С. Ю. Галкина, О коэффициентах Фурье–Хаара от функций с ограниченной вариацией, *Матем. заметки*, 1992, том 51, выпуск 1, 42–54

Математические заметки

том 51 выпуск 1 январь 1992

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ — ХААРА ОТ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

С. Ю. Галкина

Введение. В работе исследуется вопрос о поведении коэффициентов Фурье по системе Хаара от функций с ограниченной вариацией.

Пусть $\{a_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ — коэффициенты Фурье — Хаара функции f. П. Л. Ульянов в работе [1] установил следующие оценки:

ТЕОРЕМА А (см. [1, с. 361]). *Пусть функция $f(t) \in V(0, 1)$. Тогда справедливы неравенства*

$$\sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} |a_m(f)| \leqslant \frac{3V_0^1 f}{2\sqrt{2^n}} \quad (n \geqslant 0) \tag{1}$$

и

$$|a_m(f)| \leqslant \frac{3V_0^1 f}{\sqrt{m}} \quad (m > 1). \tag{2}$$

ТЕОРЕМА В (см. [1, с. 372]). *Если $f(t) \in V(0, 1)$, то*

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)| \leqslant \frac{3}{2-\sqrt{2}} V_0^1 f. \tag{3}$$

Позже в спецкурсе, прочитанном в Московском университете, П. Л. Ульянов улучшил эти константы: $1/\sqrt{2^n}$ вместо $3/2\sqrt{2^n}$ в (1), $\sqrt{2}/\sqrt{m}$ вместо $3/\sqrt{m}$ в (2), $2+\sqrt{2}$ вместо $3/(2-\sqrt{2})$ в (3). В настоящей работе получены точные константы в оценках (1), (2) и (3). Результаты сформулированы в § 2 в теоремах 1 и 2.

§ 1. Определения и вспомогательные утверждения. Напомним некоторые определения.

Определение 1. Функция, заданная на отрезке [0, 1], называется *функцией с ограниченной вариацией на* [0, 1], если существует постоянная K такая, что для любого разбиения T: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ этого отрезка выполнено

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant K.$$

Число $\sup\limits_{T} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$ называется при этом полной вариацией функций f на $[0, 1]$ и обозначается $V_0^1 f$. Класс функций с ограниченной вариацией на $[0, 1]$ обозначается $V\ (0, 1)$.

Определение 2. Для $n = 2^k + i$ ($i = 1, \ldots, 2^k$; $k = 0, 1, \ldots$) обозначим

$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right); \quad \bar{\Delta}_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right];$$

$$\Delta_n^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right); \quad \Delta_n^- = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right).$$

Система Хаара — это система функций $\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, а функция $\chi_n(x)$ при $n = 2^k + i$ ($i = 1, \ldots, 2^k$; $k = 0, 1, \ldots$) определяется так:

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \notin \bar{\Delta}_n, \\ 2^{k/2} \text{ при } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2} \text{ при } x \in \Delta_n^-, \\ \lim\limits_{\delta \to +0} \chi_n(\delta) \text{ при } x = 0, \\ \lim\limits_{\delta \to +0} \chi_n(1-\delta) \text{ при } x = 1, \\ \lim\limits_{\delta \to 0} \frac{1}{2} [\chi_n(x+\delta) + \chi_n(x-\delta)] \text{ при остальных } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Группа функций $\{\chi_n(x)\}_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} = \{\chi_k^i(x)\}_{i=1}^{2^k}$ ($k = 0, 1, \ldots$) называется k-й *пачкой*. Для $f(t) \in L\ (0, 1)$ определяются коэффициенты Фурье — Хаара по формуле

$$a_m(f) = \int_0^1 f(t)\, \chi_m(t)\, dt, \quad m \geqslant 1.$$

Группу коэффициентов Фурье — Хаара $\{a_m(f)\}_{m=2^k+1}^{2^{k+1}}$ также будем называть k-й пачкой коэффициентов.

Определение 3. *Полиномом порядка* N ($N = 1, 2, \ldots$) по системе Хаара назовем функцию, заданную на отрезке $[0, 1]$ и представимую в виде линейных комбинаций функций Хаара с номерами не больше, чем 2^N. Очевидно, что такие полиномы и только они имеют следующий вид

$$P_N(x) = \begin{cases} m_i = \text{const}, \quad x \in \left(\frac{i-1}{2^N}, \frac{i}{2^N}\right), \quad i = 1, \ldots, 2^N, \\ m_1, \quad x = 0, \\ m_{2^N}, \quad x = 1, \\ \frac{1}{2}(m_i + m_{i+1}), \quad x = \frac{i}{2^N}; \quad i = 1, \ldots, 2^N - 1. \end{cases} \tag{4}$$

Полином $P_N(x)$ имеет скачки $b_i = m_{i+1} - m_i$, $i = \overline{1, 2^N - 1}$ в точках $i/2^N$.

