С. Ю. Галкина, О коэффициентах Фурье–Хаара функций нескольких переменных с ограниченной вариацией Витали, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 6, 803–814

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm794

Математические заметки

ТОМ 70 ВЫПУСК 6 ДЕКАБРЬ 2001

УДК 517.518.24+517.518.36+517.521.5

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ–ХААРА ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ ВИТАЛИ

С. Ю. Галкина

Работа посвящена исследованию поведения коэффициентов $a_{m_1,\dots,m_n}(f)$ Фурье–Хаара функций f, интегрируемых по Лебегу на n-мерном кубе $D_n=[0,1]^n$ и имеющих ограниченную вариацию Витали $V_{D_n}f$ на нем. Доказана оценка

$$\sum_{m_1=2}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=2}^{\infty}|a_{m_1,\dots,m_n}(f)|\leqslant\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)^n\cdot V_{D_n}f$$

и показано, что она достигается на некоторой функции, имеющей конечную ненулевую вариацию Витали.

Библиография: 5 названий.

Введение. Пусть функция f имеет ограниченную вариацию V_0^1f на отрезке $[0,1]$ и $\{a_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ – коэффициенты Фурье функции f по системе Хаара. Ульянов в работе [1, с. 372] установил следующую оценку:

$$\sum_{m=2}^{\infty}|a_m(f)|\leqslant\frac{3}{2-\sqrt{2}}\cdot V_0^1f.$$

Позднее, в спецкурсе, прочитанном в Московском университете, Ульянов улучшил константу $3/(2-\sqrt{2}\,)$, заменив ее на $2+\sqrt{2}$.

В работе [2, с. 50] была получена оценка

$$\sum_{m=2}^{\infty}|a_m(f)|\leqslant\frac{2+\sqrt{2}}{3}\cdot V_0^1f$$

и установлено, что она достигается на некоторой имеющей ненулевую вариацию (и, значит, отличной от постоянной) функции f_0.

В данной статье эти факты распространяются на случай n переменных. Для коэффициентов Фурье–Хаара $a_{m_1,\dots,m_n}(f)$ функции f, интегрируемой по Лебегу на n-мерном кубе $D_n=[0,1]^n$ и имеющей ограниченную вариацию Витали $V_{D_n}f$ на нем, доказана оценка

$$\sum_{m_1=2}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=2}^{\infty}|a_{m_1,\dots,m_n}(f)|\leqslant\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)^n\cdot V_{D_n}f.$$

Показано также, что эта оценка достигается на некоторой функции, имеющей конечную ненулевую вариацию Витали.

Основные определения. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на n-мерном кубе $D_n=[0,1]^n$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда определены ее коэффициенты Фурье–Хаара

$$a_{m_1,\dots,m_n}(f)=\int_0^1 dx_1\cdots\int_0^1 f(x_1,\dots,x_n)\cdot\chi_{m_1}(x_1)\cdots\chi_{m_n}(x_n)\,dx_n,$$

где $m_1,\dots,m_n\in\mathbb{N}$, а $\{\chi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – система Хаара, которая определяется следующим образом.

Определение 1. *Системой Хаара* называется система функций, задаваемая следующим образом:

а) $\chi_1(x)=1$ при любом $x\in[0,1]$;

б) если $m=2^k+i$, где $1\leqslant i\leqslant 2^k$, $k=0,1,\dots$, и $x\in[0,1]$, то

$$\chi_m(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\notin\left[\dfrac{i-1}{2^k},\dfrac{i}{2^k}\right],\\ 2^{k/2} & \text{при } x\in\left(\dfrac{i-1}{2^k},\dfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right),\\ -2^{k/2} & \text{при } x\in\left(\dfrac{2i-1}{2^{k+1}},\dfrac{i}{2^k}\right),\\ \lim\limits_{\delta\to+0}\chi_m(\delta) & \text{при } x=0,\\ \lim\limits_{\delta\to+0}\chi_m(1-\delta) & \text{при } x=1,\\ \lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{1}{2}[\chi_m(x+\delta)+\chi_m(x-\delta)] & \text{при других } x\in[0,1]. \end{cases}$$

Введем для каждого $i=1,\dots,n$ разностный оператор

$$\Delta_{h_i}^{(i)}f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h_i,x_{i+1}\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n).$$

Пусть $\Pi=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\dots\times[a_n,b_n]$ – некоторый параллелепипед в пространстве $\mathbb{R}^n$, и пусть $\tau(\Pi)$ – семейство всех подмножеств T из Π вида

$$T=\bigl\{(x_1^{(k_1)},x_2^{(k_2)},\dots,x_n^{(k_n)})\bigm| k_i=0,1,\dots,K_i,\ i=1,\dots,n\bigr\}$$

таких, что $a_i=x_i^{(0)}<x_i^{(1)}<\dots<x_i^{(K_i)}=b_i$, $i=1,\dots,n$. Каждое множество $T\in\tau(\Pi)$ определяет разбиение параллелепипеда Π на более мелкие n-мерные параллелепипеды гиперплоскостями $x_i=x_i^{(k_i)}$, $k_i=0,\dots,K_i$, $i=1,\dots,n$.

