t \in (t_{i-1}, s_i)$; во-вторых, $\chi_E(t) = \chi_E(t_i)$ при $t \in (s_i, t_i)$, так как иначе $V_\Phi[T_0 \cup \{s, t\}; \chi_E] > V_\Phi[T_0; \chi_E]$, где $s \in (s_i, t)$ такое, что $\chi_E(s) = \chi_E(t_i)$.

Итак, E состоит из промежутков с концами в точках s_i или в $\pm\infty$, так что этих промежутков не более n штук.

3) Неравенство $V_\Phi(\langle c, d\rangle; K \cdot \chi_E) \geqslant 2\Phi(|K|) \cdot (|E| - 1)$ получается из оценки $V_\Phi[T; K \cdot \chi_E] \geqslant 2\Phi(|K|) \cdot (|E| - 1)$, где $T = \{t_1 < s_1 < \dots < s_{n-1} < t_n\}$, точки $t_1, \dots, t_n$ лежат в E, а точки $s_1, \dots, s_{n-1}$ – вне E.

Лемма 3. *Пусть любые два множества из данной последовательности множеств или не пересекаются, или вложены (множество с большим номером вложено в множество с меньшим номером). Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность попарно непересекающихся множеств или подпоследовательность вложенных множеств.*

Доказательство. Пусть $\{S_n\}$ – данная последовательность. Множество S_m, в которое вложено лишь конечное число множеств из $\{S_n\}$, назовем *множеством с конечным вложением.* Рассмотрим два случая.

1) В $\{S_n\}$ имеется бесконечное число множеств с конечным вложением. Покажем, что тогда существует подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ попарно непересекающихся множеств. Действительно, в каждое множество с конечным вложением вложено хотя бы одно множество, не содержащее других множеств из $\{S_n\}$. Поэтому существует бесконечная подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ множеств, не содержащих других множеств из $\{S_n\}$. Очевидно, элементы в $\{S_{n_k}\}$ попарно не пересекаются.

2) В $\{S_n\}$ имеется лишь конечное число множеств с конечным вложением. Покажем, что тогда существует подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$ вложенных множеств.

В качестве n_1 возьмем номер, начиная с которого каждое S_n содержит бесконечное число других множеств из $\{S_n\}$. Далее строим $\{n_k\}$ по индукции: если n_k уже найдено, то S_{n_k} содержит некоторое $S_{n_{k+1}}$ с номером $n_{k+1} > n_k$.

Лемма доказана.

Лемма 4. а) *Из любого набора* $\{E_1, \dots, E_{N\cdot n^2}\}$, *содержащего* $N \cdot n^2$ *попарно не пересекающихся множеств из класса* $\mathbf{J}_N\langle a,b\rangle$, *можно выбрать* n *множеств* $E_{j_1}, \dots, E_{j_n}$, *которые попарно отделены друг от друга.*

б) *Из любой последовательности* $\{E_n\} \subset \mathbf{J}\langle a,b\rangle$, *элементы которой попарно не перекаются друг с другом, можно выбрать подпоследовательность множеств, которые попарно отделены друг от друга.*

Доказательство. а) Применим индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Пусть утверждение верно для $n-1$. Тогда из множеств E_j, $j = 1, \dots, N\cdot(n-1)^2$, можно выбрать $(n-1)$ множество $E_{j_1}, \dots, E_{j_{n-1}}$, которые попарно отделены друг от друга. Объединение выбранных множеств имеет не более $N(2n-2)$ граничных точек. Значит, среди $N(2n-1)$ оставшихся множеств E_j мы можем найти множество E_{j_n}, которое отделено от множеств $E_{j_1}, \dots, E_{j_{n-1}}$.

б) Снова используем индукцию по n. На первом шаге положим $n_1 = 1$, $E_{n_1} = E_1$. Далее, пусть множества $E_{n_1}, \dots, E_{n_k}$ уже выбраны. У составляющих их интервалов в совокупности лишь конечное число граничных точек, поэтому от выбранных множеств может быть не отделено лишь конечное число множеств E_n с номерами $n > n_k$. Значит, существует $E_{n_{k+1}}$, отделенное от множеств $E_{n_1}, \dots, E_{n_k}$.