Неубывающим полиномом по системе Хаара будем называть полином по системе Хаара, являющийся неубывающей функцией. Такой полином имеет вид (4), где $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_{2^N}$.

Семейство всех неубывающих полиномов порядка N, отличных от постоянной, обозначим $\mathbf{P}^N$.

Докажем несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Пусть*

$$l_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = p/2^k;\ p = 0, \ldots, 2^k, \\ \dfrac{2^{k/2}}{2^{k+1}} & \text{при } t = \dfrac{1}{2^{k+1}} + \dfrac{r}{2^k};\ r = 0, \ldots, 2^k - 1, \\ \text{линейна на каждом отрезке} & \left[\dfrac{s-1}{2^{k+1}}, \dfrac{s}{2^{k+1}}\right]_{s=1}^{2^{k+1}}. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда при $t \in [0, 1]$ *и* $k = 0, 1, \ldots$ *выполнено равенство*

$$-\int_t^1 \sum_{i=1}^{2^k} \chi_k^i(x)\,\mathrm{d}x = l_k(t). \tag{6}$$

Доказательство. Производная функции $\varphi(t) = -\int_t^1 \sum_{i=1}^{2^k} \chi_k^i(x)\,\mathrm{d}x$ по t равна $\sum_{i=1}^{2^k} \chi_k^i(t)$, т. е. совпадает всюду кроме конечного числа точек с производной функции $l_k(t)$. А также $\varphi(1) = l_k(1) = 0$.

Для абсолютно непрерывных функций $f(t)$, заданных на отрезке $[0, 1]$, верна формула Ньютона — Лейбница

$$f(t) = f(1) - \int_t^1 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Из этой формулы следует, что абсолютно непрерывные функции $\varphi(t)$ и $l_k(t)$ совпадают. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть* P_N — *неубывающий полином порядка* N *по системе Хаара, заданный в* (4) *с* $m_1 = 0$; b_j — *скачки полинома* P_N *в точках* $j/2^N$ $(j = 1, \ldots, 2^N - 1)$. *Ломаная* $l_k(t)$ *задана в* (5). *Тогда для* k*-й пачки коэффициентов Фурье — Хаара полинома* P_N *верно равенство*

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_m(P_N)| = \sum_{j=1}^{2^N-1} b_j l_k(j/2^N), \quad k = \overline{0, N-1} \tag{7}$$

Доказательство. Введем функцию $\mu(x) = 0$ при $x < 0$, $\mu(x) = 1$ при $x > 0$, $\mu(0) = 1/2$. Легко видеть, что

$$P_N(x) = \sum_{j=1}^{2^N-1} b_j \mu(x - j/2^N), \quad x \in [0, 1].$$

Учитывая, что для неубывающих функций коэффициенты Фурье—Хаара не положительны, при $m = 2^k + i$, $i = 1, \ldots, 2^k$; $k =$

$= 0, 1, \ldots$ имеем

$$|a_m(P_N)| = -\int_0^1 P_N(x)\chi_m(x)\,dx = -\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{2^N-1} b_j\mu(x-j/2^N)\right]\chi_m(x)\,dx = -\sum_{j=1}^{2^N-1} b_j\int_0^1 \mu(x-j/2^N)\chi_m(x)\,dx.$$

А для суммы модулей коэффициентов из k-й пачки получим

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_m(P_N)| = -\sum_{j=1}^{2^N-1} b_j\int_0^1 \mu(x-j/2^N)\sum_{i=1}^{2^k}\chi_k^i(x)\,dx = \sum_{j=1}^{2^N-1} b_j\cdot\left(-\int_{j/2^N}^1 \sum_{i=1}^{2^k}\chi_k^i(x)\,dx\right).$$

Отсюда и из равенства (6) следует, что

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_m(P_N)| = \sum_{j=1}^{2^N-1} b_j l_k(j/2^N).$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть P_N — неубывающий полином по системе Хаара, заданный в (4) с $m_1 = 0$. Тогда*

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(P_N)| = \sum_{j=1}^{2^N-1} b_j L_N(j/2^N), \tag{8}$$

где $L_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} l_k(t)$, $t \in [0, 1]$.

