

Правительство Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
(НИУ ВШЭ)

УДК 512.66

Рег. № НИОКТР 121051100267-8

Рег. № ИКРБС

УТВЕРЖДАЮ
Проректор НИУ ВШЭ,
канд. экон. наук
_____ М.М. Юдкевич
«___» _____ 2021 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

КАТЕГОРНАЯ, КЛАССИЧЕСКАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ
(заключительный)

Руководители НИР:

Зав. лаб., д-р физ.-мат. наук, проф.

_____ Д.Б. Каледин

Науч. рук., д-р физ.-мат. наук

_____ Ф.А. Богомолов

Москва 2021

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководители НИР:

научный руководитель, д-р физ.-мат. наук	_____	Ф.А. Богомолов (раздел 2)
	подпись, дата	
заведующий лабораторией, д-р физ.-мат. наук, PhD	_____	Д.Б. Каледин (введение, раздел 2)
	подпись, дата	

Исполнители:

заместитель заведующего лабораторией, PhD	_____	М.С. Вербицкий (раздел 4)
	подпись, дата	
научный сотрудник, д-р физ.-мат. наук, PhD	_____	Е.А. Америк (раздел 4)
	подпись, дата	
научный сотрудник, д-р физ.-мат. наук, PhD	_____	В.А. Кириченко (раздел 1)
	подпись, дата	
научный сотрудник, д-р физ.-мат. наук	_____	А.Г. Кузнецов (раздел 1)
	подпись, дата	
научный сотрудник д-р физ.-мат. наук, PhD	_____	М.З. Ровинский (раздел 2)
	подпись, дата	
научный сотрудник, д-р физ.-мат. наук	_____	Ю.Г. Прохоров (раздел 3)
	подпись, дата	
научный сотрудник, д-р физ.-мат. наук, PhD	_____	В.А. Тиморин (раздел 1)
	подпись, дата	
научный сотрудник, д-р физ.-мат. наук	_____	К.А. Шрамов (раздел 3)
	подпись, дата	
научный сотрудник, канд. физ.-мат. наук	_____	А.А. Авилов (раздел 3)
	подпись, дата	
научный сотрудник, канд. физ.-мат. наук	_____	А.Д. Елагин (раздел 1)
	подпись, дата	
научный сотрудник, канд. физ.-мат. наук	_____	В.С. Жгун (раздел 4)
	подпись, дата	
научный сотрудник, канд. физ.-мат. наук	_____	И.Ю. Ждановский (раздел 1)
	подпись, дата	
научный сотрудник, канд. физ.-мат. наук	_____	Н.М. Курносов (раздел 4)
	подпись, дата	

мл. научный сотрудник, канд. физ.-мат. наук,	_____ подпись, дата	К.В. Логинов (раздел 3,7)
научный сотрудник, канд. физ.- мат. наук	_____ подпись, дата	С.М. Львовский (раздел 3)
научный сотрудник, канд. физ.- мат. наук	_____ подпись, дата	Н.С. Маркарян (раздел 2)
научный сотрудник, канд. физ.- мат. наук	_____ подпись, дата	А.А. Рослый (раздел 1)
научный сотрудник, канд. физ.- мат. наук, PhD	_____ подпись, дата	Е.Ю. Смирнов (раздел 4)
научный сотрудник, канд. физ.- мат. наук	_____ подпись, дата	А.С. Трепалин (раздел 3)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	А.Э. Абашева (раздел 4)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	С.А. Абрамян (раздел 2)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	А.В. Викулова (раздел 2)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	В.С. Гавран (раздел 1)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	Ю.А. Горгинян (раздел 4)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	Л.А. Гусева (раздел 1)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	Р.Н. Деев (раздел 4)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	Д. А. Захаров (раздел 1)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	Н.Ю. Клемятин (раздел 4)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	Г.М. Кондырев (раздел 2)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	А.А. Коновалов (раздел 2)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	Д.О. Коршунов (раздел 4)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	А.А. Новиков (раздел 1)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	П.С. Осипов (раздел 4)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	Г.С. Папаянов (раздел 2)
стажер-исследователь	_____ подпись, дата	А.О. Савельева (раздел 4)

стажер-исследователь

подпись, дата

А.О. Солдатенков (раздел 4)

стажер-исследователь

подпись, дата

Л.А. Суханов (раздел 2)

стажер-исследователь

подпись, дата

Д.Н. Терешкин (раздел 2)

стажер-исследователь

подпись, дата

А.А. Тутубалина (раздел 4)

нормоконтроль

подпись, дата

С.В. Балаева

РЕФЕРАТ

Отчет 90 стр., 1 книга, 0 рис., 0 табл., 120 источник, 1 прил.

ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ, КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ КОГОМОЛОГИИ, ЦИКЛИЧЕСКАЯ КАТЕГОРИЯ, БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, МНОГООБРАЗИЯ ФАНО, ПРОСТРАНСТВО МОДУЛЕЙ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ, ГОЛОМОРФНО СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Объектами исследования являются

- геометрическая теория представлений,
- арифметическая алгебраическая геометрия,
- бесконечномерные алгебры Ли,
- гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии,
- производные категории,
- классическая геометрия,
- гиперкэлеровы многообразия и специальные многообразия.

Цель проекта: исследования в области алгебраической геометрии и пограничных с ней областях – теория чисел, дифференциальная и комплексная геометрия, геометрический анализ.

Результаты носят теоретический характер и являются существенно новыми. Возможны приложения к теоретической физике, дифференциальной геометрии, теории чисел и задачам классификации комплексных многообразий.