Определение 2 (см. [3]). *Вариацией Витали функции* $f\colon\Pi\to\mathbb{R}$ *по параллелепипеду* Π называется величина

$$V_\Pi f=\sup_{T\in\tau(\Pi)}V[T,f],$$

где

$$V[T,f]=\sum_{k_1=0}^{K_1-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{K_n-1}\bigl|\Delta_{h_1^{(k_1)}}^{(1)}\cdots\Delta_{h_n^{(k_n)}}^{(n)}f(x_1^{(k_1)},\dots,x_n^{(k_n)})\bigr|$$

и $h_i^{(k_i)}=x_i^{(k_i+1)}-x_i^{(k_i)}$, $k_i=0,\dots,K_i-1$, $i=1,\dots,n$. Если $V_\Pi f<\infty$, то говорят, что *функция f имеет ограниченную вариацию Витали на* Π. Класс всех функций, имеющих ограниченную вариацию Витали на Π, обозначается через $V(\Pi)$. В частности, далее мы будем рассматривать функции класса $V(D_n)$.

Замечание. При $n = 1$ определение 2 совпадает с обычным определением функции ограниченной вариации на отрезке.

В дальнейшем нам понадобится понятие вариации функции одной переменной на произвольном подмножестве $\mathbb{R}$.

Определение 3. *Разбиением* множества $E \subset \mathbb{R}$, состоящего более чем из одной точки, назовем произвольное конечное множество точек $T = \{t_i\}_{i=0}^{m} \subset E$, $m \in \mathbb{N}$, такое, что $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, \dots, m$. Семейство всех разбиений множества E обозначим через $\tau(E)$.

Определение 4 (см., например, [4, с. 686]). *Вариацией функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ на множестве $E \subset \mathbb{R}$*, состоящем более чем из одной точки, называется величина

$$V_E f = \sup_{T \in \tau(E)} V[T, f],$$

где

$$V[T, f] = \sum_{i=0}^{m-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Если множество E пусто или состоит из одной точки, то положим $V_E f = 0$.

Если $V_E f < \infty$, то будем называть f *функцией ограниченной вариации на E*.

Вспомогательные утверждения. Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для всякой точки α из множества E выполняется равенство*

$$V_E f = V_{(-\infty,\alpha]\cap E} f + V_{[\alpha,+\infty)\cap E} f.$$

Доказательство леммы 1 приведено в работе [5, предложение 2.1, с. 155].

Лемма 2. *Пусть $E \subset [0,1]$ и $f\colon E \to \mathbb{R}$ – функция ограниченной вариации на E. Определим функцию $g(x)$, $x \in [0,1]$, равенством $g(x) = V_{[0,x]\cap E} f$. Тогда для любых $\alpha < \beta$ из множества E выполняется равенство*

$$V_{[\alpha,\beta]\cap E} f = g(\beta) - g(\alpha).$$

Доказательство. Докажем, что $g(\beta) = g(\alpha) + V_{[\alpha,\beta]\cap E} f$.

Положим $E_1 = [0,\beta] \cap E$. Согласно лемме 1 имеем равенство

$$V_{E_1} f = V_{(-\infty,\alpha]\cap E_1} f + V_{[\alpha,+\infty)\cap E_1} f.$$

Так как

$$(-\infty,\alpha] \cap E_1 = (-\infty,\alpha] \cap [0,\beta] \cap E = [0,\alpha] \cap E,$$
$$[\alpha,+\infty) \cap E_1 = [\alpha,+\infty) \cap [0,\beta] \cap E = [\alpha,\beta] \cap E,$$

то

$$V_{[0,\beta]\cap E} f = V_{[0,\alpha]\cap E} f + V_{[\alpha,\beta]\cap E} f.$$

Замечая, что $V_{[0,\beta]\cap E} f = g(\beta)$ и $V_{[0,\alpha]\cap E} f = g(\alpha)$, получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть множество* $E \subset [0,1]$ *имеет меру Лебега, равную* 1, *и функция* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *имеет ограниченную вариацию на* E. *Тогда ее можно так продолжить до функции* $\widetilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, *имеющей ограниченную вариацию на* $[0,1]$, *что* $V_E f = V_0^1 \widetilde{f}$.

