С. Ю. Галкина, Оценки коэффициентов Фурье–Хаара для функций двух переменных с граниченной вариацией, *Изв. вузов. Матем.*, 2001, номер 2, 69–72

И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 2 (465)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.518

С.Ю. ГАЛКИНА

ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ–ХААРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

Работа посвящена исследованию поведения коэффициентов Фурье–Хаара $a_{mn}(f)$ от функций f, интегрируемых по Лебегу на квадрате $D=[0,1]^2$ и имеющих ограниченную вариацию Витали $V_D f$. А именно, найдены точные константы C_1, C_2 и C_3 в оценках

$$|a_{mn}(f)|\leqslant C_1\cdot V_D f,\qquad \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}}\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}}|a_{mn}(f)|\leqslant C_2\cdot V_D f$$

(теорема 3) и в оценке

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}|a_{mn}(f)|\leqslant C_3\cdot V_D f$$

(теорема 4).

Такие оценки для функций одной переменной впервые получены П.Л. Ульяновым ([1], сс. 361, 372). Точные константы для функций одной переменной найдены автором в [2].

Пусть $D=[0,1]^2$ — единичный квадрат, $\Pi=[a,b]\times[c,d]\subset D$ — произвольный прямоугольник из D, $\tau(\Pi)$ — семейство всех подмножеств в Π вида $T=\{(x_k,y_l)\mid k=0,\dots,m,\ l=0,\dots,n;\ a=x_0<x_1<\dots<x_m=b,\ c=y_0<y_1<\dots<y_n=d\}$. Для произвольной точки $(x,y)\in\Pi$ неотрицательные числа η и ξ будем называть допустимыми приращениями в Π по x и y соответственно, если $x+\eta\in[a,b]$ и $y+\xi\in[c,d]$. Если $f:\Pi\to\mathbb{R}$ — некоторая функция, $(x,y)\in\Pi$ и η, ξ — допустимые приращения в Π, то определены величины

$$\Delta_\eta^{(1)}f(x,y)=f(x+\eta,y)-f(x,y),\quad \Delta_\xi^{(2)}f(x,y)=f(x,y+\xi)-f(x,y)$$

и

$$\Delta_\xi^{(2)}\Delta_\eta^{(1)}f(x,y)=f(x+\eta,y+\xi)+f(x,y)-f(x+\eta,y)-f(x,y+\xi).$$

Определение 1 ([3]). Вариацией Витали функции $f:\Pi\to\mathbb{R}$ по прямоугольнику Π называется величина

$$V_\Pi f=\sup_{T\in\tau(\Pi)}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1}|\Delta_{\xi_l}^{(2)}\Delta_{\eta_k}^{(1)}f(x_k,y_l)|,$$

где $\eta_k=x_{k+1}-x_k$ и $\xi_l=y_{l+1}-y_l$ для $k=0,\dots,m-1$, $l=0,\dots,n-1$. Вариацию $V_\Pi f$ будем обозначать символом $V_{a\,c}^{b\,d}f$. Класс функций, имеющих конечную вариацию Витали по D, обозначим через $V(D)$.

Лемма 1 ([3]). *Пусть* $0\leqslant a\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant 1$ *и* $0\leqslant b\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant 1$. *Тогда*

$$V_{a\,b}^{a_2\,b_2}f=V_{a\,b}^{a_1\,b_1}f+V_{a_1\,b}^{a_2\,b_1}f+V_{a\,b_1}^{a_1\,b_2}f+V_{a_1\,b_1}^{a_2\,b_2}f.$$

Обозначим через $V_0(D)$ класс функций $\{f\in V(D)\mid f(\cdot,0)\equiv 0,\ f(0,\cdot)\equiv 0\}$.

Определение 2. Функцию $g : D \to \mathbb{R}$ будем называть неубывающей, если для любых $(x, y) \in D$ и допустимых в D приращений η, ξ выполняется неравенство $\Delta_\xi^{(2)}\Delta_\eta^{(1)} g(x, y) \geqslant 0$.