ВВЕДЕНИЕ	8
1 Производные категории	11
1.1 Одновременные категорные разрешения особенностей	11
1.2 Толстые подкатегории в производной категории свободной алгебры и универсальные локализации	12
1.3 Пятимерное многообразие Кюхле	14
1.4 Исключительные наборы на однородных многообразиях	15
1.5 Применение категорных и алгебро-геометрических конструкций к различным вопросам алгебры и квантовой теории информации	17
1.6 Многогранник Ньютона–Окунькова $\mathbb{P}^1$ -расслоения	19
1.7 Полиномиально подобные отображения	21
1.8 Оценка числа антицепей	22
1.9 Множества в почти общем положении	23
1.10 Производные категории и суперсвязности	24
2 Гомологические и мотивные методы	
в некоммутативной геометрии	26
2.1 Спектры категорий представлений симметрических групп	26
2.2 Стабильные когомологии конечных групп	27
2.3 Группа Торелли и дзета-значения	29
2.4 n -оидальные ∞ -категории	30
2.5 Специальные унитарные кобордизмы	31
2.6 Двойственные комплексы	32
2.7 Аддитивные инварианты и K -теория	33
2.8 Квантования и инварианты Розанского–Виттена	36
2.9 Деформации абелевых категорий	38
3 Классическая геометрия	42
3.1 Рациональность факторов поверхностей Севери–Брауэра по конечным группам автоморфизмов	42
3.2 Непроективные малые разрешения	43
3.3 Конечные группы бирациональных автоморфизмов	46
3.4 Исследование групп автоморфизмов и бирациональной жёсткости многообразий Фано и приложения к исследованиям подгрупп группы Кремоны	49
3.5 Производная длина конечных подгрупп в группе Кремоны	51
3.6 Многообразия Энриквеса	53
3.7 Автоморфизмы многообразий Севери–Брауэра	54
3.8 Рациональность многообразий Фано	54
3.9 Цилиндры в многообразиях Фано	55

4 Специальные многообразия	58
4.1 Гиперкэлеровы многообразия и слоения	58
4.2 Исследование геометрии многообразий Гуана	61
4.3 Самоподобные гессиановы многообразия	63
4.4 Самоподобные гессиановы и конформно кэлеровы многообразия	63
4.5 Другие гессиановы многообразия	64
4.6 Сходимость Громова-Хаусдорфа многообразий Калаби-Яу	65
4.7 Реализация многогранников	66
4.8 Кривые в слоях твисторной проекции гиперкомплексного нильмногооб-	
разия	68
4.9 Многочлены Шура, двойственные многочлены Гротендика и массивы	69
4.10 Слайд-комплексы и гс-графы	71
4.11 В-полуинвариантные действия аддитивных групп	72
4.12 Теоремы типа Кэли-Бахараша в форме Гриффитса-Харриса и их обобщения	73
4.13 Лагранжевы расслоения и многообразия Бовиля-Мукаи	74
4.14 Лемма Мозера и теорема Вайнштейна	76
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	78

ВВЕДЕНИЕ

За отчетный период (2021) Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений организовала и/или приняла участие в организации 3 международных конференций:

- Международная конференция «Бирациональная геометрия» («Workshop on birational geometry»), 22.04.2021, организаторы: Юрий Прохоров и Константин Шрамов, формат проведения – онлайн;
- Международная конференция «Бирациональная геометрия» («Workshop on birational geometry»), 10.11.2021, организаторы Юрий Прохоров и Константин Шрамов, формат проведения – онлайн;
- Международная конференция «Алгебра и геометрия», 30.07.2021-31.07.2021, организаторы Никон Курносов и Константин Шрамов, формат проведения – офлайн, с трансляцией в сети интернет.

В 2021 году удалось провести традиционную школу «Алгебра и геометрия» в офлайн-формате. Школа проводилась в период с 24.07.2021 по 29.07.2021 уже в десятый раз. Как и ранее, школа была проведена на базе Ярославского государственного педагогического университета им.К.Д.Ушинского, в ней приняли участие около 100 слушателей, в т.ч. большая группа студентов ЯГПУ. В сети интернет была организована трансляция лекций школы. По окончании школы, записи лекций были выложены в свободный доступ. Количество просмотров неуклонно увеличивается. В связи с пандемией COVID-19 в 2021 году были отменены визиты ученых – коллег лаборатории из мировых научных и учебных центров, которые принимали участие в регулярном научно-исследовательском семинаре лаборатории в режиме онлайн.

В течение года продолжал работу научно-исследовательский семинар лаборатории, который проходил в зависимости от эпидемиологической ситуации либо в смешанном формате, либо полностью в режиме онлайн. Руководитель семинара – Никон Курносов. Также продолжал работу студенческий семинар лаборатории «Геометрическая структуры на многообразиях». Вся информация о семинарах публикуется на странице лаборатории на портале НИУ ВШЭ (ag.hse.ru), анонсы также были доступны участникам по рассылке факультета математики и лаборатории.

По результатам исследований в 2021 году сотрудниками лаборатории было опубликовано 24 работ в журналах, индексируемых WoS, из них в журналах квартиля Q1 / Q2 – 16. Также были опубликованы 6 работ в международных рецензируемых журналах, индексируемых в системе Scopus.

Сотрудники лаборатории принимали участие в российских и международных конференциях, семинарах, воркшопах, где выступили более чем с 30 докладами, в которых представили результаты своих исследований в лаборатории. Большинство мероприятий проходило в онлайн-формате, но сотрудники лабораторий также приняли участия в ряде очных мероприятий, в т.ч. Primorye Mathematical Fair (Владивосток),

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов (Самара), Топология торических действий и смежные вопросы (Сочи).

Константин Шрамов успешно защитил докторскую диссертацию на тему "Конечные группы автоморфизмов алгебраических и комплексных многообразий".

На средства, выделенные НИУ ВШЭ в качестве дополнительно финансирования на конкурсной основе были приняты на должности стажёров-исследователей Анна Тутубалина (студентка магистратуры) и Анастасия Викулова (аспирантка). По результатам работы, было принято решение о продолжении их работы в Лаборатории в 2022 году.

После подведения итогов конкурса Российского научного фонда на создание отдельных научных групп, на базе Лаборатории продолжил работу научный коллектив проекта «Аutomорфизмы алгебраических многообразий», под руководством Юрия Прохорова. Дмитрий Каледин начал работу над новым проектом «Алгебраическая К-теория, мотивные структуры и циклические гомологии», проект реализуется на базе факультета математики, к работе над проектом привлечен в т.ч. стажёр Лаборатории Андрей Коновалов.

Заявка на проведение сателлитной конференции «Интегрируемые системы и геометрия пространств модулей», где лаборатория является одним из соорганизаторов секции по геометрии пространства модулей, была поддержана оргкомитетом и получила со-финансирование.