Доказательство. Определим на $[0,1]$ функцию $g(x) = V_{[0,x]\cap E} f$. Тогда $g(1) = V_E f$. По лемме 2 эта функция является неубывающей на $[0,1]$. Поэтому в каждой точке $x \in (0,1)$ существуют конечные односторонние пределы $g(x-0)$ и $g(x+0)$, и, кроме того, существуют конечные пределы $g(0+0)$ и $g(1-0)$.

Определим функцию $\widetilde{f}(x)$, $x \in [0,1]$, следующим образом.

а) Если $x \in E$, то положим $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

б) Пусть $x \in [0,1)\setminus E$. Тогда так как $\mu(E) = 1$, при любом натуральном n в интервале $(x, x+1/n)$ найдется точка $x_n \in E$. Таким образом, получим последовательность $\{x_n\}$ точек из E таких, что $x_n > x$ и $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Из определения вариации следует, что при $x_m \leqslant x_n$ выполнена оценка

$$|f(x_m) - f(x_n)| \leqslant V_{[x_m,x_n]\cap E} f,$$

а согласно лемме 2 вариация $V_{[x_m,x_n]\cap E} f = |g(x_m) - g(x_n)|$, поэтому $|f(x_m) - f(x_n)| \leqslant |g(x_m) - g(x_n)|$. Отсюда, учитывая, что

$$|g(x_m) - g(x_n)| \leqslant |g(x_m) - g(x+0)| + |g(x_n) - g(x+0)| \to 0 \qquad (m,n \to \infty),$$

получаем, что $|f(x_m) - f(x_n)| \to 0$ $(m,n \to \infty)$. Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$ и, значит, имеет предел. Остается положить

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

в) Если $x = 1 \notin E$, то положим

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

где $x_n \to 1$ $(n \to \infty)$, $x_n < 1$, $x_n \in E$ при $n \in \mathbb{N}$ (существование такой последовательности x_n и предела $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ доказывается аналогично п. б)).

Итак, функция $\widetilde{f}(x)$ определена. Покажем, что $V_0^1 \widetilde{f}(x) = V_E f$.

Неравенство $V_E f \leqslant V_0^1 \widetilde{f}(x)$ очевидно. Докажем, что $V_0^1 \widetilde{f}(x) \leqslant V_E f$. Возьмем произвольное разбиение $T = \{t_k\}_{k=0}^N \in \tau([0,1])$. Тогда по определению функции $\widetilde{f}(x)$ для любого $k = 0, 1, \dots, N$ существует последовательность $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ точек из E таких, что $x_n^{(k)} \to t_k$ $(n \to \infty)$ и $\widetilde{f}(t_k) = \lim_{n\to\infty} f(x_n^{(k)})$. Поэтому

$$V[T,f] = \sum_{k=0}^{N-1} |\widetilde{f}(t_{k+1}) - \widetilde{f}(t_k)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_n^{(k+1)}) - f(x_n^{(k)})| \leqslant V_E f.$$

Переходя здесь к супремуму по $T \in \tau([0,1])$, получаем неравенство $V_0^1 \widetilde{f}(x) \leqslant V_E f$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть функция f интегрируема по Лебегу на $[0,1]$, $\{a_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ – ее коэффициенты Фурье–Хаара. Тогда если $m=2^k+i$, $i=1,\dots,2^k$, $k=0,1,\dots$, то*

$$a_m(f)=-2^{k/2}\int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}}\Delta_{1/2^{k+1}}f(t)\,dt.$$

Доказательство. Из определения функций Хаара следует цепочка равенств

$$\begin{aligned}a_m(f)&=\int_0^1 f(t)\chi_m(t)\,dt=2^{k/2}\int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}}f(t)\,dt-2^{k/2}\int_{(2i-1)/2^{k+1}}^{i/2^k}f(t)\,dt\\&=2^{k/2}\int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}}\Bigl(f(t)-f\Bigl(t+\frac{1}{2^{k+1}}\Bigr)\Bigr)\,dt\\&=-2^{k/2}\int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}}\Delta_{1/2^{k+1}}f(t)\,dt,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пусть $f\in L_1(D_n)$, $n\geqslant 2$. Обозначим через E_f множество тех чисел x_1, для которых функция $f_{x_1}(x_2,\dots,x_n)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ определена и принадлежит по $(x_2,\dots,x_n)$ классу $L_1(D_{n-1})$. По теореме Фубини мера Лебега множества E_f равна 1.