Лемма 5. *Пусть* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *– числовые последовательности такие, что* $\{a_n\}$ *положительна,* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *и* $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = \infty$. *Тогда существуют строго возрастающие последовательности натуральных чисел* $\{n_k\}$ *и* $\{M_k\}$ *такие, что* $\sum_{k=1}^{\infty} M_k a_{n_k} < \infty$, *но* $M_k b_{n_k} \to \infty$, $k \to \infty$.

Доказательство. Положим $\varepsilon_k = 1/2^k$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$. Возьмем $M_1 = n_1 = 1$. Далее по индукции строим для каждого натурального $k > 1$ номер n_k так, что $a_{n_k} < \varepsilon_k/M_{k-1}$, $b_{n_k}/a_{n_k} > k/\varepsilon_k$ и $n_k > n_{k-1}$. Затем выбираем натуральное M_k так, что $\varepsilon_k/a_{n_k} \leqslant M_k < \varepsilon_k/a_{n_k} + 1$. Тогда $M_k > M_{k-1}$, $M_k a_{n_k} < 2\varepsilon_k$ и $M_k b_{n_k} > k$ при $k > 1$.

Поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} M_k a_{n_k} < 2\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, но $M_k b_{n_k} \to \infty$, $k \to \infty$.

Лемма 6. *Если* $\sup_{0<x<1} \Psi(x)/\Phi(x) = \infty$, *то существуют последовательность* $\{x_k\}$ *различных точек из интервала* $(0;1)$, *сходящаяся к* 0, *и последовательность* $\{M_k\} \subset \mathbb{N}$ *такие, что* $\sum_{k=1}^{\infty} M_k \Phi(x_k) < \infty$, *но* $M_k \Psi(x_k) \to \infty$, $k \to \infty$.

Доказательство. Из условия следует, что существует последовательность $\{t_n\}$ различных точек из $(0;1)$ такая, что $\Psi(t_n)/\Phi(t_n) \to \infty$, $n \to \infty$. Так как Ψ ограничена на $(0;1)$, то $\Phi(t_n) \to 0$, $n \to \infty$. Отсюда, так как Φ – φ-функция, следует, что $\{t_n\}$ сходится к 0. Далее остается воспользоваться леммой 5 для $a_n = \Phi(t_n)$, $b_n = \Psi(t_n)$ и положить $x_k = t_{n_k}$, $k = 1, 2, \dots$.

Лемма 7. *Если $h_n\colon \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$, $n = 1, 2, \dots$, и $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle c,d\rangle; f\circ h_n) < \infty$ для любой $f \in BV_\Phi\langle a,b\rangle$, то существует такое натуральное N, что $h_n \in \mathbf{FJ}_N\langle c,d\rangle$ при всех $n = 1, 2, \dots$.*

Доказательство. а) Докажем, что для любого промежутка $\Pi \subset \langle a,b\rangle$ множества $h_n^{-1}(\Pi)$, $n = 1, 2, \dots$, состоят из конечного числа промежутков, причем это число ограничено равномерно по $n \in \mathbb{N}$.

Так как $\chi_\Pi \in BV_\Phi\langle a,b\rangle$ и $\chi_\Pi \circ h_n = \chi_{h_n^{-1}(\Pi)}$, в силу условия леммы выполнено $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle c,d\rangle; \chi_{h_n^{-1}(\Pi)}) < \infty$. Поэтому в силу леммы 2 множество $h_n^{-1}(\Pi)$ есть объединение конечного числа промежутков, $n = 1, 2, \dots$, причем

$$2\Psi(1)\cdot\Bigl(\sup_{n\in\mathbb{N}} |h_n^{-1}(\Pi)| - 1\Bigr) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle c,d\rangle; f\circ h_n) < \infty.$$

Следовательно, величина $|h_n^{-1}(\Pi)|$ ограничена равномерно по $n \in \mathbb{N}$.