Научные сотрудники лаборатории были отмечены рядом наград:

- Сергей Львовский, стал победителем в научно-популярной номинации по направлению Математика конкурса русскоязычных научных и научно-популярных работ НИУ ВШЭ с книгой «Что не так? Математические парадоксы и софизмы»;
- Александр Кузнецов был объявлен пленарным докладчиком Международного конгресса математиков – 2022;
- Юрий Прохоров был объявлен докладчиком секции «Алгебраическая и комплексная геометрия»;
- Юрий Прохоров стал лауреатом премии Маркова в 2021 году за выдающиеся результаты в области математики;
- На конкурс «Молодая математика России» была принята заявка Семёна Абрамяна результаты будут известны в самом конце декабря. Среди победителей 2020 года был Никита Клемятин и Константин Логинов;
- На конкурс Мёбиуса была принята заявка Семёна Абрамяна, результаты конкурса также станут известны в конце декабря. Среди победителей 2020 года был Андрей Коновалов;

- получателем стипендии им.В.А.Арнольда стал стажёр-исследователь Дмитрий Захаров;
- получателем специальной стипендии для магистрантов НИУ ВШЭ стала стажёр Анна Тутубалина.

Сотрудники лаборатории продолжали вести активную педагогическую работу, ими были прочитаны курсы на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом Московском Университете, НОЦ МИАН, Сколтех, на школах для студентов, аспирантов и молодых ученых, проводимых как лабораторией, так и крупными международными научными и учебными центрами. Часть курсов была прочитана впервые. В связи с пандемией коронавируса COVID-19, курсы проводились как в смешанном режиме, так и полностью онлайн-формате с применением новых образовательных онлайн-технологий.

В 2021 году лучшими преподавателями были признаны Валентина Кириченко и Владлен Тиморин. Также Владлен Тиморин был выбран лучшим научным руководителем.

В рамках программы факультета математики по привлечению лучших аспирантов к преподаванию, на факультете успешно продолжил работу Павел Осипов (семинары по курсу Математика, ОП «Философия»), также к преподаванию на факультете был привлечен Семен Абрамян (курс Введение в топологию, НИС «Введение в теорию кобордизмов»).

Сотрудниками лаборатории были получены значительные результаты по основным темам, заявленным на 2021 год:

- Производные категории;
- Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии;
- Классическая геометрия;
- Специальные многообразия.

Результаты работ по этим темам составляют содержание настоящего отчета.

1 Производные категории

1.1 Одновременные категорные разрешения особенностей

Одним из классических и очень важных результатов алгебраической геометрии является теорема о существовании одновременного разрешения рациональных двойных точек поверхности (возможность такого разрешения в простейшем примере обнаружил М. Атья, а в полной общности теорема была доказана в работах Г.Н. Тьюриной и Э. Брискорна). Хорошо известно, что эта теорема не обобщается на старшие размерности, во многом из-за отсутствия крепантных разрешений.

С другой стороны, известно [23], что на категорном уровне крепантные разрешения существуют гораздо чаще, чем на геометрическом. В частности, они существуют для обыкновенных двойных точек произвольной размерности. В работе [25] сотрудник лаборатории А. Кузнецов показал как, используя технику категорных разрешений, можно построить одновременные категорные разрешения обыкновенных двойных точек четной размерности.

Чтобы сформулировать точное утверждение, введем необходимые обозначения. Пусть $f: \mathcal{X} \rightarrow B$ — плоский проективный морфизм четной размерности $2n$ на гладкую кривую B с отмеченной точкой $o \in B$. Предположим, что центральный слой $X = \mathcal{X}_o$ и тотальное пространство морфизма f имеют одну обыкновенную двойную точку x_0 , а все остальные слои гладки. Пусть $\pi: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ — раздутие в точке x_0 с исключительным дивизором E , пусть $\pi_o: \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие в точке x_0 с исключительным дивизором E_o , и пусть $\mathcal{S}$ — спинорное расслоение на гладкой четномерной квадрике E , а $\mathcal{S}_o$ — его ограничение на гладкую нечетномерную квадрику E_o , являющуюся гиперплоским сечением E .

Теорема 1.1. Рассмотрим в $D^b(\tilde{\mathcal{X}})$ подкатегорию

$$\mathcal{D} := \{F \in D^b(\tilde{\mathcal{X}}) \mid F|_E \in \langle \mathcal{S}, \mathcal{O} \rangle\}.$$

Это допустимая B -линейная подкатегория, достраивающаяся до полуортогонального разложения

$$D^b(\tilde{\mathcal{X}}) = \langle \mathcal{O}_E(1-2n), \mathcal{O}_E(2-2n), \dots, \mathcal{O}_E(-1), \mathcal{S}_E, \mathcal{D} \rangle.$$

Ее слои над точками $b \neq o$ в B равны $\mathcal{D}_b = D^b(\mathcal{X}_b)$, производным категориям слоев морфизма f , а центральный слой $\mathcal{D}_o$ имеет вид

$$\mathcal{D}_o \simeq \{F \in D^b(\tilde{X}) \mid F|_{E_o} \in \langle \mathcal{S}_o, \mathcal{O} \rangle\},$$

и достраивается до полуортогонального разложения

$$D^b(\tilde{X}) = \langle \mathcal{O}_{E_o}(2-2n), \mathcal{O}_{E_o}(3-2n), \dots, \mathcal{O}_{E_o}(-1), \mathcal{D}_o \rangle.$$

В частности, все слои категории $\mathcal{D}$ являются гладкими и собственными категориями над основным полем, а сама категория $\mathcal{D}$ является гладкой и собственной над B .

Последнее утверждение теоремы [1.1] вытекает из следующего общего утверждения, также доказанного в [25].

Теорема 1.2. Пусть $f: Y \rightarrow B$ плоский собственный морфизм квазипроективных многообразий, и пусть

$$D^b(Y) = \langle \mathcal{D}, {}^\perp \mathcal{D} \rangle$$

полуортогональное B -линейное разложение с допустимыми компонентами, функторы проекции которых имеют конечную когомологическую амплитуду. Тогда множества точек схемы B , слои над которыми гладкие (соответственно гладкие и собственные) является открытым подсхемой в B , а категория $\mathcal{D}$ является гладкой (соответственно гладкой и собственной) над этой подсхемой.