Лемма 5. *Пусть функция f имеет ограниченную вариацию Витали на D_n и интегрируема по Лебегу на D_n, $n\geqslant 2$. Тогда для любого набора $m_2,\dots,m_n$ натуральных чисел не меньших 2 функция*

$$f_{m_2,\dots,m_n}(x_1)=a_{m_2,\dots,m_n}(f(x_1,\,\cdot\,))$$

определена на E_f, имеет на этом множестве ограниченную вариацию, и ее можно продолжить на $[0,1]$ до функции ограниченной вариации $\widetilde{f}_{m_2,\dots,m_n}$ такой, что

$$V_0^1\widetilde{f}_{m_2,\dots,m_n}=V_{E_f}f_{m_2,\dots,m_n}.$$

Доказательство. По теореме Фубини функция $f_{m_2,\dots,m_n}$ определена и интегрируема по Лебегу на множестве E_f. Поскольку $\mu(E_f)=1$, то, учитывая лемму 3, достаточно доказать, что функция $f_{m_2,\dots,m_n}$ имеет ограниченную вариацию на E_f.

Возьмем произвольное разбиение $T=\{t_s\}_{s=0}^N\in\tau(E_f)$. Оценим величину

$$\begin{aligned}V[T,f_{m_2,\dots,m_n}]&=\sum_{s=0}^{N-1}\bigl|a_{m_2,\dots,m_n}(f(t_{s+1},\,\cdot\,))-a_{m_2,\dots,m_n}(f(t_s,\,\cdot\,))\bigr|\\&=\sum_{s=0}^{N-1}\bigl|a_{m_2,\dots,m_n}(\Delta_{h_s}^{(1)}f(t_s,\,\cdot\,))\bigr|,\end{aligned}$$

где $h_s=t_{s+1}-t_s$, $s=0,\dots,N-1$.

Пусть $m_p = 2^{k_p} + i_p$, где $i_p = 1, \dots, 2^{k_p}$, $k_p = 0, 1, \dots$, $p = 2, \dots, n$. Тогда по лемме 4 для любого $s = 0, 1, \dots, N-1$ имеем

$$\left|a_{m_2,\dots,m_n}(\Delta^{(1)}_{h_s} f(t_s,\,\cdot))\right| \leqslant 2^{(k_2+\dots+k_n)/2} \cdot \int_{(i_2-1)/2^{k_2}}^{(2i_2-1)/2^{k_2+1}} dx_2 \cdots \times \int_{(i_n-1)/2^{k_n}}^{(2i_n-1)/2^{k_n+1}} \left|\Delta^{(1)}_{h_s}\Delta^{(2)}_{1/2^{k_2+1}} \cdots \Delta^{(n)}_{1/2^{k_n+1}} f(t_s, x_2, \dots, x_n)\right| dx_n.$$

Просуммировав по s, найдем, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{N-1}\left|a_{m_2,\dots,m_n}(\Delta^{(1)}_{h_s} f(t_s,\,\cdot))\right| \\
&\quad\leqslant 2^{(k_2+\dots+k_n)/2} \cdot \int_{(i_2-1)/2^{k_2}}^{(2i_2-1)/2^{k_2+1}} dx_2 \cdots \\
&\quad\times \int_{(i_n-1)/2^{k_n}}^{(2i_n-1)/2^{k_n+1}} \sum_{s=0}^{N-1}\left|\Delta^{(1)}_{h_s}\Delta^{(2)}_{1/2^{k_2+1}} \cdots \Delta^{(n)}_{1/2^{k_n+1}} f(t_s, x_2, \dots, x_n)\right| dx_n \\
&\quad\leqslant 2^{(k_2+\dots+k_n)/2} \cdot \int_{(i_2-1)/2^{k_2}}^{(2i_2-1)/2^{k_2+1}} dx_2 \cdots \int_{(i_n-1)/2^{k_n}}^{(2i_n-1)/2^{k_n+1}} V_{D_n} f\, dx_n \leqslant V_{D_n} f.
\end{aligned}$$

Таким образом, получили неравенство

$$V[T, f_{m_2,\dots,m_n}] \leqslant V_{D_n} f.$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму по $T \in \tau(E_f)$, видим, что $V_{E_f} f_{m_2,\dots,m_n} \leqslant V_{D_n} f$, т.е. функция $f_{m_2,\dots,m_n}$ имеет ограниченную вариацию на множестве E_f, что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Пусть функция f имеет ограниченную вариацию Витали на D_n и интегрируема по Лебегу на D_n, $n \geqslant 2$. Тогда для всех $\alpha, \beta \in E_f$ функция $F_{\alpha,\beta} = f(\beta,\,\cdot) - f(\alpha,\,\cdot)$ имеет ограниченную вариацию Витали на D_{n-1} и интегрируема по Лебегу на D_{n-1}, причем*

$$V_{D_{n-1}} F_{\alpha,\beta} \leqslant V_{[\alpha,\beta]\times D_{n-1}} f.$$

Доказательство. Интегрируемость функции $F_{\alpha,\beta}$ по Лебегу на D_{n-1} следует из определения множества E_f. Покажем, что $F_{\alpha,\beta}$ имеет ограниченную вариацию Витали на D_{n-1}.