б) По пункту а) для любого промежутка $\Pi \subset \langle a,b\rangle$ найдется такое натуральное $N = N(\Pi)$, что $h_n^{-1}(\Pi)$ состоит из не более чем $N(\Pi)$ промежутков, $n = 1, 2, \dots$. Докажем от противного, что можно выбрать одно и то же N для всех промежутков $\Pi \subset \langle a,b\rangle$. Доказательство разобьем на семь шагов б$_1$)–б$_7$).

б$_1$) Если это не так, то для любого $N \in \mathbb{N}$ существуют промежуток $\Pi_N \subset \langle a,b\rangle$ и номер n_N такие, что $|h_{n_N}^{-1}(\Pi_N)| > 2N^2$.

б$_2$) По индукции построим такую последовательность промежутков $\{J_N\}$, что для любых номеров N и m при $N < m$ либо $J_m \subset J_N$, либо $J_m \cap J_N = \varnothing$, причем $|h_{n_N}^{-1}(J_N)| > N$.

На первом шаге положим $J_1 = \Pi_1$. Далее, пусть $J_1, \dots, J_{N-1}$ уже построены. Они разбивают промежуток Π_N на не более чем $2N$ непересекающихся промежутков $\Pi_N^{(1)}, \dots, \Pi_N^{(m)}$, $m \leqslant 2N$. Так как $2N^2 < |h_{n_N}^{-1}(\Pi_N)| \leqslant \sum_{k=1}^m |h_{n_N}^{-1}(\Pi_N^{(k)})|$, имеем $|h_{n_N}^{-1}(\Pi_N^{(k_0)})| > N$ для некоторого k_0. Полагаем $J_N = \Pi_N^{(k_0)}$.

б$_3$) По лемме 3 из $\{J_N\}$ можно выделить подпоследовательность промежутков J_{N_k}, которые либо попарно не пересекаются, либо вложены. В первом случае положим $I_k = J_{N_k}$, $i_k = n_{N_k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $|h_{i_k}^{-1}(I_k)| > k$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

б$_4$) Покажем, что во втором случае тоже можно подобрать последовательности попарно непересекающихся промежутков $\{I_k\}$ и номеров $\{i_k\}$ такие, что $|h_{i_k}^{-1}(I_k)| > k$. По пункту а) для любого промежутка J_{N_k} величина $|h_n^{-1}(J_{N_k})|$ ограничена равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Поэтому мы можем выбрать из $\{N_k\}$ подпоследовательность $\{m_k\}$ так, что $|h_{i_k}^{-1}(J_{m_{k+1}})| > |h_{i_k}^{-1}(J_{m_k})| + 2k$, где $\{i_k\} = \{n_{m_{k+1}}\}$. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ множество $J_{m_k} \setminus J_{m_{k+1}}$ состоит из двух непересекающихся промежутков, поэтому $J_{m_{k+1}} = J_{m_k} \setminus (J_k^{(1)} \cup J_k^{(2)})$, где $J_k^{(1)}$ и $J_k^{(2)}$ – промежутки (промежуток может быть и пустым). Отсюда

$$|h_{i_k}^{-1}(J_{m_{k+1}})| \leqslant |h_{i_k}^{-1}(J_{m_k})| + |h_{i_k}^{-1}(J_k^{(1)})| + |h_{i_k}^{-1}(J_k^{(2)})|.$$

Поэтому для некоторого $j_k \in \{1, 2\}$ выполнено неравенство $|h_{i_k}^{-1}(J_k^{(j_k)})| > k$. Полагаем $I_k = J_k^{(j_k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

б$_5$) Согласно лемме 4, б) можно перейти к подпоследовательностям и считать промежутки I_k попарно отделенными друг от друга.