В качестве применения теоремы [1.1] получено следующее утверждение. Пусть $X \subset \mathbb{P}^5$ — кубическая гиперповерхность с одной обыкновенной двойной точкой $x_0 \in X$. Линейная проекция из точки x_0 отождествляет ее раздутие $\tilde{X}$ в точке x_0 с раздутием проективного пространства $\mathbb{P}^4$ в КЗ поверхности S , являющейся полным пересечением квадрики и кубики. В работе [24] было показано, что производная категория поверхности S является категорным разрешением нетривиальной компоненты (ортогонального дополнения к исключительному набору $\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2)$) категории $D^b(X)$. Применяя же теорему [1.1], удалось доказать, что существует гладкое и собственное над базой семейство триангулированных категорий, такое что общий слой эквивалентен нетривиальной компоненте производной категории гладкой четырехмерной кубики, а специальный слой эквивалентен производной категории $D^b(S)$.

1.2 Толстые подкатегории в производной категории свободной алгебры и универсальные локализации

Сотрудник Лаборатории А. Елагин совместно с В. Лунцем исследовал в [12] ограниченную производную категорию T_N конечно порождённых модулей над алгеброй $k[x_1, \dots, x_N]/(x_1, \dots, x_N)^2$ и её толстые подкатегории. Например, было показано, что таких подкатегорий очень много и они плохо контролируются.

Чтобы работать с категорией T_N , удобно использовать её эквивалентность двойственной категории к $\mathbf{Perf}(A_N)$, где A_N — свободная градуированная некоммутативная алгебра от N переменных $x_1, \dots, x_N$ степени 1, которая рассматривается как dg алгебра с нулевым дифференциалом. Эта алгебра имеет (градуированную) глобальную размерность 1, что позволяет явно описать любой объект в категории $\mathbf{Perf}(A_N)$. А именно, он изоморфен dg A_N -модулю

$$M_g := \mathrm{Cone}(F_1 \xrightarrow{g} F_0),$$

где g — некоторый мономорфизм конечно порождённых свободных градуированных A_N -модулей. Таким образом, любая толстая подкатегория в $\mathbf{Perf}(A_N)$ имеет вид $\langle M_g \rangle_{g \in \mathcal{S}}$ (или даже $\{M_g\}_{g \in \mathcal{S}}$) для некоторого семейства $\mathcal{S}$ гомоморфизмов конечно порождённых свободных градуированных A_N -модулей.

Далее, для любого гомоморфизма алгебр (или градуированных алгебр) $\phi : A \rightarrow B$ можно рассмотреть ядро соответствующего функтора расширения скаляров:

$$T_\phi := \ker(\phi_* : \text{Perf}(A) \rightarrow \text{Perf}(B)),$$

это толстая подкатегория в $\text{Perf}(A)$. В работе [12] нами было показано, что для градуированной свободной алгебры A_N любая толстая подкатегория в $\text{Perf}(A_N)$ имеет такой вид для некоторого гомоморфизма $\phi : A_N \rightarrow B$. Более того, в качестве ϕ можно взять некоторый гомоморфизм универсальной локализации, определение которой будет напомним ниже.

Для любого кольца A и семейства $\mathcal{S}$ гомоморфизмов конечно порождённых свободных A -модулей можно определить универсальную локализацию A по $\mathcal{S}$ следующим образом (см. [11]). Скажем, что гомоморфизм колец $\phi : A \rightarrow B$ обращает $\mathcal{S}$, если для любого $g : F_1 \rightarrow F_0$ в $\mathcal{S}$ расширение скаляров

$$g \otimes_A B : F_1 \otimes_A B \rightarrow F_0 \otimes_A B$$

есть изоморфизм. Универсальная локализация $A \rightarrow A[\mathcal{S}^{-1}]$ есть по определению начальный объект в категории гомоморфизмов колец из A , обращающих $\mathcal{S}$. Несложно проверить, что она существует и единственна. Отметим, что при этом важно рассматривать все кольца, а не только коммутативные. В отличие от локализации в коммутативной ситуации, универсальная локализация устроена сложнее — например, могут быть обращены неквадратные матрицы, локализация может быть нулевым кольцом, в локализации кольца без делителей нуля могут появиться делители нуля.

Сотрудниками Лаборатории было доказано следующее утверждение, см. [12]:

Теорема 1.3. Пусть $T = \langle M_g \rangle_{g \in \mathcal{S}}$ — толстая подкатегория в $\text{Perf}(A_N)$, где $\mathcal{S}$ — семейство гомоморфизмов конечно порождённых свободных градуированных A_N -модулей. Пусть $\lambda_{\mathcal{S}} : A_N \rightarrow A_N[\mathcal{S}^{-1}]$ — соответствующая универсальная локализация. Тогда T совпадает с $T_{\lambda_{\mathcal{S}}}$, то есть, с ядром функтора расширения скаляров $\lambda_{\mathcal{S}*} : \text{Perf}(A_N) \rightarrow \text{Perf}(A_N[\mathcal{S}^{-1}])$.

В действительности, можно сказать и больше, справедливо следующее:

Теорема 1.4. В условиях Теоремы [1.3] имеет место коммутативная диаграмма категорий и функторов:

$$\begin{array}{ccc} \text{Perf}A_N & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{S}*}} & \text{Perf}A_N[\mathcal{S}^{-1}], \\ & \searrow q & \nearrow t \\ & (\text{Perf}A_N)/T & \end{array}$$

где q — фактор Вердье, а t — идемпотентное замыкание.

Несложно видеть, что из Теоремы [1.4] следует Теорема [1.3] ядро q есть ровно T , а ядро t нулевое. Следовательно, T совпадает с ядром $\lambda_{\mathcal{S}*}$. Кроме того, интересно отметить

Следствие 1.5. В условиях Теоремы 1.3 градуированное кольцо эндоморфизмов образа A_N в фактор категории $(\text{Perf} A_N)/T$ изоморфно локализации $A_N[\mathcal{S}^{-1}]$.