Доказательство. Распишем сумму модулей коэффициентов по пачкам:

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(P_N)| = \sum_{m=2}^{2^N} |a_m(P_N)| = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_m(P_N)|.$$

Подставляя сюда выражение (7), получим

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(P_N)| = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{2^N-1} b_j l_k(j/2^N) = \sum_{j=1}^{2^N-1} b_j \sum_{k=0}^{N-1} l_k(j/2^N) = \sum_{j=1}^{2^N-1} b_j L_N(j/2^N).$$

ЛЕММА 4. *Верно равенство*

$$\sup_{P_N\in \mathrm{P}^N} \frac{\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(P_N)|}{V_0^1 P_N} = \max_{1\le j\le 2^N-1} L_N\left(\frac{j}{2^N}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный неубывающий полином $P_N(t)$, задаваемый в (4). Пусть $\tilde{P}_N(t) = P_N(t) - m_1$. Тогда

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(P_N)| = \sum_{m=2}^{\infty} |a_m(\tilde{P}_N)|.$$

Если $P_N(t)$ не убывает, то к $\widetilde{P}_N(t)$ можно применить лемму 3:

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(\widetilde{P}_N)| = \sum_{j=1}^{2^N-1} b_j L_N(j/2^N).$$

А значит, и для полинома $P_N(t)$ также

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(P_N)| = \sum_{j=1}^{2^N-1} b_j L_N(j/2^N).$$

Очевидно, что $\bigvee_0^1 P_N = \sum_{j=1}^{2^N-1} b_j$. Поэтому

$$\frac{\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(P_N)|}{\bigvee_0^1 P_N} = \frac{\sum_{j=1}^{2^N-1} b_j L_N(j/2^N)}{\sum_{j=1}^{2^N-1} b_j} \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant 2^N-1} L_N\left(\frac{j}{2^N}\right) = L_N\left(\frac{j_0}{2^N}\right).$$

А с другой стороны, если взять полином P_N^0, у которого $b_{j_0} > 0$, а $b_j = 0$ при $j \neq j_0$, то для этого полинома

$$\frac{\sum_{j=1}^{2^N-1} b_j L_N(j/2^N)}{\sum_{j=1}^{2^N-1} b_j} = L_N\left(\frac{j_0}{2^N}\right).$$

Таким образом,

$$\sup_{P_N\in \mathrm{P}^N} \frac{\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(P_N)|}{\bigvee_0^1 P_N} = \max_{1\leqslant j\leqslant 2^N} L_N\left(\frac{j}{2^N}\right).$$

Лемма 4 доказана.

Обозначим символом T_N разбиение $T_N = \left\{\frac{j}{2^N}\right\}_{j=1}^{2^N-1}$, а $\overline{T}_N = \left\{\frac{j}{2^N}\right\}_{j=0}^{2^N}$. Отметим следующие свойства:

0) $T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subsetneq T_N \subset T_{N+1} \subset \ldots$;

1) $l_M(t) = 0$ при $t \in \overline{T}_N$, где $M \geqslant N$;

2) $L_M(t) = L_N(t)$ при $t \in \overline{T}_N$, где $M > N$;

3) $l_N(t) = \frac{(\sqrt{2})^N}{2^{N+1}}$ при $t \in T_{N+1} \setminus T_N$;

4) $L_N(t) = L_{N-1}(t) + l_{N-1}(t)$, $t \in [0, 1]$;

5) $L_N(t)$ линейна на каждом из отрезков $[u, v]$, где u, v являются соседними точками разбиения $\overline{T}_N$.

Будем искать $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 2^N-1} L_N(j/2^N)$. Из (5) видно, что все ломаные $l_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ симметричны относительно оси $t = 1/2$, поэтому и коэффициенты $L_N(j/2^N)$ в формуле (8) будут располагаться симметрично. т. е. $L_N(j/2^N) = L_N(2^N - j)/2^N)$ $(j = 1, \ldots, 2^N - 1)$.

В силу вышесказанного достаточно исследовать поведение ломаной $L_N(t)$ только на отрезке $[0, 1/2]$.