Пусть T – произвольное множество из $\tau(D_{n-1})$,

$$T = \bigl\{(x_2^{(k_2)}, x_3^{(k_3)}, \dots, x_n^{(k_n)}) \bigm| k_i = 0, 1, \dots, K_i,\ i = 2, \dots, n\bigr\},$$

и $h_i^{(k_i)} = x_i^{(k_i+1)} - x_i^{(k_i)}$, $i = 2, \dots, n$. Так как $F_{\alpha,\beta}(x_2, \dots, x_n) = \Delta^{(1)}_{\beta-\alpha} f(\alpha, x_2, \dots, x_n)$, то

$$\begin{aligned} V[T, F_{\alpha,\beta}] &= \sum_{k_2=0}^{K_2-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{K_n-1} \bigl|\Delta^{(2)}_{h_2^{(k_2)}} \cdots \Delta^{(n)}_{h_n^{(k_n)}} F_{\alpha,\beta}(t_2^{(k_2)}, \dots, t_n^{(k_n)})\bigr| \\ &= \sum_{k_2=0}^{K_2-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{K_n-1} \bigl|\Delta^{(1)}_{\beta-\alpha} \Delta^{(2)}_{h_2^{(k_2)}} \cdots \Delta^{(n)}_{h_n^{(k_n)}} f(\alpha, t_2^{(k_2)}, \dots, t_n^{(k_n)})\bigr|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$V[T, F_{\alpha,\beta}] \leqslant V_{[\alpha,\beta]\times D_{n-1}} f.$$

Переходя в последнем неравенстве к супремуму по $T \in \tau(D_{n-1})$, получим, что

$$V_{D_{n-1}} F_{\alpha,\beta} \leqslant V_{[\alpha,\beta]\times D_{n-1}} f.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $D_{n-1} = [0,1]^{n-1}$, $D_n = [0,1]^n$, $n \geqslant 2$, *и*

$$0 = x^{(0)} < x^{(1)} < \dots < x^{(i)} < x^{(i+1)} < \dots < x^{(I)} = 1$$

– *произвольное разбиение отрезка* $[0,1]$. *Тогда*

$$\sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}]\times D_{n-1}} f = V_{D_n} f.$$

Доказательство. 1) Покажем, что

$$\sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}]\times D_{n-1}} f \leqslant V_{D_n} f.$$

Возьмем для каждого $i = 0, \dots, I-1$ разбиение $T^{(i)}$ из класса $\tau([x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1})$. Тогда множество T, являющееся объединением всех разбиений $T^{(i)}$, $i = 0, \dots, I-1$, будет элементом семейства $\tau(D_n)$, т.е. разбиением куба D_n, и будет выполняться равенство

$$\sum_{i=0}^{I-1} V[T^{(i)}, f] = V[T, f].$$

Отсюда, поскольку $V[T, f] \leqslant V_{D_n} f$, получаем, что

$$\sum_{i=0}^{I-1} V[T^{(i)}, f] \leqslant V_{D_n} f.$$

Переходя в этом неравенстве последовательно при каждом $i = 0, \dots, I-1$ к супремумам по $T^{(i)} \in \tau([x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1})$, получим, что

$$\sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}} f \leqslant V_{D_n} f.$$

2) Покажем, что верно и обратное неравенство. Возьмем произвольное разбиение

$$T = \left\{ (x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_n^{(k_n)}) \;\middle|\; k_j = 0, 1, \dots, K_j,\ j = 1, \dots, n \right\}$$

из класса $\tau(D_n)$. Если какие-то из точек $x^{(i)}$, $i = 0, \dots, I-1$, не попали в множество $x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(K_1)}$, то присоединим их и получим более мелкое разбиение T'. Поскольку при измельчении разбиения величина $V[T, f]$ не уменьшается, то

$$V[T, f] \leqslant V[T', f] = \sum_{i=0}^{I-1} V[T^{(i)}, f],$$

где множества $T^{(i)} = T' \cap ([x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1})$, $i = 0, \dots, I-1$, являются элементами семейств $\tau([x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1})$ соответственно. Так как $V[T^{(i)}, f] \leqslant V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}}$, то получаем оценку

$$V[T^{(i)}, f] \leqslant \sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}} f,$$

которая верна для произвольного разбиения $T \in \tau(D_n)$. Беря супремум по $T \in \tau(D_n)$, приходим к неравенству

$$\sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)}, x^{(i+1)}] \times D_{n-1}} f \geqslant V_{D_n} f,$$

что и требовалось доказать.