Полученные результаты аналогичны результатам Неемана и Раницкого, см. [29]. В их работе рассматривается произвольное (неградуированное) кольцо A и толстая подкатегория T в $\text{Perf}(A)$, порождённая комплексами вида $M_g = (F_1 \xrightarrow{g} F_0)$, где g пробегает семейство $\mathcal{S}$ морфизмов конечно порождённых свободных A -модулей. Там также показано существование коммутативной диаграммы из Теоремы 1.4 но при дополнительном условии $\text{Tor}_i^A(A[\mathcal{S}^{-1}], A[\mathcal{S}^{-1}]) = 0$ при $i > 0$. Как проверять это условие для локализаций свободной алгебры, неясно.

1.3 Пятимерное многообразие Кюхле

Стажером Лаборатории Л. Гусевой были изучены геометрические свойства 5-мерного многообразия Кюхле X_5 типа (с5). Многообразие Кюхле X_5 задается нулями общего сечения расслоения $\mathcal{U}^\perp(1) \oplus \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee$ на $\text{Gr}(3, V)$, где $\text{Gr}(3, V)$ — грассманиан, параметризующий 3-мерные подпространства в 7-мерном векторном пространстве V , $\mathcal{U} \subset V \otimes \mathcal{O}$ — тавтологическое расслоение, и $\mathcal{U}^\perp = (V/\mathcal{U})^\vee$ — двойственное фактор-расслоение на грассманиане $\text{Gr}(3, V)$. Таким образом, многообразие Кюхле X_5 задается нулями невырожденной 2-формы $\mu \in H^0(\text{Gr}(3, V), \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee) = \Lambda^2 V^\vee$ и нулями общей 4-формы $\lambda \in H^0(\text{Gr}(3, V), \mathcal{U}^\perp(1)) = \Lambda^4 V^\vee$, более того, μ и λ находятся в общем положении относительно друг друга.

Было доказано, что при условии общности положения μ и λ , в пучке 4-форм $\{\lambda, \mu \wedge \mu\}$ есть ровно четыре необщих 4-формы, то есть у прямой в $\Lambda^4 V^\vee$, заданной пучком $\{\lambda, \mu \wedge \mu\}$ кратность пересечения в $\mu \wedge \mu$ с гиперповерхностью необщих форм равна четырем. Под необщей 4-формой подразумевается форма, не лежащая на всюду плотной орбите действия $\text{GL}(V)$ на $\Lambda^4 V^\vee$. Были изучены некоторые свойства необщих 4-форм из пучка $\{\lambda, \mu \wedge \mu\}$.

Обозначим за λ' необщую 4-форму из пучка $\{\lambda, \mu \wedge \mu\}$, не равную $\mu \wedge \mu$. Было показано, что с формой λ' связаны каноническое 4-мерное подпространство $U_{\lambda'}$ в V и выделенная двумерная квадрика $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}(U_{\lambda'})$ в проективизации этого пространства. Кроме того, был изучен квадратичный конус $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(V^\vee)$, канонически связанный с необщей 4-формой λ' . Было показано, что в двумерной вершине $\mathcal{Q}$ есть канонически связанная с λ' коника C , имеющая следующее геометрическое описание: коника C параметризует такие векторы в $v \in V^\vee$, что ранг 2-вектора, полученного подстановкой v в двойственный три-вектор $(\lambda')^\vee$, равен 2.

Кроме того, были изучены нули $\widetilde{\text{CG}}$ формы λ' на $\text{Gr}(3, V)$, то есть нули необщего сечения $H^0(\text{Gr}(3, V), \Lambda^2 \mathcal{U}^\perp(1))$. Было показано, что на $\widetilde{\text{CG}}$ лежит плоскость $\text{Gr}(3, U_{\lambda'})$ и что $\widetilde{\text{CG}}$ является особым вдоль этой плоскости. Кроме того, было изучено раздутие $\text{Bl}_{\mathbb{P}^3} \widetilde{\text{CG}}$ многообразия $\widetilde{\text{CG}}$ вдоль плоскости $\text{Gr}(3, U_{\lambda'})$. Было показано, что образом естественной проекции $\text{Gr}(3, V)$ из касательного пространства к $\text{Gr}(3, U_{\lambda'})$ является проективное пространство $\mathbb{P}^8$. Также было показано, что на $\widetilde{\text{CG}}$ лежит одномерное семейство

проективных пространств $\mathbb{P}^4$, параметризуемых коникой.

Изучение нулей $\widetilde{\mathbf{CG}}$ необщей 4-формы λ' связано с изучением грассманиана Кэли. Грассманиан Кэли $\mathbf{CG}$ можно определить как нули общей 4-формы λ в $\text{Gr}(3, V)$. В отличие от $\widetilde{\mathbf{CG}}$ грассманиан Кэли является гладким. Ранее на $\mathbf{CG}$ был построен полный исключительный набор

$$\begin{aligned} \mathcal{O}, \mathcal{U}^\vee, \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee, (\Lambda^2 \mathcal{U}^\perp / \Lambda^2 \mathcal{U})^\vee, \Sigma^{2,1} \mathcal{U}^\vee, \\ \mathcal{O}(1), \mathcal{U}^\vee(1), \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee(1), (\Lambda^2 \mathcal{U}^\perp / \Lambda^2 \mathcal{U})^\vee(1), \\ \mathcal{O}(2), \mathcal{U}^\vee(2), \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee(2), \mathcal{O}(3), \mathcal{U}^\vee(3), \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee(3), \end{aligned}$$

где расслоение $(\Lambda^2 \mathcal{U}^\perp / \Lambda^2 \mathcal{U})^\vee$ получается из точной последовательности

$$0 \rightarrow \Lambda^2 \mathcal{U} \xrightarrow{\lambda} \Lambda^2 \mathcal{U}^\perp \rightarrow \Lambda^2 \mathcal{U}^\perp / \Lambda^2 \mathcal{U} \rightarrow 0.$$

Было показано, что на $\widetilde{\mathbf{CG}}$ отображение $\Lambda^2 \mathcal{U} \xrightarrow{\lambda} \Lambda^2 \mathcal{U}^\perp$ уже не является вложением расслоений, однако является вложением пучков. Обозначим коядро вложения $\Lambda^2 \mathcal{U} \xrightarrow{\lambda} \Lambda^2 \mathcal{U}^\perp$ на $\widetilde{\mathbf{CG}}$ за $\mathcal{C}$. Было показано, что набор

$$\begin{aligned} \mathcal{O}, \mathcal{U}^\vee, \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee, \mathcal{C}^\vee, \Sigma^{2,1} \mathcal{U}^\vee, \\ \mathcal{O}(1), \mathcal{U}^\vee(1), \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee(1), \mathcal{C}^\vee(1), \\ \mathcal{O}(2), \mathcal{U}^\vee(2), \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee(2), \mathcal{O}(3), \mathcal{U}^\vee(3), \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee(3), \end{aligned}$$

является исключительным на $\widetilde{\mathbf{CG}}$.