б$_6$) Подберем последовательность $\{z_k\} \subset (0,+\infty)$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(z_k) < \infty$. Снова переходя, если нужно, к подпоследовательностям (в $\{i_k\}$ и $\{I_k\}$), добьемся выполнения неравенств $|h_{i_k}^{-1}(I_k)| > k/\Psi(z_k) + 1$ для $k = 1, 2, \dots$.

б$_7$) Зададим функцию f_0 равенством $f_0 = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \chi_{I_k}$. Тогда, с одной стороны, $f_0 \in BV_\Phi\langle a, b\rangle$, так как $V_\Phi(\langle a, b\rangle; f_0) \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(z_k) < \infty$, но с другой стороны, $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle c, d\rangle; f_0 \circ h_n) = \infty$, так как по лемме 2 при $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$V_\Psi(\langle c, d\rangle; f_0 \circ h_{i_k}) \geqslant V_\Psi(\langle c, d\rangle; z_k \chi_{I_k} \circ h_{i_k}) \geqslant 2\Psi(z_k) \cdot (|h_{i_k}^{-1}(I_k)| - 1) > 2k.$$

Наличие функции f_0 с такими свойствами противоречит условию леммы.

Лемма 8. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $h_n \in \mathbf{FJ}_N\langle c, d\rangle$, $n = 1, 2, \dots$, *для некоторого* $N \in \mathbb{N}$;
2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle c, d\rangle; f \circ h_n) < \infty$ *для любой функции* $f \in BV_\Phi\langle a, b\rangle$;
3) $\sup_{0<x<1} \Psi(x)/\Phi(x) = \infty$.

Тогда существует такое $M \in \mathbb{N}$, *что при каждом* $n = 1, 2, \dots$ *функция* h_n *принимает не более* M *значений.*

Доказательство. а) По лемме 6 можно подобрать последовательность $\{z_k\} \subset (0; 1)$ так, что $\sum_{k=1}^{\infty} M_k\Phi(z_k) < \infty$, но $\sup_{k\in\mathbb{N}} M_k\Psi(z_k) = \infty$.

б) Пусть доказываемое утверждение неверно. Тогда для любого $M \in \mathbb{N}$ существует функция $h_{n(M)}$, принимающая более чем M различных значений.

в) По индукции выберем для каждого $k = 1, 2, \dots$ функцию h_{n_k} и набор попарно различных точек $y_1^{(k)}, \dots, y_{M_k}^{(k)}$ в множестве $h_{n_k}(\langle c, d\rangle)$ ее значений таким образом, чтобы эти наборы попарно не пересекались, и чтобы при каждом k полные прообразы $h_{n_k}^{-1}(\{y_1^{(k)}\}), \dots, h_{n_k}^{-1}(\{y_{M_k}^{(k)}\})$ этих точек были попарно отделены друг от друга. А именно, в качестве h_{n_1} возьмем функцию, принимающую более чем $N \cdot M_1^2$ различных значений. Тогда по пункту а) леммы 4 среди этих значений можно выбрать M_1 точек $y_1^{(1)}, \dots, y_{M_1}^{(1)}$ так, чтобы их полные прообразы $h_{n_1}^{-1}(\{y_1^{(1)}\}), \dots, h_{n_1}^{-1}(\{y_{M_1}^{(1)}\})$ были попарно отделены друг от друга. Далее, если функции h_{n_j} и точки $y_1^{(j)}, \dots, y_{M_j}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, k-1$, уже выбраны, то в качестве h_{n_k} возьмем функцию, принимающую более чем $(M_1+\dots+M_{k-1}+N\cdot M_k^2)$ различных значений. Среди них найдутся $N\cdot M_k^2$ значений, отличных от уже выбранных точек $y_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \dots, M_j$, $j = 1, 2, \dots, k-1$. По лемме 4, а) из этих значений можно выбрать M_k точек $y_1^{(k)}, \dots, y_{M_k}^{(k)}$ так, чтобы их полные прообразы $h_{n_k}^{-1}(\{y_1^{(k)}\}), \dots, h_{n_k}^{-1}(\{y_{M_k}^{(k)}\})$ были попарно отделены друг от друга.