Это определение оправдывается тем, что любая функция $g \in V_0(D)$, неубывающая в смысле определения 2, не убывает по x при любом фиксированном y и не убывает по y при любом фиксированном x.

Лемма 2. *Пусть* $\Pi = [a, b] \times [c, d] \subset D$, $f : \Pi \to \mathbb{R}$ *— неубывающая функция. Тогда*

$$V_\Pi f = f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c).$$

Следствие. Если $f \in V_0(D)$ и f неубывающая, то $V_D f = f(1, 1)$.

Известно [4], что функция $f : D \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию Витали по D тогда и только тогда, когда она является разностью двух неубывающих функций. В частности, любая неубывающая функция имеет ограниченную вариацию Витали. Этот результат допускает следующее уточнение.

Теорема 1. *Пусть* $f \in V(D)$. *Тогда найдутся такие неубывающие функции* $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$, *что* $f = f_1 - f_2$ *и* $V_D f = V_D f_1 + V_D f_2$.

Обозначим через $V_L(D)$ класс функций $\{f \in V(D) \mid f(\cdot, 0),\ f(0, \cdot) \in L^1[0, 1]\}$.

Лемма 3. $V_L(D) = V(D) \cap L^1(D)$.

Результат теоремы 1 переносится и на функции класса $V_L(D)$.

Теорема 2. *Для всякой функции* $f \in V_L(D)$ *найдутся неубывающие функции* $f_1, f_2 \in V_L(D)$ *такие, что* $f = f_1 - f_2$ *и* $V_D f = V_D f_1 + V_D f_2$.

Определение 3. Пусть для некоторых $M, N \in \mathbb{N}$ заданы разбиения $T_1 = \{x_i\}_{i=0}^M$ и $T_2 = \{y_j\}_{j=0}^N$ отрезка $[0, 1]$. Обозначим через $T = \{D_{ij}\}_{i,j=1}^{M,N}$ соответствующее разбиение квадрата D на прямоугольники D_{ij}, определяемые так: $D_{11} = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$, $D_{1j} = [x_0, x_1] \times (y_{j-1}, y_j]$, $D_{i1} = (x_{i-1}, x_i] \times [y_0, y_1]$, $D_{ij} = (x_{i-1}, x_i] \times (y_{j-1}, y_j]$ при $2 \leqslant i \leqslant M$, $2 \leqslant j \leqslant N$. Тогда функцию P, принимающую на каждом из прямоугольников D_{ij} постоянные значения b_{ij}, будем называть ступенчатой функцией типа (M, N).

В следующих двух леммах выявляется структура значений b_{ij} неубывающих ступенчатых функций на прямоугольниках D_{ij}.

Лемма 4. *Пусть* P *— неубывающая ступенчатая функция типа* (M, N). *Обозначим ее вариацию Витали по замыканию* $\overline{D}_{ij}$ *прямоугольников* D_{ij} *через* v_{ij}. *Тогда* $b_{ij} = \sum\limits_{m=1}^{i}\sum\limits_{n=1}^{j} v_{mn} + b_{i1} + b_{1j} - b_{11}$ *для всех* $1 \leqslant i \leqslant M$, $1 \leqslant j \leqslant N$.

Имеет место и обратное утверждение.

Лемма 5. *Пусть* P *— ступенчатая функция типа* (M, N), *принимающая на прямоугольниках* D_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant M$, $1 \leqslant j \leqslant N$, *постоянные значения* b_{ij}, *причем* $b_{ij} = \sum\limits_{m=1}^{i}\sum\limits_{n=1}^{j} v_{mn} + b_{i1} + b_{1j} - b_{11}$, *где все* v_{mn} *неотрицательны, а* $v_{11} = 0$. *Тогда* P *— неубывающая функция и* $V_{\overline{D}_{ij}} = v_{ij}$.