1.4 Исключительные наборы на однородных многообразиях

Полные исключительные наборы в производной категории, когда они существуют, являются одним из эффективных инструментов в исследовании алгебраических многообразий. Изотропные грассманианы являются естественными и важными алгебраическими многообразиями на которых предполагается существование полных исключительных наборов. Для векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 с невырожденной билинейной формой и данного числа k изотропный грассманиан является многообразием k -мерных подпространств $U \subset V$, ограничение формы на которые зануляется. Такие многообразия часто встречаются в качестве слоёв расслоений. В этом случае знание исключительного набора на изотропном грассманиане и теорема Орлова позволят связать структуры производных категорий тотального и базового пространств.

Первой публикацией по данной теме является известная статья Бейлинсона 1978 года [2], в которой построены полные исключительные наборы на проективных пространствах. Последние совпадают с обычными и изотропными грассманианами для случая $k = 1$. Эти результаты были обобщены Капрановым на случай обычных грассманианов в 1984 году в статье [17]. Затем Фонарёв в своей кандидатской диссертации [13] под руководством Кузнецова в 2013 году получил некоторые новые результаты

для обычных грассманианов включая минимальные лефшецевы наборы. Эти наборы характеризуются тем, что каждый его объект имеет вид $B \otimes \mathcal{O}(l)$ для целого l и некоторого минимального множества $\{B\}$ объектов производной категории. Они более удобны для вычислений, в том числе связанных с гомологической зеркальной симметрией, что в 2018 году было использовано Кузнецовым и Смирновым для вычисления вычетных категорий [27].

Возвращаясь к изотропным грассманианам, можно сразу отметить, что по степени изученности они сильно уступают обычным грассманианам. Мы более подробно сконцентрируемся на случае кососимметричной билинейной формы. В этом случае размерность пространства V чётна и равна $2n$. На многообразии $\mathrm{IGr}(k, 2n)$, кроме случая $k = 1$, минимальные лефшецевы исключительные наборы найдены лишь для $k = 2$ в 2008 году Кузнецовым [22] и в нескольких других случаях, во всех из которых размерность $2n$ не превосходит 10. А именно, разобраны некоторые случаи лагранжевых грассманианов — когда $n = k$: в 2001 году в статье [33] Самохин построил набор на $\mathrm{IGr}(3, 6)$, а в 2011 совместно с Полищуком ещё и на $\mathrm{IGr}(4, 8)$ и $\mathrm{IGr}(5, 10)$ [31]. Также в 2018 году в [16] Гусева построила набор для $\mathrm{IGr}(3, 8)$. Недавним крупным продвижением в задаче является статья [26] Кузнецова и Полищука 2016 года, в которой построены исключительные наборы максимальной длины для всех изотропных грассманианов. Однако они далеки от минимальных лефшецевых, а их полнота доказана лишь в некоторых случаях. Например, в статье [14] Фонарёва 2019 года доказывается полнота этих наборов для лагранжевых грассманианов.

Стажером лаборатории А. Новиковым были получены новые продвижения в случае $k = 3$, где построены полные минимальные лефшецевы исключительные наборы. Ранг K_0 в этом случае

$$2^3 \binom{n}{3} = \frac{4n(n-1)(n-2)}{3},$$

а индекс равен $w = 2n - 2$. Заметим, что исключительный набор не может содержать больше чем w подкруток одного объекта. В случаях $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$ ранг делится на индекс, а в случае $n \equiv 1 \pmod{3}$ — нет. Построенные наборы в двух первых случаях действительно прямоугольные, то есть они имеют вид

$$\{B \otimes \mathcal{O}(l) \mid 0 \leq l < w, B \in \mathcal{B}\} \quad \text{для некоторого множества } \mathcal{B}.$$

В последнем же случае прямоугольная часть имеет максимальный размер, а оставшиеся объекты являются подкрутками одного объекта. Таким образом, эти наборы очевидно являются минимальными лефшецевыми. В ходе доказательства явно построены некоторые перестройки, которые тесно связаны с объектами, определёнными в уже упоминавшейся статье [26].

Полученные результаты позволяют сформулировать многочисленные гипотезы об устройстве производных категорий произвольных изотропных грассманианов $\mathrm{IGr}(k, 2n)$. Поэтому, вероятно, они обобщаются на общий случай и вместе с идеями

из недавней статьи Фонарёва [14] позволят построить исключительные наборы и доказать их полноту. Можно ли перенести эти достижения на случай ортогональных групп также остаётся вопросом дальнейшего изучения.

1.5 Применение категорных и алгебро-геометрических конструкций к различным вопросам алгебры и квантовой теории информации

Основная часть исследований сотрудника Лаборатории А. Ждановского в 2021 году была посвящена исследованиям гомотопов ассоциативных и неассоциативных алгебр.

Есть общее понятие гомотопии алгебр (вообще говоря неассоциативных), как обобщения гомоморфизма: а именно, пусть есть две алгебры $(A, \star)$ и $(B, \cdot)$, тогда их гомотопия — это три линейных отображения $f_1, f_2, f_3: A \rightarrow B$, таких что

$$f_1(a \star a') = f_2(a) \cdot f_3(a')$$

для любых $a, a' \in A$. В этом случае B назовем гомотопом A . Если потребовать биективность $f_i, i = 1, 2, 3$, то гомотопия называется изотопией.