г) Далее зададим функцию f так: $f(y_i^{(k)}) = z_k$ при $i = 1, \dots, M_k$, $k = 1, 2, \dots$, и $f(x) = 0$ в других точках x промежутка $\langle a, b\rangle$. Тогда

$$V_\Phi(\langle a, b\rangle; f) \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} M_k\Phi(z_k) < \infty,$$

но $V_\Psi(\langle c, d\rangle; f \circ h_n) \geqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} M_k\Psi(z_k) = \infty$.

Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если* $g \in \mathbf{FJ}_N\langle c,d\rangle$ *и* $\sup_{0<x<1}\Psi(x)/\Phi(x) < \infty$, *то* $f\circ g \in BV_\Psi\langle c,d\rangle$ *для любой функции* $f \in BV_\Phi\langle a,b\rangle$, *причем выполняется оценка*

$$V_\Psi(\langle c,d\rangle; f\circ g) \leqslant 2K_f N\cdot V_\Phi(\langle a,b\rangle; f),$$

где $K_f = \sup\{\Psi(z)/\Phi(z) \mid z>0,\ \Phi(z)\leqslant V_\Phi(\langle a,b\rangle; f)\} < \infty$.

Доказательство. Так как по условию $\Psi(|f(x)-f(y)|) \leqslant K_f\cdot\Phi(|f(x)-f(y)|)$ при $x,y\in\langle a,b\rangle$, для любого разбиения $T\in\tau\langle c,d\rangle$ имеем

$$V_\Psi[T; f\circ g] = \sum_{i=1}^n \Psi(|f(g(t_i)) - f(g(t_{i-1}))|) \leqslant K_f\cdot\sum_{i=1}^n \Phi(|f(g(t_i)) - f(g(t_{i-1}))|)).$$

Поскольку f лежит в классе $BV_\Phi\langle a,b\rangle$, ее можно представить (см. [9; теорема 3.2]) в виде $f=\lambda\circ v$, где $v(x) = V_\Phi(\langle a,b\rangle\cap(-\infty,x]; f)$ – ограниченная неубывающая функция на $\mathbb{R}$, а функция $\lambda\colon v(\langle a,b\rangle)\to\mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $|\lambda(x)-\lambda(y)|\leqslant\Phi^{-1}(|x-y|)$ при $x,y\in v(\langle a,b\rangle)$. Поэтому

$$V_\Psi[T; f\circ g] \leqslant K_f\cdot\sum_{i=1}^n |v(g(t_i)) - v(g(t_{i-1}))| \leqslant K_f\cdot V(\langle c,d\rangle; v\circ g).$$

Так как для любого промежутка Π из $\mathbb{R}$ множество $v^{-1}(\Pi)$ – также промежуток и $(v\circ g)^{-1}(\Pi) = g^{-1}(v^{-1}(\Pi))$, то функция $v\circ g$ принадлежит классу $\mathbf{FJ}_N\langle c,d\rangle$ и принимает значения из отрезка $[0, V_\Phi(\langle a,b\rangle; f)]$. Значит, по пункту а) леммы 1

$$V(\langle c,d\rangle; v\circ g) \leqslant V_\Phi(\langle a,b\rangle; f)\cdot(2N-1),$$

откуда

$$V_\Psi(\langle c,d\rangle; f\circ g) \leqslant 2K_f N\cdot V_\Phi(\langle a,b\rangle; f).$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Следующие свойства равносильны*:

1) *среди непрерывных функций, лежащих в классе* $BV_\Phi\langle a,b\rangle$, *есть хотя бы одна функция, не являющаяся постоянной*;
2) *существует* $C>0$ *такое, что* $\Phi(x)\leqslant Cx$ *при* $x\in[0,1]$;
3) $BV\langle a,b\rangle \subset BV_\Phi\langle a,b\rangle$.