Основной результат. Обозначим символом $V_L(D_n)$ класс всех функций, имеющих ограниченную вариацию Витали на D_n и интегрируемых по Лебегу на D_n. Справедлива

Теорема. 1) *Для коэффициентов Фурье–Хаара $a_{m_1, \dots, m_n}(f)$ произвольной функции f из класса $V_L(D_n)$, $n \in \mathbb{N}$, верна оценка*

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1, \dots, m_n}(f)| \leqslant \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{3} \right)^n \cdot V_{D_n} f.$$

2) *Найдется функция $g_0 \in V_L(D_n)$ с отличной от нуля вариацией Витали, для которой в оценке из утверждения 1) достигается равенство.*

Доказательство. Доказательство утверждения 1) теоремы проведем методом математической индукции по числу переменных n.

Для случая $n=1$ теорема доказана в работе [2]. Пусть теперь $n\geqslant 2$. Предположим, что теорема верна для функций от $n-1$ переменных. Покажем, что тогда она верна и для функций от n переменных.

По лемме 5 функция $f_{m_2,\dots,m_n}(x_1)=a_{m_2,\dots,m_n}(f(x_1,\,\cdot))$ определена на множестве $E_f\subset[0,1]$ лебеговой меры 1, имеет на этом множестве ограниченную вариацию и ее можно продолжить на $[0,1]$ до функции ограниченной вариации $\widetilde{f}_{m_2,\dots,m_n}$ такой, что $V_0^1\widetilde{f}_{m_2,\dots,m_n}=V_{E_f}f_{m_2,\dots,m_n}$. Очевидно, что коэффициенты Фурье–Хаара функций $f_{m_2,\dots,m_n}$ и $\widetilde{f}_{m_2,\dots,m_n}$ также совпадают. Применяя к функции $\widetilde{f}_{m_2,\dots,m_n}$ теорему 1 из [2, с. 50], видим, что выполняется неравенство

$$\sum_{m_1=2}^{\infty}|a_{m_1}(\widetilde{f}_{m_2,\dots,m_n})|\leqslant c\cdot V_0^1\widetilde{f}_{m_2,\dots,m_n},$$

где $c=(2+\sqrt{2}\,)/3$. Из этого неравенства получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\sum_{m_1,\dots,m_n=2}^{\infty}|a_{m_1,\dots,m_n}(f)|&=\sum_{m_2,\dots,m_n=2}^{\infty}\sum_{m_1=2}^{\infty}|a_{m_1}(\widetilde{f}_{m_2,\dots,m_n})|\\&\leqslant\sum_{m_2,\dots,m_n=2}^{\infty}c\cdot V_0^1\widetilde{f}_{m_2,\dots,m_n}\\&=c\cdot\sum_{m_2,\dots,m_n=2}^{\infty}V_{E_f}f_{m_2,\dots,m_n}.\end{aligned}\tag{1}$$

Далее зафиксируем натуральные числа $M_2,\dots,M_n$ не меньшие 2 и рассмотрим сумму

$$\begin{aligned}&\sum_{m_2=2}^{M_2}\cdots\sum_{m_n=2}^{M_n}V_{E_f}f_{m_2,\dots,m_n}\\&\quad=\sum_{m_2=2}^{M_2}\cdots\sum_{m_n=2}^{M_n}\sup_{T(m_2,\dots,m_n)}\sum_{i(m_2,\dots,m_n)=0}^{I(m_2,\dots,m_n)}\bigl|f_{m_2,\dots,m_n}(x_{m_2,\dots,m_n}^{(i(m_2,\dots,m_n)+1)})\\&\qquad-f_{m_2,\dots,m_n}(x_{m_2,\dots,m_n}^{(i(m_2,\dots,m_n))})\bigr|,\end{aligned}\tag{2}$$

где $T(m_2,\dots,m_n)=\{x_{m_2,\dots,m_n}^{(0)}<x_{m_2,\dots,m_n}^{(1)}<\dots<x_{m_2,\dots,m_n}^{(I(m_2,\dots,m_n))}\}$ – произвольное разбиение множества E_f, соответствующее функции $f_{m_2,\dots,m_n}(x_1)$, $m_k=2,3,\dots,M_k$, $k=2,\dots,n$.