Если есть гомотопия из алгебры A в алгебру B , то алгебру B будем называть гомотопом алгебры A . Частным случаем гомотопа является так называемый x -гомотоп: зафиксируем $x \in A$, тогда в алгебре A можно ввести операцию умножения двумя разными способами: $a \cdot_x^L a' = (a \star x) \star a'$ (так называемый левый гомотоп) и $a \cdot_x^R a' = a \star (x \star a')$ (правый гомотоп). Очевидно, в случае ассоциативных алгебр левые и правые гомотопы совпадают.

С точки зрения исследования гомотопов довольно естественными являются такие вопросы:

- сколько гомотопов (с точности до изотопии) имеет общая неассоциативная алгебра?
- Есть ли ассоциативная алгебра, имеющая бесконечное число неизоморфных x -гомотопов?

Ответы на эти вопросы были получены в совместной работе с Сергеем Гуминовым (работа готовится к публикации). А именно, в случае первого были изучены детерминантные гиперповерхности, естественно появляющиеся при рассмотрении умножения в алгебре как тензор. Были переформулированы условия изотопичности алгебр в терминах этих гиперповерхностей и в результате исследования ответ на первый вопрос такой: начиная с размерности 4, у общей неассоциативной алгебры бесконечное число неизотопных гомотопов. Далее, в случае ассоциативных алгебр удалось построить пример 13-мерной алгебры, имеющей бесконечное число неизоморфных x -гомотопов.

Отметим, что гомотопы ассоциативных алгебр естественно появляются в связи с различными областями математики и физики: среди которых, классификация конфигураций прямых в гильбертовом пространстве, описание ортогональных разложений простых алгебр Ли, дискретный гармонический анализ на графах, классификация

взаимно-несмещенных базисов, имеющая большое применение в квантовой механике и квантовой теории информации, описание превратных пучков на стратифицируемых топологических пространствах, теория представлений квази-наследственных алгебр и т.д.

Также отметим связь гомотопов ассоциативных алгебр с так называемой склейкой абелевых категорий. В 1982 году в статье Бейлинсона, Бернштейна и Делиня [3] при изучении превратных пучков, было введено понятие “склейки” триангулированных категорий. Далее, в 1986 году Макферсон и Вилонен рассмотрели “склейку” абелевых категорий. Следуя Псарудакису ([32]) введем понятие “склейки” (recollement) абелевых категорий. А именно, “склейка” - тройка абелевых категорий $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ и набор функторов: $i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $e: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ и сопряженные им: $q: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, $p: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ и $l: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ и $r: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$, удовлетворяющие следующим условиям: функторы i, l, r - строго точные и образ i совпадает с ядром e . В частности, при достаточно естественных условиях на абелевы категории, соответствующие ограниченные производные категории тоже будут удовлетворять условиям “склейки” триангулированных категорий. Это позволило существенно упростить проверку условий “склейки” и получить оценки гомологических размерностей категории $\mathcal{B}$ через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$. Фактически, “склейка” абелевых категорий является обобщением следующей известной ситуации: пусть у нас есть алгебра R и t — идемпотент в R . Тогда $\mathcal{A} = (R/RtR)\text{-Mod}$, $\mathcal{B} = R\text{-Mod}$ и $\mathcal{C} = (tRt)\text{-Mod}$.

Подобная ситуация встречается и при изучении гомотопов ассоциативных алгебр. А именно, рассмотрим ассоциативную алгебру с единицей R и фиксируем элемент $x \in R$. Как мы уже знаем, можно ввести новую операцию умножения на пространстве R : $r_1 \cdot_x r_2 = r_1 x r_2$. Новая алгебра может не содержать единицу, поэтому добавим ее внешним образом — получим алгебру $\hat{R}_x$.

В работе [8] было показано, что для ассоциативной k -алгебры R категория модулей гомотопа $\hat{R}_x\text{-Mod}$ является “склейкой” категорий $R\text{-Mod}$ и $k\text{-Mod}$ в случае “правильного” выбора элемента x . Условия “правильного” выбора следующие: $RxR = R$ и R как левый и правый $\hat{R}_x$ -модуль является проективным. Такой выбор элемента называется хорошо-темперированным. В этом случае есть естественные оценки на глобальную гомологическую размерность $\hat{R}_x\text{-Mod}$ через глобальную размерность $R\text{-Mod}$.

В случае конечномерной алгебры R автором показано, что достаточно только условие $RxR = R$ и кроме того показывается, что если в качестве x выбрать не хорошо-темперированный элемент, то гомологическая размерность $\hat{R}_x$ бесконечна.

В случае коммутативных алгебр гомотопы возникают при изучении бирациональных отображений. Рассмотрены примеры гомотопов кривых, а также с их помощью построен контрпример к лемме Ричардсона в случае ненетероваго кольца. Описанные результаты опубликованы в работе [34].

Также изучались приложения алгебры, алгебраической геометрии, теории представлений и теории категорий к квантовой теории информации. Напомним, что основным понятием в квантовой механике является “наблюдаемая”. В квантовой теории

информации понятие “наблюдаемая” было переформулировано как проекторнозначная мера (кратко, PVM). А именно, вместо “наблюдаемой” можно рассматривать ее спектральную меру. Понятие положительно-операторной меры (или кратко, POVM) является обобщением PVM и, соответственно, квантовые измерения, описываемые POVM, есть обобщение квантовых измерений, описываемых с помощью PVM.

POVM — это наиболее общий тип измерений в квантовой механике. Они широко используются в области квантовой теории информации. Связь между PVM и POVM описана Наймарком в его знаменитой теореме о дилатации. Грубо говоря, POVM — это “проекция” некоторого PVM.

Напомним определение POVM. Пусть K — это k -мерное гильбертово пространство, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ — конечное множество. POVM — это операторная мера $A: \Omega \rightarrow E(K)$, где $E(K)$ — множество полуположительных операторов на K и $\sum_{i=1}^m A(\omega_i) = I$, где I — единичный оператор.

Естественным образом к проблеме классификации POVM, можно применить теорию деформированных препроективных алгебр, развите Кроули-Боуви [10] при решению проблемы Делиня–Симпсона. В нашей работе [35] мы применяем технику Кроули-Боуви для описания POVM.

Также был опубликован небольшой обзор алгебраических и геометрических конструкций, возникающих в квантовой теории информации [21].