Доказательство. а) Выведем из 1) свойство 2). Пусть $f\in BV_\Phi\langle a,b\rangle$ не постоянна и непрерывна на $\langle a,b\rangle$. Тогда $f(\alpha)\neq f(\beta)$ для некоторых $\alpha<\beta$ из $\langle a,b\rangle$. В силу непрерывности f для любого натурального n найдутся такие точки $t_0,t_1,\dots,t_n$ из $[\alpha,\beta]$, что $f(t_k) = f(\alpha) + (f(\beta)-f(\alpha))\cdot k/n$, $k=0,\dots,n$. Пусть T – разбиение, содержащее точки $t_0,t_1,\dots,t_n$. Тогда

$$V_\Phi[T; f] = \sum_{k=1}^n \Phi(|f(t_k) - f(t_{k-1})|) \geqslant \sum_{k=1}^n \Phi\left(\frac{1}{n}\right) = n\Phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда $\Phi(1/n)\leqslant V_\Phi([a,b]; f)/n$, $n=1,2,\dots$. Далее, если $x\in(0,1]$, то $1/(2k) < x \leqslant 1/k$ при некотором $k\in\mathbb{N}$. Поэтому

$$\Phi(x) \leqslant \Phi\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{V_\Phi([a,b]; f)}{k} \leqslant V_\Phi([a,b]; f)\cdot 2x.$$

б) Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

в) Из 3) следует 1), поскольку, например, непрерывная и не постоянная функция $f(t)\equiv t$ лежит в $BV\langle a,b\rangle$, а значит, и в $BV_\Phi\langle a,b\rangle$.

4. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. А) Пусть выполнено условие а). Докажем, что выполнено условие б).

Существование такого натурального N, что $h_n \in \mathbf{FJ}_N\langle c,d\rangle$ при всех $n = 1, 2, \dots$, вытекает из леммы 7.

Предположим теперь, что $\sup_{0<x<1} \Psi(x)/\Phi(x) = \infty$. Тогда по лемме 8 количество значений функции h_n ограничено равномерно по $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, выполнение условия б) доказано.

Б) Теперь предположим, что выполнено условие б) теоремы, и докажем, что выполнено условие а). Для этого достаточно воспользоваться: в случае, когда $\sup_{0<x<1} \Psi(x)/\Phi(x) < \infty$, – леммой 1, а в случае $\sup_{0<x<1} \Psi(x)/\Phi(x) = \infty$ – леммой 9, положив $h_n = h$, $n = 1, 2, \dots$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. А) Пусть выполнено условие а). Докажем б).

Начало – пункты 1) и 2) нашего доказательства – следует доказательству теоремы 1 в [10].

1) Докажем, от противного, что на любом отрезке $[-v, v]$ величины $|h_n(x) - h_n(0)|$ ограничены равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Если это не так, то существуют последовательности точек $\{u_i\} \subset [-v, v]$ и номеров $\{n_i\}$, а также число $u_0 \in [-v, v]$ такие, что

$$|h_{n_i}(u_i) - h_{n_i}(0)| \to \infty, \qquad i \to \infty,$$

и

$$\Phi(|u_i - u_0|) \leqslant \frac{1}{2^i}, \qquad i = 1, 2, \dots .$$

Мы можем считать, что $u_0 \leqslant u_i \leqslant u_1$, $i = 2, 3, \dots$. Пусть $a < t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < b$. Определим функцию f_0, положив $f_0(t_0) = 0$, $f_0(t_i) = u_i$, $i = 1, 2, \dots$, и $f_0(t) = u_0$ в остальных точках t промежутка $\langle a, b\rangle$. Тогда

$$V_\Phi(\langle a, b\rangle; f_0) \leqslant \Phi(u_0) + \Phi(u_1) + 2\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(|u_i - u_0|) < \infty.$$

Но при этом $\sup_n V_\Psi(\langle a, b\rangle; h_n \circ f_0) = \infty$, так как

$$\begin{aligned} V_\Psi(\langle a, b\rangle; h_{n_i} \circ f_0) &\geqslant \Psi(|h_{n_i}(f_0(t_i)) - h_{n_i}(f_0(t_0))|) \\ &= \Psi(|h_{n_i}(u_i) - h_{n_i}(0)|) \to \infty, \qquad i \to \infty. \end{aligned}$$

Получили противоречие.