ЛЕММА 5. *Пусть* $z_N \in [0, 1/2]$ *— точка, в которой при* $N \geqslant 1$ *достигается* $\max\limits_{t\in T_N} L_N(t) = L_N(z_N)$. *Положим* $z_0 = 0$, $z_{-1} = 1$. *Тогда при* $N \geqslant 1$ *верны следующие утверждения*:

а) z_N *— единственная точка максимума на* $[0, 1/2]$;

$$\text{б)}\quad z_N = \frac{2^N - (-1)^N}{3\cdot 2^N}; \tag{9}$$

$$\text{в)}\quad L_N(z_N) = \frac{2+\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2^{N/2}} - \frac{(-1)^N(\sqrt{2}-1)}{3\cdot 2^N}; \tag{10}$$

$$\text{г)}\quad z_N = \frac{1}{2}(z_{N-1} + z_{N-2}); \tag{11}$$

$$\text{д)}\quad |z_N - z_{N-1}| = \frac{1}{2^N}. \tag{12}$$

Доказательство проводим индукцией по N.

1) При $N = 1$ множество T_1 состоит из одной точки $1/2$. Она и является точкой максимума и $L_1(1/2) = l_0(1/2) = 1/2$. Все пункты а), б), в), г), д) для $N = 1$ выполнены.

2) Пусть теперь пункты а) — д) доказаны для случаев $\leqslant N$. Докажем их для случая $N + 1$.

Начнем доказательство с пункта г). Найдем точку z_{N+1}, в которой достигается $\max\limits_{t\in T_{N+1}} L_{N+1}(t)$. Можно записать

$$\max_{t\in T_{N+1}} L_{N+1}(t) = \max\{\max_{t\in T_N} L_{N+1}(t), \max_{t\in(T_{N+1}\setminus T_N)} L_{N+1}(t)\}. \tag{13}$$

По свойству 2) имеем

$$\max_{t\in T_N} L_{N+1}(t) = \max_{t\in T_N} L_N(t) = L_N(z_N). \tag{14}$$

Далее, учитывая свойства 4), 3) и 5), имеем

$$\max_{t\in(T_{N+1}\setminus T_N)} L_{N+1}(t) = \max_{t\in(T_{N+1}\setminus T_N)} L_N(t) + \frac{(\sqrt{2})^N}{2^{N+1}} =$$

$$= \max_{0\leqslant j\leqslant 2^N-1} \left\{\frac{1}{2}\left(L_N\left(\frac{j}{2^N}\right) + L_N\left(\frac{j+1}{2^N}\right)\right)\right\} + \frac{(\sqrt{2})^N}{2^{N+1}}. \tag{15}$$

Из двух соседних точек разбиения $\overline{T}_N$ одна входит в более крупное разбиение $\overline{T}_{N-1}$ и $L_N(t) = L_{N-1}(t)$ в этой точке. Поэтому

$$L_N\left(\frac{j}{2^N}\right) + L_N\left(\frac{j+1}{2^N}\right) \leqslant L_N(z_N) + L_{N-1}(z_{N-1}),$$

а так как по предположению индукции д) точки z_N и z_{N-1} являются соседними в разбиении $\overline{T}_N$, то

$$\max_{t\in(T_{N+1}\setminus T_N)} L_N(t) = \max_{0\leqslant j\leqslant 2^N-1} \left\{\frac{1}{2}\left(L_N\left(\frac{j}{2^N}\right) + L_N\left(\frac{j+1}{2^N}\right)\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(L_N(z_N) + L_N(z_{N-1})). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15) и учитывая свойство 5), получаем

$$\max_{t\in(T_{N+1}\setminus T_N)} L_{N+1}(t) = L_N\left(\frac{1}{2}(z_N + z_{N-1})\right) + \frac{(\sqrt{2})^N}{2^{N+1}} =$$
$$= L_{N+1}\left(\frac{1}{2}(z_N + z_{N-1})\right). \qquad (17)$$

Из (13), (14) и (17) видно, что $\max\limits_{t\in T_{N+1}} L_{N+1}(t)$ достигается либо в точке z_N, либо в $\frac{1}{2}(z_N + z_{N-1})$. Сравним значения $L_{N+1}(t)$ в этих точках.