Пусть $T=\{x^{(0)}<x^{(1)}<\dots<x^{(I)}\}$ – объединение разбиений $T(m_2,\dots,m_n)$ по всем наборам $(m_2,\dots,m_n)$, $m_k=2,3,\dots,M_k$, $k=2,\dots,n$. Оно получается измельчением каждого из разбиений $T(m_2,\dots,m_n)$. Поскольку при измельчении разбиения суммы вида (2) не уменьшаются, то

$$\begin{aligned}&\sum_{m_2=2}^{M_2}\cdots\sum_{m_n=2}^{M_n}V_{E_f}f_{m_2,\dots,m_n}\\&\qquad\leqslant\sup_{T\in\tau[0,1]}\sum_{m_2=2}^{M_2}\cdots\sum_{m_n=2}^{M_n}\sum_{i=0}^{I-1}\bigl|f_{m_2,\dots,m_n}(x^{(i+1)})-f_{m_2,\dots,m_n}(x^{(i)})\bigr|.\end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования, получим

$$\begin{aligned}\sum_{m_2=2}^{M_2}\cdots\sum_{m_n=2}^{M_n} V_{E_f} f_{m_2,\dots,m_n} &\leqslant \sup_{T\in\tau[0,1]}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{m_2=2}^{M_2}\cdots\sum_{m_n=2}^{M_n}\bigl|f_{m_2,\dots,m_n}(x^{(i+1)})-f_{m_2,\dots,m_n}(x^{(i)})\bigr|\\ &= \sup_{T\in\tau[0,1]}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{m_2=2}^{M_2}\cdots\sum_{m_n=2}^{M_n}\bigl|a_{m_2,\dots,m_n}(f(x^{(i+1)},\,\cdot\,)-f(x^{(i)},\,\cdot\,))\bigr|,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\sum_{m_2=2}^{M_2}\cdots\sum_{m_n=2}^{M_n} V_{E_f} f_{m_2,\dots,m_n} \leqslant \sup_{T\in\tau[0,1]}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{m_2,\dots,m_n=2}^{\infty}\bigl|a_{m_2,\dots,m_n}(f(x^{(i+1)},\,\cdot\,)-f(x^{(i)},\,\cdot\,))\bigr|. \qquad (3)\end{aligned}$$

По лемме 6 функция $F_{x^{(i)},x^{(i+1)}}$ от $n-1$ переменных, определяемая равенством

$$F_{x^{(i)},x^{(i+1)}} = f(x^{(i+1)},\,\cdot\,)-f(x^{(i)},\,\cdot\,),$$

принадлежит классу $V_L(D_{n-1})$, причем

$$V_{D_{n-1}} F_{x^{(i)},x^{(i+1)}} \leqslant V_{[x^{(i)},x^{(i+1)}]\times D_{n-1}} f.$$

Применив к функции $F_{x^{(i)},x^{(i+1)}}$ предположение индукции, получаем неравенство

$$\begin{aligned}\sup_{T\in\tau[0,1]}\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{m_2,\dots,m_n=2}^{\infty}\bigl|a_{m_2,\dots,m_n}(f(x^{(i+1)},\,\cdot\,)-f(x^{(i)},\,\cdot\,))\bigr| &\leqslant \sup_{T\in\tau[0,1]}\sum_{i=0}^{I-1} c^{n-1} V_{D_{n-1}} F_{x^{(i)},x^{(i+1)}}\\ &\leqslant \sup_{T\in\tau[0,1]}\sum_{i=0}^{I-1} c^{n-1} V_{[x^{(i)},x^{(i+1)}]\times D_{n-1}} f.\end{aligned}$$

Учитывая, что по лемме 7 выполнено соотношение

$$\sum_{i=0}^{I-1} V_{[x^{(i)},x^{(i+1)}]\times D_{n-1}} f = V_{D_n} f,$$

приходим к неравенству

$$\sup_T \sum_{i=0}^{I-1}\sum_{m_2,\dots,m_n=2}^{\infty}\bigl|a_{m_2,\dots,m_n}(f(x^{(i+1)},\,\cdot\,)-f(x^{(i)},\,\cdot\,))\bigr| \leqslant c^{n-1} V_{D_n} f. \qquad (4)$$

Таким образом, из (3) и (4) имеем

$$\sum_{m_2=2}^{M_2} \cdots \sum_{m_n=2}^{M_n} V_{E_f} f_{m_2,\dots,m_n} \leqslant c^{n-1} V_{D_n} f.$$

Устремляя $M_2, \dots, M_n$ к бесконечности, приходим к оценке

$$\sum_{m_2=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} V_{E_f} f_{m_2,\dots,m_n} \leqslant c^{n-1} V_{D_n} f.$$

Комбинируя последнее неравенство с неравенством (1), получаем соотношение

$$\sum_{m_2,\dots,m_n=2}^{\infty} |a_{m_1,\dots,m_n}(f)| \leqslant c^n V_{D_n} f,$$

которое требовалось доказать в утверждении 1) теоремы.