2) Продолжим доказательство условия а) снова от противного. Если а) не выполнено, то существуют последовательность индексов $\{n_i\}$ и последовательность интервалов (u_i, v_i) из $[-v, v]$, $i = 1, 2, \dots$, такие, что

$$K_i = \frac{\Psi(|h_{n_i}(v_i) - h_{n_i}(u_i)|)}{\Phi(v_i - u_i)} \to \infty, \qquad i \to \infty.$$

Отсюда, так как $|h_n(x) - h_n(0)|$ равномерно ограничены на $[-v, v]$, получаем, что $v_i - u_i \to 0$, $i \to \infty$.

3) Пользуясь этими выводами и леммой 5, выберем строго возрастающие последовательности натуральных чисел $\{M_i\}$ и $\{i_k\}$ так, чтобы для $x_k = u_{i_k}$, $y_k = v_{i_k}$, $m_k = n_{i_k}$, $k = 1, 2, \dots$, выполнялись следующие четыре условия 3а)–3г):

3а) существует предел $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ (следовательно, и $\lim_{k\to\infty} y_k = x_0$);

3б) при $k = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$\Phi(2|x_k - x_0|) \leqslant \frac{1}{2^k}\,, \qquad \Phi(2|y_k - x_0|) \leqslant \frac{1}{2^k}\,;$$

3в) $\sum_{k=1}^{\infty} M_k \Phi(y_k - x_k) < \infty$, но $M_k \Psi(|h_{m_k}(x_k) - h_{m_k}(y_k)|) \to \infty$, $k \to \infty$;

3г) при $k = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$|x_k - x_0| \leqslant \frac{1}{2}\,, \qquad |y_k - x_0| \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

4) Построим функцию f_0 на $[a, b]$ следующим образом. Возьмем последовательность $\{a_n\}$ из $[a, b]$ такую, что $a = a_1 < \cdots < a_k < a_{k+1} < \cdots < b$, $\lim_{k\to\infty} a_k = b$. Далее, при каждом $k = 1, 2, \ldots$ на интервале (a_k, a_{k+1}) выберем точки $t_k^{(1)} < t_k^{(2)} < \cdots < t_k^{(M_k)}$ и положим: $f_0(t_k^{(j)}) = x_k$, $j = 1, \ldots, M_k$, и $f_0(t) = y_k$ в остальных точках полуинтервала $[a_k, a_{k+1})$. Кроме того, зададим $f_0(b) = x_0$.

5) Покажем, что $f_0 \in BV_\Phi\langle a, b\rangle$. Для любого разбиения $T \in \tau\langle a, b\rangle$ вклад в сумму $V_\Phi[T; f] = \sum_{i=1}^{n} \Phi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|)$ тех слагаемых, в которых точки t_i и t_{i-1} принадлежат одному интервалу (a_k, a_{k+1}), $k = 1, 2, \ldots$, можно оценить через $2\sum_{k=1}^{\infty} M_k \times \Phi(y_k - x_k) < \infty$, а вклад тех слагаемых, в которых t_i и t_{i-1} принадлежат разным таким интервалам, можно оценить через $2\sum_{k=1}^{\infty}(\Phi(2|x_k - x_0|) + \Phi(2|y_k - x_0|))$. Поэтому

$$V_\Phi(\langle a, b\rangle; f_0) \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} M_k \Phi(y_k - x_k) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(\Phi(2|x_k - x_0|) + \Phi(2|y_k - x_0|)) < \infty.$$

6) Покажем, что $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle a, b\rangle; h_n \circ f_0) = \infty$. Действительно, в силу результатов пункта 2) имеем

$$\begin{aligned} V_\Psi(\langle a, b\rangle; h_{m_k} \circ f_0) &\geqslant V_\Psi((a_n, a_{n+1}); h_{m_k} \circ f_0) \\ &\geqslant M_k \Psi(|h_{m_k}(y_k) - h_{m_k}(x_k)|) \to \infty, \qquad k \to \infty. \end{aligned}$$

Получили противоречие. Таким образом, условие б) выполнено.