Пусть $\{\chi_m\}_{m=1}^\infty$ — функции Хаара (см., напр., [5], с. 77). Коэффициенты Фурье-Хаара $a_{mn}(f)$ функции $f \in L^1(D)$ вычисляются по формуле

$$a_{mn}(f) = \int_0^1 ds \int_0^1 \chi_m(t)\chi_n(s) f(t, s)\, dt. \tag{1}$$

Вместо χ_m возьмем функции $\widetilde{\chi}_m$, которые описаны в следующем ниже определении и являются непрерывными слева. Поскольку при каждом $m = 1, 2, \ldots$ функции $\widetilde{\chi}_m$ и χ_m отличаются не более чем в трех точках, то равенство (1) останется верным, если заменить в нем χ_m на $\widetilde{\chi}_m$.

Определение 4. а) $\widetilde{\chi}_1(t) = 1$ при любом $t \in [0,1]$.
б) Если $m = 2^k + i$, где $1 \leqslant i \leqslant 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$, и $t \in [0,1]$, то

$$\widetilde{\chi}_m(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \notin [\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}],\ i = 1; \\ 0 & \text{при } t \notin (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}],\ i \neq 1; \\ 2^{k/2} & \text{при } t \in [\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}],\ i = 1; \\ 2^{k/2} & \text{при } t \in (\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}],\ i \neq 1; \\ -2^{k/2} & \text{при } t \in (\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}]. \end{cases}$$

Лемма 6. *Пусть $f \in L^1(D)$. Тогда для ее коэффициентов Фурье–Хаара верна формула*

$$a_{mn}(f) = 2^{(k+p)/2} \int_{(j-1)/2^p}^{(2j-1)/2^{p+1}} ds \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \Delta^{(2)}_{1/2^{p+1}} \Delta^{(1)}_{1/2^{k+1}} f(t,s)\, dt,$$

где $m = 2^k + i$, $n = 2^p + j$; $1 \leqslant i \leqslant 2^k$, $1 \leqslant j \leqslant 2^p$; $k, p = 0, 1, \ldots$

Следствие. У любой неубывающей функции $f \in L^1(D)$ коэффициенты Фурье–Хаара неотрицательны.

Теорема 3. а) *Если $f \in V_L(D)$, то при любых $m, n \geqslant 2$ для коэффициентов Фурье–Хаара функции f верны оценки $|a_{mn}(f)| \leqslant 2^{-2-(k+p)/2} \cdot V_D(f)$ и $\sum\limits_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \sum\limits_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} |a_{mn}(f)| \leqslant 2^{-2-(k+p)/2} \cdot V_D(f)$, где $m = 2^k + i$, $n = 2^p + j$; $1 \leqslant i \leqslant 2^k$, $1 \leqslant j \leqslant 2^p$; $k, p = 0, 1, \ldots$*

б) *Существует функция $f \in V_L(D)$ с отличной от нуля вариацией Витали, для которой в оценках п.* а) *достигается равенство.*

Определение 5. Пусть $M, N \in \mathbb{N}$. Многочленом Хаара порядка (M, N) будем называть функцию $P : D \to \mathbb{R}$ вида $P(x,y) = \sum\limits_{m=1}^{M} \sum\limits_{n=1}^{N} a_{mn} \widetilde{\chi}_m(x) \widetilde{\chi}_n(y)$, где $a_{mn} \in \mathbb{R}$, $m = 1, \ldots, M$, $n = 1, \ldots, N$.

Если $a_{mn} = a_{mn}(f)$, $m = 1, \ldots, M$, $n = 1, \ldots, N$, то будем также называть P многочленом Хаара функции f.

Ясно, что любой многочлен Хаара порядка $(2^M, 2^N)$ является ступенчатой функцией типа $(2^M, 2^N)$ в смысле определения 3, причем соответствующие разбиения T_1 и T_2 имеют вид

$$T_1 = \left\{ \frac{i}{2^M} \right\}_{i=0}^{2^M}, \quad T_2 = \left\{ \frac{j}{2^N} \right\}_{j=0}^{2^N}.$$

Лемма 7. *Пусть P — неубывающий многочлен Хаара порядка $(2^M, 2^N)$. Тогда*

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} |a_{mn}(P)| = \sum_{i=1}^{2^M} \sum_{j=1}^{2^N} v_{ij} l_k(i/2^M) l_p(j/2^N),$$