Докажем утверждение 2). Для этого подберем функцию $g_0 \in V_L(D_n)$, имеющую конечную отличную от нуля вариацию Витали на D_n и интегрируемую по Лебегу на D_n, для которой выполняется равенство

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1,\dots,m_n}(g_0)| = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)^n \cdot V_{D_n} g_0.$$

Положим

$$g_0(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_i \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \text{ для всех } i = 1,\dots,n, \\ 0 & \text{в остальных точках } D_n. \end{cases}$$

Вычислим

$$\sum_{m_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} |a_{m_1,\dots,m_n}(g_0)|.$$

Для этого определим функцию $f_0(t)$, $t \in [0,1]$, равенством

$$f_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right], \\ 0 & \text{при других } t \in [0,1]. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $g_0(x_1,\dots,x_n) = f_0(x_1) f_0(x_2) \cdots f_0(x_n)$; следовательно,

$$\begin{aligned} |a_{m_1,\dots,m_n}(g_0)| &= \left| \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 g_0(x_1,\dots,x_n) \cdot \chi_{m_1}(x_1) \cdots \chi_{m_n}(x_n) dx_n \right| \\ &= \left| \int_0^1 f_0(x_1) \chi_{m_1}(x_1)\, dx_1 \cdots \int_0^1 f_0(x_n) \chi_{m_n}(x_n)\, dx_n \right| \\ &= |a_{m_1}(f_0)| \cdots |a_{m_n}(f_0)|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{m_1=2}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=2}^{\infty}|a_{m_1,\dots,m_n}(g_0)| = \sum_{m_1=2}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=2}^{\infty}|a_{m_1}(f_0)|\cdots|a_{m_n}(f_0)| = \left(\sum_{m=2}^{\infty}|a_m(f_0)|\right)^n. \tag{5}$$

В теореме 1 работы [2] доказано равенство

$$\sum_{m=2}^{\infty}|a_m(f_0)| = \frac{2+\sqrt{2}}{3}V_0^1 f_0,$$

из которого с учетом (5) получаем, что

$$\sum_{m_1=2}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=2}^{\infty}|a_{m_1,\dots,m_n}(g_0)| = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)^n\cdot(V_0^1 f_0)^n. \tag{6}$$

Теперь вычислим вариацию Витали функции g_0:

$$V_{D_n}g_0 = \sup_{T\in\tau(D_n)}\sum_{r_1=0}^{l_1-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{l_n-1}\left|\Delta_{h_1}^{(1)}\cdots\Delta_{h_n}^{(n)}g_0(x_1^{(r_1)},\dots,x_n^{(r_n)})\right| = \sup_{T\in\tau(D_n)}\sum_{r_1=0}^{l_1-1}\left|\Delta_{h_1}^{(1)}f_0(x_1^{(r_1)})\right|\cdots\sum_{r_n=0}^{l_n-1}\left|\Delta_{h_n}^{(n)}f_0(x_n^{(r_n)})\right| = (V_0^1 f_0)^n.$$

Наконец, из последнего равенства и формулы (6) получаем требуемое равенство

$$\sum_{m_1=2}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=2}^{\infty}|a_{m_1,\dots,m_n}(g_0)| = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)^n\cdot V_{D_n}g_0.$$

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность П. Л. Ульянову за ценные советы и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара // Матем. сб. 1964. Т. 63 (105). №1. С. 356–391.
[2] Галкина С. Ю. О коэффициентах Фурье–Хаара от функций с ограниченной вариацией // Матем. заметки. 1992. Т. 51. №1. С. 42–54.
[3] Vitali G. Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reale // Atti. Accad. Sci. Torino. 1908. V. 43. P. 75–92.
[4] Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
[5] Чистяков В. В. К теории многозначных отображений ограниченной вариации одной вещественной переменной // Матем. сб. 1998. Т. 189. №5. С. 153–176.

Нижегородский государственный педагогический университет им. А. М. Горького
E-mail: galkin@mm.unn.ac.ru, galkin@tesis.nnov.ru

Поступило
27.11.2000