A$'$) Пусть в классе $BV_\Phi\langle a, b\rangle$ есть хотя бы одна непрерывная, не постоянная функция, но б) не выполнено. Тогда можно подобрать непрерывную функцию $f_1 \in BV_\Phi\langle a, b\rangle$ такую, что $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle a, b\rangle; h_n \circ f_1) = \infty$. Для этого изменим конструкцию функции f_0 из пункта 4) следующим образом. При каждом $k = 1, 2, \ldots$ на интервале (a_k, a_{k+1}) выберем точки $s_k^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, M_k$, так, что $s_k^{(0)} < t_k^{(1)} < s_k^{(1)} < \cdots < s_k^{(M_k)} < t_k^{(M_k)}$, и положим: $f_1(s_k^{(i)}) = y_k$, $i = 0, 1, \ldots, M_k$, и $f_1(t_k^{(j)}) = x_k$, $j = 1, \ldots, M_k$. Кроме того, зададим $f_1(a) = y_1$, $f_1(b) = x_0$, и продолжим функцию f_1 в оставшиеся интервалы отрезка $[a, b]$ по линейности.

Построенная так функция f_1 непрерывна на $[a, b]$. Из пункта 3г) следует, что $f_1(t) - f_1(s) \leqslant 1$ при любых $t, s \in \langle a, b\rangle$. Так как по лемме 10 $\Phi(x) \leqslant Cx$ при $x \in [0, 1]$, применяя рассуждения, аналогичные приведенным в пункте 5), получим, что $V_\Phi(\langle a, b\rangle; f_1) < \infty$. Соотношение $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_\Psi(\langle a, b\rangle; h_n \circ f_1) = \infty$ можно доказать так же, как для функции f_0 в пункте 6).

Таким образом, если в классе $BV_\Phi\langle a,b\rangle$ есть хотя бы одна непрерывная, но не постоянная функция, то условие б) вытекает из а$'$). Следовательно, условия а) и б) равносильны условию а$'$).

Б) Теперь предположим, что выполнено условие б) теоремы. Тогда, как показано в [10; с. 434] выполнено и условие а).

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В. В. Чистякову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. Musielak, W. Orlicz, “On generalized variations. I”, *Studia Math.*, **18** (1959), 11–41.

[2] R. Lésniewicz, W. Orlicz, “On generalized variations. II”, *Studia Math.*, **45** (1973), 71–109.

[3] M. Josephy, “Composing functions of bounded variation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **83**:2 (1981), 354–356.

[4] C. Jordan, “Sur la série de Fourier”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **92**:5 (1881), 228–230.

[5] N. Wiener, “The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients”, *Massachusetts J. Math.*, **3** (1924), 72–94.

[6] J. Marcinkiewicz, “On a class of functions and their Fourier series”, *Collected Papers*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsawa, 1964, 36–41.

[7] L. C. Young, “Inequalities connected with bounded p-th power variation in the Wiener sense and with integrated Lipschitz conditions”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **43** (1937), 449–467.

[8] L. C. Young, “Sur une généralisation de la notion de variation de puissance p-ième bornée au sens de N. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **204**:7 (1937), 470–472.

[9] V. V. Chistyakov, O. E. Galkin, “Mappings of bounded Φ-variation with arbitrary function Φ”, *J. Dynam. Control Systems*, **4**:2 (1998), 217–247.

[10] J. Ciemnoczołowski, W. Orlicz, “Composing functions of bounded φ-variation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **96**:3 (1986), 431–436.

О. Е. Галкин
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: galkin@mm.unn.ru

Поступило
26.06.2007