Из (17) и свойства 5) видно, что

$$L_{N+1}\left(\frac{1}{2}(z_N + z_{N-1})\right) = \frac{1}{2}(L_N(z_N) + L_{N-1}(z_{N-1})) + \frac{(\sqrt{2})^N}{2^{N+1}}.$$

Применив (10) для случая N и для $N-1$ (при $N = 0$ формула (10) очевидно, верна), получим

$$L_{N+1}\left(\frac{1}{2}(z_N + z_{N-1})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2^{N/2}} - \frac{(-1)^N(\sqrt{2}-1)}{3\cdot 2^N} + \right.$$
$$\left. + \frac{2+\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2^{(N-1)/2}} - \frac{(-1)^{N-1}(\sqrt{2}-1)}{3\cdot 2^{N-1}}\right) + \frac{(\sqrt{2})^N}{2^{N+1}} =$$
$$= \frac{2+\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{N/2}} - \frac{1}{2^{N/2}} + \frac{1}{2^{(N-1)/2}}\right) -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^N(\sqrt{2}-1)}{3\cdot 2^N} + \frac{(-1)^{N-1}(\sqrt{2}-1)}{3\cdot 2^{N-1}}\right).$$

Получаем формулу

$$L_{N+1}\left(\frac{1}{2}(z_N + z_{N-1})\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2^{(N+1)/2}} - \frac{(-1)^{N+1}(\sqrt{2}-1)}{3\cdot 2^{N+1}}. \qquad (18)$$

Из последнего равенства и (10) следует, что

$$L_{N+1}\left(\frac{1}{2}(z_N + z_{N-1})\right) - L_{N+1}(z_N) = \left(\frac{1}{2^{N/2}} - \frac{1}{2^{N+1/2}}\right) +$$
$$+ \left(\frac{(-1)^N(\sqrt{2}-1)}{3\cdot 2^N} - \frac{(-1)^{N+1}(\sqrt{2}-1)}{3\cdot 2^{N+1}}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2^{(N+1)/2}} + \frac{(-1)^N(\sqrt{2}-1)}{2^{N+1}} > 0.$$

Поэтому $\max\limits_{t\in T_{N+1}} L_{N+1}(t)$ достигается в точке $\frac{1}{2}(z_N + z_{N-1}) = z_{N+1}$. Доказан пункт г) и попутно (см. (18)) установлена формула

$$L_{N+1}(z_{N+1}) = \frac{2+\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2^{(N+1)/2}} - \frac{(-1)^{N+1}(\sqrt{2}-1)}{3\cdot 2^{N+1}},$$

т. е. доказан пункт в).

Из проведенного выше доказательства для пункта г) видно, что $\max\limits_{t\in T_{N+1}} L_{N-1}(t)$ достигается только в одной точке $\frac{1}{2}(z_N + z_{N-1})$.

А из предположения индукции а), откуда z_N и z_{N-1} определяются единственным образом, следует, что точка максимума $z_{N+1} = \frac{1}{2}(z_N + z_{N-1})$ также единственна на отрезке $[0, 1/2]$. Доказан пункт а).

В силу (12) имеем для $z_{N+1} = \frac{1}{2}(z_N + z_{N+1})$ равенство

$$|z_{N+1} - z_N| = \frac{|z_N - z_{N-1}|}{2} = \frac{1}{2^{N+1}},$$

т. е. выполнено д) для $N + 1$.

Осталось доказать пункт б). По предположению индукции верны равенства

$$z_N = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^N}{3\cdot 2^N} \text{ и } z_{N-1} = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^{N-1}}{3\cdot 2^{N-1}} \quad (\text{при } N = 1 \text{ также верно}).$$

Тогда из пункта г) следует

$$z_{N+1} = \frac{1}{2}(z_N + z_{N-1}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2(-1)^{N-1} + (-1)^N}{3\cdot 2^N}\right) = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^{N+1}}{3\cdot 2^{N+1}}.$$

Лемма 5 доказана полностью.

ЛЕММА 6. *Пусть* $\mathscr{P} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbf{P}^N$ — *семейство неубывающих полиномов по системе Хаара, отличных от постоянной и* $\{a_m(P)\}_{m=1}^{\infty}$ — *коэффициенты Фурье — Хаара полинома* P. *Тогда*

$$c = \sup_{P\in\mathscr{P}} \frac{\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(P)|}{\bigvee_0^1 P} = \frac{2+\sqrt{2}}{3}.$$

Доказательство. Пусть

$$c(N) = \sup_{P_N \in \mathbf{P}^N} \frac{\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(P_N)|}{\bigvee_0^1 P_N}.$$

По лемме 4 и из (10) имеем

$$c(N) = \frac{2+\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2^{N/2}} - \frac{(-1)^N(\sqrt{2}-1)}{3\cdot 2^N}.$$

Так как $\mathbf{P}^N \subset \mathbf{P}^M$ при $N < M$, то

$$c = \lim_{N\to\infty} c(N) = (2 + \sqrt{2})/3.$$

Лемма 6 доказана.

