ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЛИЦЕЙ НИУ ВШЭ

Вторая часть комплексного теста
Устное собеседование по **УГЛУБЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ 2022**
для направления «Математика»

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Гарри и Рон сыграли 100 партий в волшебные шахматы. За победу давалось 11 очков, на ничью — каждому по n очков, где n — натуральное число, а за поражение — 0 очков. В итоге каждый набрал по 800 очков. При каких значениях n это возможно?

2. В выпуклом четырехугольнике ABCD стороны DA и BC продлили на свои длины за точки A и C. Получили точки P и Q. Оказалось, что диагональ BD пересекает отрезок PQ в его середине K. Пусть M — середина BD. Докажите, что AKCM — параллелограмм.

3. Лиза от скуки решила выписать по возрастанию все семизначные палиндромы, то есть числа, которые читаются одинаково слева направо и справа налево. Какое число Лиза запишет 2019-м?

4. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 99 и состоит только из четных цифр.

5. Точка M — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка P, а на стороне AC — точка Q таким образом, что угол PMB равен углу QMC. Докажите, что BQ = CP.

6. В клетки таблицы 3x3 расставили 9 различных натуральных чисел так, что все шесть произведений по строкам и столбцам равны. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?

7. К пятизначному числу A сначала приписали цифру 1 слева, получив шестизначное число P, а потом приписали цифру 1 справа, получив шестизначное число Q. Оказалось, что Q = 3P. Чему может быть равно число A?

8. Квадрат разрезали 18 прямыми, из которых 9 параллельны одной стороне квадрата, а 9 — другой, на 100 прямоугольников. Оказалось, что ровно девять из них — квадраты. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных между собой.

9. В таблице 3x3 расставлены числа так, что произведение чисел в каждой строке и каждом столбце равно 1, а произведение чисел в любом квадрате 2x2 равно 2. Какое число стоит в центре?

10. В трапеции ABCD точки M и N являются серединами оснований AB и CD соответственно. Точка P принадлежит отрезку MN. Докажите, что площади треугольников ADP и BCP равны.

11. Гирлянда состоит из 250 лампочек, замкнутых в круг. Изначально все лампочки включены. Разрешается либо переключить (включенную выключить, выключенную включить) любые 4 последовательные лампочки, либо взять 5 последовательных лампочек и переключить все, кроме средней. Можно ли таким образом выключить все лампочки?

12. На окружности расположены черные и белые точки, всего 40 точек. Известно, что ровно у 22 точек есть по крайней мере одна соседняя черная точка, а ровно у 30 точек есть по крайней мере одна соседняя белая точка. Сколько всего белых точек расположено на окружности?

13. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма ABCD как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC. Найдите углы параллелограмма ABCD.

14. На девяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, ..., 9. Данил составил из этих карточек несколько чисел так, что никакое число не делится на другое. Какое наибольшее количество чисел мог составить Данил? Карточки переворачивать нельзя.

15. Сколькими способами к числу 2019 можно приписать по одной цифре слева и справа так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 45?

16. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник m x n клеток (его стороны на линиях сетки). Известно, что числа m и n взаимно просты, m меньше n, и что диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все такие прямоугольники.

17. Сколько двадцатизначных чисел можно составить так, чтобы любые две соседние цифры отличались на единицу, если в их десятичной записи можно использовать только цифры 2, 3 и 4?

18. Какое наибольшее количество слонов можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый слон бил не более одного слона? Напомним, что слоны бьют по диагонали на любое число клеток.

19. Гермиона наложила заклинание незримого расширения на свою сумочку и положила туда 111 шариков: красные, синие, зелёные и белые. Известно, что если, не заглядывая в сумочку, вытащить 100 шариков, то среди них обязательно найдутся четыре шарика различных цветов. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не заглядывая в сумочку, чтобы среди них наверняка нашлись три шарика различных цветов?

20. В турнире по квиддичу участвовало 8 команд и в итоге они набрали разное количество очков (каждая играла с каждой один раз, победа – 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0). Команда, занявшая второе место, набрала столько же очков, сколько четыре последних команды набрали вместе. Как сыграли между собой команды, занявшие третье и седьмое место?

21. Фродо написал на доске числа: 4, 14, 24, ... , 94, 104. Затем он попросил Сэма стереть сначала одно число из записанных, потом стереть еще два, потом – еще три, и, наконец, стереть еще четыре числа так, чтобы после каждого стирания сумма оставшихся на доске чисел делилась на 11? Сможет ли Сэм выполнить задание Фродо?

22. Шахматный король обошёл всю доску 8×8, побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Четное или нечетное число диагональных ходов совершил шахматный король?

23. Рон заполняет пустую таблицу размером 11x11. В начале в левый верхний угол таблицы он ставит единицу. Далее он действует по следующему правилу. Если в клетке уже записано число А, то в любую соседнюю по стороне пустую клетку он ставит либо 4А, либо А – 12, либо А + 3. Рон уверен, что ему удастся полностью заполнить таблицу таким образом и при этом сумма всех чисел в таблице будет равна нулю. Прав ли Рон?

24. Есть 100 красных, 100 жёлтых и 100 зелёных палочек. Известно, что из любых трёх палочек трёх разных цветов можно составить треугольник. Докажите, что найдётся такой цвет, что из любых трёх палочек этого цвета можно составить треугольник.

25. В чемпионате Хоббитона по игре в «крестики-нолики», проведённом по системе «проиграл – выбыл», участвовали 18 хоббитов. Каждый день хоббиты играли одну партию, участников которой выбирали жребием из ещё не выбывших хоббитов. Гендальф встретил шестерых участников этой игры. Каждый из них сказал Гендальфу, что сыграл ровно четыре партии. Не ошибается ли кто-то из них?

26. Можно ли расставить в вершинах куба натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел, связанных ребром, одно из них делилось на другое, а во всех других парах такого не было?

27. Дед Мороз раздал детям 47 шоколадок так, что каждая девочка получила на одну шоколадку больше, чем каждый мальчик. Затем дед Мороз раздал тем же детям 74 мармеладки так, что каждый мальчик получил на одну мармеладку больше, чем каждая девочка. Сколько всего было детей?

28. Шахматная доска 100×100 разбита на 10000 единичных квадратиков. Один из них вырезали, так что образовалась дырка. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой длины 2 так, чтобы их гипотенузы шли по сторонам квадратиков, а катеты – по диагоналям, и чтобы треугольники не налегали друг на друга и не свисали с доски?

29. По окружности выписано 10 чисел, их сумма равна 100. Сумма любой тройки чисел, стоящих подряд, не меньше 29. Укажите такое наименьшее число A, что в любом таком наборе чисел каждое из чисел не превышает A.

30. Докажите, что любое действительное положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичная запись каждого из которых состоит из цифр 0 и 7.