где $v_{ij} = V_{\overline{D}_{ij}} P$, а ломаные $l_k(t)$, $t \in [0,1]$, для любого $k = 0, 1, \ldots$ определяются следующим образом:

$$l_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = \frac{p}{2^k},\ p = 0, 1, \ldots, 2^k; \\ 2^{-k/2-1} & \text{при } t = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{q}{2^k},\ q = 0, 1, \ldots, 2^k - 1; \\ \text{линейна} & \text{при } t \in [\frac{r-1}{2^{k+1}}, \frac{r}{2^{k+1}}],\ r = 1, \ldots, 2^{k+1}. \end{cases}$$

Лемма 8. *Пусть P — неубывающий многочлен Хаара порядка $(2^M, 2^N)$. Тогда*

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} |a_{mn}(P)| = \sum_{i=1}^{2^M} \sum_{j=1}^{2^N} v_{ij} \cdot L_M(i/2^M) \cdot L_N(j/2^N),$$

где $L_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} l_k(t)$, $t \in [0,1]$, $n = 1, 2, \dots$

Лемма 9. *Пусть* $\mathcal{P}_{MN}$ *— множество всех неубывающих многочленов Хаара* P *порядка* $(2^M, 2^N)$ *таких, что* $V_D P \neq 0$. *Тогда*

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_{MN}} \frac{\sum\limits_{m=2}^{\infty} \sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_{mn}(P)|}{V_D P} = \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^M} L_M(i/2^M) \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant 2^N} L_N(j/2^N).$$

Лемма 10. *Пусть* $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{M=1}^{\infty} \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathcal{P}_{MN}$ *— множество всех многочленов Хаара* P *таких, что* $V_D P \neq 0$. *Тогда*

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \frac{\sum\limits_{m=2}^{\infty} \sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_{mn}(P)|}{V_D P} = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right)^2.$$

Лемма 11. *Пусть* $f \in L^1(D)$ *и* $P_N(x, y)$ *— многочлен Хаара порядка* $(2^N, 2^N)$ *функции* f. *Тогда для любых* $x \in \left(\frac{i-1}{2^N}, \frac{i}{2^N}\right]$ *и* $y \in \left(\frac{j-1}{2^N}, \frac{j}{2^N}\right]$ *при* $1 \leqslant i, j \leqslant 2^N$ *верно равенство*

$$P_N(x, y) = 2^{2N} \int_{(j-1)/2^N}^{j/2^N} ds \int_{(i-1)/2^N}^{i/2^N} f(t, s)\, dt.$$

Лемма 12. *Пусть* $f \in L^1(D)$ *— неубывающая функция. Тогда*

а) *многочлен Хаара* $P_N(x, y) = \sum\limits_{m=1}^{2^N} \sum\limits_{n=1}^{2^N} a_{mn}(f) \widetilde{\chi}_m(x) \widetilde{\chi}_n(y)$ *порядка* $(2^N, 2^N)$ *функции* f *— также неубывающая функция;*

б) *выполняется неравенство* $V_D P_N \leqslant V_D f$.

Теорема 4. а) *Для любой функции* $f \in V_L(D)$ *верна оценка*

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} |a_{mn}(f)| \leqslant \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right)^2 \cdot V_D f.$$

б) *Найдется функция* $f \in V_L(D)$ *с отличной от нуля вариацией Витали, для которой в оценке п.* а) *достигается равенство.*

Литература

1. Ульянов П.Л. *О рядах по системе Хаара* // Матем. сб. – 1964. – Т. 63. – С. 356–391.
2. Галкина С.Ю. *О коэффициентах Фурье–Хаара от функций с ограниченной вариацией* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 51. – Вып. 1. – С. 42–54.
3. Vitali G. *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variable reale* // Atti. Accad. Sci. Torino. – 1908. – V. 43. – P. 75–92.
4. Hahn H. *Theorie der reellen Funktionen*, Bd. 1. – 1921.
5. Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды.* – М.: Наука, 1984. – 496 с.

Нижегородский государственный
педагогический университет

Поступила
05.05.1999