§ 2. О коэффициентах Фурье — Хаара от функций с ограниченной вариацией.

ТЕОРЕМА 1. а) *Пусть функция* $f(x) \in V(0, 1)$ *и* $\{a_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ — *коэффициенты Фурье функции* f *по системе Хаара. Тогда*

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)| \leqslant \frac{2+\sqrt{2}}{3} \bigvee_0^1 f. \qquad (19)$$

б) *Найдется отличная от постоянной функция* $f_0(x) \in V(0, 1)$ *такая, что*

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f_0)| = \frac{2+\sqrt{2}}{3} \bigvee_0^1 f_0.$$

Доказательство. Докажем пункт а).

1) Пусть $f \in V(0, 1)$. Разложим f на разность двух неубывающих функций следующим образом:

$$f = f_1 - f_2, \text{ где } f_1(x) = \frac{1}{2}\left(\bigvee_0^x f + f(x)\right) \text{ и } f_2(x) = \frac{1}{2}\left(\bigvee_0^x f - f(x)\right).$$

Заметим, что $f_1 + f_2 = \bigvee_0^x f$, а значит,

$$\bigvee_0^1 (f_1 + f_2) = \bigvee_0^1 f. \qquad (20)$$

Допустим, что для неубывающих функций оценка (19) доказана, т. е. если f — неубывающая, то $\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)| \leqslant c \bigvee_0^1 f$, где $c = (2+\sqrt{2})/3$. Покажем, что тогда оценка (19) верна и для функций с ограниченной вариацией.

Так как коэффициенты Хаара вычисляются по формуле

$$a_m(f) = 2^{k/2} \int_{\frac{i-1}{2^k}}^{\frac{2i-1}{2^{k+1}}} \left(f(t) - f\left(t + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) dt,$$

$$m = 2^k + i; \quad i = 1, \ldots, 2^k; \quad k = 0, 1, \ldots,$$

то у неубывающих функций f_1 и f_2 коэффициенты не положительны. Поэтому

$$|a_m(f)| = |a_m(f_1 - f_2)| = |a_m(f_1) - a_m(f_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_m(f_1)| + |a_m(f_2)| = |a_m(f_1) + a_m(f_2)| = |a_m(f_1 + f_2)|.$$

Отсюда, учитывая (20) и то, что функция $f_1 + f_2$ не убывает, имеем

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)| \leqslant \sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f_1 + f_2)| \leqslant c \bigvee_0^1 (f_1 + f_2) = c \bigvee_0^1 f.$$

Таким образом, если оценка (19) доказана для неубывающих функций, то она доказана и для функций с ограниченной вариацией.

2) Докажем (19) для неубывающих функций. Приближаем неубывающую функцию f таким полиномом Хаара:

$$P_N(x) = f\left(\frac{l-1}{2^N}\right) \text{ при } x \in \left(\frac{l-1}{2^N}, \frac{l}{2^N}\right), \quad l = 1, \ldots, 2^N;$$

$$P_N(0) = f(0);$$

$$P_N\left(\frac{l}{2^N}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{l-1}{2^N}\right) + f\left(\frac{l}{2^N}\right)\right) \text{ при } l = 1, \ldots, 2^N - 1;$$

$$P_N(1) = f\left(\frac{2^N-1}{2^N}\right).$$

Будем оценивать модуль разности

$$\left|\sum_{m=2}^{2^N} |a_m(f)| - \sum_{m=2}^{2^N} |a_m(P_N)|\right| \leqslant \sum_{m=2}^{2^N} \big||a_m(f)| - |a_m(P_N)|\big|.$$

Пусть $m = 2^k + i$; $i = 1, \ldots, 2^k$; $k = 0, 1, \ldots, N-1$ и тогда для неубывающих функций $f(x)$ и $P_N(x)$ имеем

$$\big||a_m(f)| - |a_m(P_N)|\big| = |-a_m(f) + a_m(P_N)| = |a_m(\varphi)|, \tag{21}$$

где $\varphi = f - P_N \geqslant 0$ на $[0, 1]$. Поэтому

$$|a_m(\varphi)| = \left|\int_{\frac{i-1}{2^k}}^{\frac{i}{2^k}} \varphi\chi_m \, dt\right| \leqslant \sqrt{2^k}\int_{\frac{i-1}{2^k}}^{\frac{i}{2^k}} \varphi(t)\, dt. \tag{22}$$

Теперь разобьем интеграл по отрезку $\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]$ на сумму интегралов по отрезкам длины $\frac{1}{2^N}$ (таких интегралов 2^{N-k} штук). Оценим интеграл

$$\int_{\frac{i-1}{2^k}}^{\frac{i}{2^k}} \varphi(t)\, dt = \sum_{s=1}^{2^{N-k}} \int_{\frac{i-1}{2^k}+\frac{s-1}{2^N}}^{\frac{i-1}{2^k}+\frac{s}{2^N}} (f(t) - P_N(t))\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^N}\sum_{s=1}^{2^{N-k}} \left(f\left(\frac{i-1}{2^k} + \frac{s}{2^N}\right) - f\left(\frac{i-1}{2^k} + \frac{s-1}{2^N}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^N}\left(f\left(\frac{i}{2^k}\right) - f\left(\frac{i-1}{2^k}\right)\right). \tag{23}$$

Из (21), (22) и (23) вытекает, что

$$\big||a_m(f)| - |a_m(P_N)|\big| \leqslant \frac{2^{k/2}}{2^N}\left(f\left(\frac{i}{2^k}\right) - f\left(\frac{i-1}{2^k}\right)\right).$$

Тогда для k-й пачки коэффициентов имеем

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \big||a_m(f)| - |a_m(P_N)|\big| \leqslant \frac{2^{k/2}}{2^N} \bigvee_0^1 f.$$

Для всей суммы получим следующую оценку:

$$\sum_{m=2}^{2^N} \| a_m(f) | - | a_m(P_N) \| = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \| a_m(f) | -$$

$$- | a_m(P_N) \| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^{k/2}}{2^N} \bigvee_0^1 f = \frac{1}{2^N} \frac{2^{N/2}-1}{\sqrt{2}-1} \bigvee_0^1 f \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Отметим также, что из (3) вытекает $\sum_{m=2^N}^{\infty} | a_m(f) | \to 0$ ($N \to \infty$). Поэтому

$$\sum_{m=2}^{\infty} | a_m(f) | = \sum_{m=2}^{\infty} | a_m(P_N) | + \varepsilon(N), \text{ где } \varepsilon(N) \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Для неубывающих функций f и P_N имеем

$$\bigvee_0^1 f = f(1) - f(0); \quad \bigvee_0^1 P_N = P_N(1) - P_N(0).$$

Из определения $P_N(x)$ следует, что $P_N(0) = f(0)$, $P_N(1) \leqslant f(1)$ и $\bigvee_0^1 P_N \leqslant \bigvee_0^1 f$. В итоге получаем, учитывая лемму 6,

$$\sum_{m=2}^{\infty} | a_m(f) | = \sum_{m=2}^{\infty} | a_m(P_N) | + \varepsilon(N) \leqslant$$

$$\leqslant c \bigvee_0^1 P_N + \varepsilon(N) \leqslant c \bigvee_0^1 f + \varepsilon(N),$$

где $\varepsilon(N) \to 0$ при $N \to 0$, $c = (2 + \sqrt{2})/3$. Устремляя $N \to \infty$, имеем

$$\sum_{m=2}^{\infty} | a_m(f) | \leqslant \frac{2+\sqrt{2}}{3} \bigvee_0^1 f.$$

Пункт а) теоремы 1 доказан.

Докажем пункт б). Пусть $f_0(t) = 1$ при $t \in [0, 1/3)$, $f_0(1/3) = 1/2$, $f_0(t) = 0$ при $t \in (1/3, 1]$. Подсчитаем $\sum_{m=2}^{\infty} | a_m(f_0) |$. Разобьем всю сумму на пачки. Сумму в одной пачке можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{2^k} | a_{2^k+i}(f_0) | = | a_{2^k+i_0}(f_0) | = \int_0^1 f_0(t) \chi_{2^k+i_0}(t)\, dt \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

где i_0 определяется условием: $1/3 \in [(i_0 - 1)/2^k, i_0/2^k]$.

Двоичное разложение числа 1/3 выглядит так:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}} + \ldots$$

поэтому при разбиении отрезка $[0, 1]$ на 2^{2n} ($n = 1, 2, \ldots$) частей точка 1/3 попадает в отрезок

$$\left[\frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}}\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n}}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 2^{2n}}\right].$$

Видно, что точка 1/3 лежит в левой половине этого отрезка и

$$\sum_{i=1}^{2^{2n}} |a_{2^{2n}+i}(f_0)| = 2^n \int_{\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2n}}}^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{3\cdot 2^n}.$$

Следовательно, сумма модулей коэффициентов в пачке с четным номером $2n$ равна $1/(3\cdot 2^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Теперь возьмем в 2 раза более мелкое разбиение на 2^{2n+1} частей. Точка 1/3 при этом лежит в правой половине отрезка $\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2n}}, \frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}}\right]$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{2^{2n+1}} |a_{2^{2n+1}+i}(f_0)| = 2^n\sqrt{2}\left(\int_{\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2n}}}^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2n+2}}} dt - \int_{\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{2n+2}}}^{\frac{1}{3}} dt\right) = \frac{\sqrt{2}}{3\cdot 2^{n+1}},$$

т. е. суммы в пачках с номерами $2n+1$ равны $\frac{\sqrt{2}}{3\cdot 2^{n+1}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Теперь посчитаем суммы в нулевой и первой пачках. В нулевой пачке один коэффициент $|a_2(f_0)| = 1/3$. В первой пачке два коэффициента

$$|a_3(f_0)| + |a_4(f_0)| = |a_3(f_0)| = \sqrt{2}/6.$$

Складывая результаты для всех пачек, получим

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f_0)| = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\cdot 2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{3\cdot 2^{n+1}} = \frac{2+\sqrt{2}}{3},$$

что и требовалось показать. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $f \in V(0, 1)$, $\{a_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ — *коэффициенты Фурье — Хаара функции* f. *Тогда*

а) $\displaystyle\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_m(f)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2^k}} \bigvee_0^1 f \qquad (k = 0, 1, \ldots),$

б) $\displaystyle |a_m(f)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2^k}} \bigvee_0^1 f, \quad m = 2^k + i, \quad i = 1, \ldots, 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$

и найдется отличная от постоянной функция f_0, *для которой в* а) *и* б) *достигается равенство.*

Доказательство. Разложим f в разность двух неубывающих функций так же, как в теореме 1,

$$f = f_1 - f_2, \text{ где } f_1(x) = \frac{1}{2}\left(\bigvee_0^x f + f(x)\right) \text{ и } f_2(x) = \frac{1}{2}\left(\bigvee_0^x f - f(x)\right).$$

Имеем

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_m(f)| = \sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_m(f_1 - f_2)| \leqslant \sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_m(f_1 + f_2)|. \tag{24}$$

Обозначим $\varphi = f_1 + f_2$. Функция φ не убывает. Для нее выполнено

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_m(\varphi)| = \sum_{i=1}^{2^k} \sqrt{2^k} \int_{\frac{i-1}{2^k}}^{\frac{2i-1}{2^{k+1}}} \left(\varphi\left(t + \frac{1}{2^{k+1}}\right) - \varphi(t)\right) \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2^k} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i=1}^{2^k} \left(\varphi\left(\frac{i}{2^k}\right) - \varphi\left(\frac{i-1}{2^k}\right)\right) = \frac{\bigvee_0^1 \varphi}{2\sqrt{2^k}}. \tag{25}$$

Учитывая (20), (24) и (25), получаем утверждение пункта а).

Оценка достигается, например, на функции $f_0(t) = 1$ при $t \in \left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right)$, $f_0\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2}$, $f_0(t) = 0$ при $t \in \left(\frac{1}{2^{k+1}}, 1\right]$. Для нее $\bigvee_0^1 f_0 = 1$; $a_{2^k+i}(f_0) = 0$, $i = 2, \ldots, 2^k$,

$$|a_{2^k+1}(f_0)| = \sqrt{2^k} \int_0^{\frac{1}{2^{k+1}}} f_0(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2^k}} = \frac{\bigvee_0^1 f_0}{2\sqrt{2^k}}, \tag{26}$$

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_m(f_0)| = \frac{1}{2\sqrt{2^k}} \bigvee_0^1 f_0.$$

Оценка б) следует из оценки а), так как

$$|a_m(f)| \leqslant \sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_m(f)|,$$

$$m = 2^k + i,\ i = 1, \ldots, 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Оценка достигается на приведенной выше функции f_0 (см. (26)). Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает благодарность П. Л. Ульянову за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
12.05.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара // Мат. сб. 1964. Т. 63 (105). С. 356—391.