1.6 Многогранник Ньютона–Окунькова $\mathbb{P}^1$ -расслоения

Сотрудником Лаборатории В. Кириченко был разработан метод явного построения многогранника Ньютона–Окунькова $\mathbb{P}^1$ -расслоения Y над гладким алгебраическим многообразием X , если известен многогранник Ньютона–Окунькова P многообразия X и классы Черна расслоения E ранга два над X , такого что $Y = \mathbb{P}(E)$. Метод основан на выпукло-геометрическом утверждении [18, Theorem 4.1], связывающем кольца Пухликова–Хованского выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ и многогранника $P * Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где $Q \subset \mathbb{R}^n$ — многогранник, полученный усечением граней коразмерности два в некотором многограннике $\hat{P} \subset \mathbb{R}^n$ аналогичном многограннику P (через $*$ обозначается взятие суммы Кэли двух многогранников). Выбор многогранника $\hat{P}$ определяется по первому классу Черна $c_1(E)$, а выбор усечённого многогранника Q — по второму классу Черна $c_2(E)$. Говоря неформально, мы доказываем, что кольцо Пухликова–Хованского многогранника $P * Q$, рассматриваемое как модуль над кольцом Пухликова–Хованского многогранника P , описывается той же самой классической формулой проективизации расслоения, что и кольцо Чжоу многообразия Y , рассматриваемое как модуль над кольцом Чжоу многообразия X (более точное утверждение приводится ниже).

Для торического многообразия X и нерасщепимого векторного расслоения E ранга два над X этот метод гипотетически даёт то же описание многогранника Ньютона–Окунькова неторического многообразия

$$Y := \mathbb{P}(E),$$

что и описание в [15]. Например, многообразие флагов $GL_3(\mathbb{C})/B$ можно также рассматривать как $\mathbb{P}(T\mathbb{P}^2) =: Y$, где $T\mathbb{P}^2 =: E$ — это касательное расслоение к проективной плоскости $\mathbb{CP}^2 =: X$. В этом случае наш метод даёт трёхмерный многогранник Винберга–Литтельманна–Фейгина–Фурье (см. [18, Example 3.1]), что совпадает с многогранником, описанным в [15, Example 6.1].

Особый интерес метод представляет для индуктивного описания многогранников Ньютона–Окунькова многообразий Ботта–Самельсона, так как последние могут быть получены как башни последовательных $\mathbb{P}^1$ -расслоений, начиная с точки. В частности, в [18, Proposition 5.4] явно описаны многогранники Ньютона–Окунькова 5-мерного многообразия Ботта–Самельсона R_{12132} для всех полубильных расслоений, что подтверждает гипотезу, сформулированную в [19] и до сих пор обоснованную лишь на эвристическом уровне. Мы надеемся, что метод позволит доказать гипотезу в общем случае, а именно позволит обойти самую технически сложную часть в вычислении многогранников Ньютона–Окунькова — проверку того, что гипотетический многогранник Ньютона–Окунькова имеет нужный объём.

Теперь мы сформулируем ключевое утверждение о кольцах Пухликова–Хованского, на котором базируется наш метод. Для многогранника P будем обозначать через R_P его кольцо Пухликова–Хованского. Напомним, что это кольцо определяется как факторкольцо кольца дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^\ell$ виртуальных многогранников аналогичных P по идеалу, состоящему из операторов, которые аннулируют многочлен объёма vol_P . Более подробное определение (с объяснением понятий виртуального многогранника и многочлена объёма) приводится в [18, Section 2]). Через Δ обозначим многогранник $P * Q$. Нам понадобится частичное описание многочлена объёма усечённого многогранника Q ([18, формула (3)]). Пусть s положительное вещественное число, такое что $s \leq 1$. Тогда несложно проверить, что на пространстве $\mathbb{R}^\ell$ можно определить такие однородные многочлены $g_2, g_3, \dots, g_n$, что

$$\text{vol}(sQ + (1-s)\hat{P}) = \text{vol}(\hat{P}) - g_2(\hat{P})\frac{s^2}{2} - \sum_{j=3}^n g_j(\hat{P})s^j.$$

Теорема 1.6 ([18, Theorem 4.1]). Предположим существуют однородные элементы $D_j \in R_P$ степеней $j = 2, \dots, n$, такие что $D_j(\text{vol}_P) = g_j$. Положим

$$c_1 = \partial_{\hat{P}} - \partial_P, \quad c_2 = D_2.$$

Если однородный многочлен

$$q(s, P') = g_2(P')\frac{s^2}{2} + \sum_{j=3}^n g_j(P')s^j$$

на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\ell$ удовлетворяет условию:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - c_1 \frac{\partial}{\partial s} + c_2 \right) q(s, P' + s(Q - P)) = g_2(P' + s(Q - P)),$$

тогда имеется изоморфизм колец:

$$R_P[x]/(x^2 - c_1x + c_2) \rightarrow R_\Delta; \quad x \mapsto \frac{\partial}{\partial s}.$$

1.7 Полиномиально подобные отображения

Препринт [4] содержит полученную сотрудником Лаборатории В. Тимориным оценку сверху на модуль полиномиально подобного ограничения многочлена. Эта оценка расширяет классическое неравенство Поммеренке–Левина–Йоккоза (PLY) на случай высокой степени. Точнее говоря, в случае, когда степень полиномиально подобного отображения равна 1, из полученного нами неравенства получается версия Поммеренке неравенства PLY.

Напомним, что полиномиально подобное (PL) отображение — это собственное голоморфное отображение $f : U_1 \rightarrow U_0$, где U_0, U_1 — жордановы диски в $\mathbb{C}$, причем U_1 компактно вложен в U_0 . Рассмотрение PL отображений было инициировано Дуади и Хаббардом для осуществления голоморфной ренормализации в полиномиальной динамике. Каждое PL отображение топологически (и даже, квазиконформно, причем соответствующий дифференциал Бельтрами можно сделать нулевым на заполненном множестве Жюлиа) сопряжено некоторому многочлену той же степени, ограниченному на окрестность его заполненного множества Жюлиа. Мы рассматриваем тот случай, когда многочлен P более высокой степени имеет PL ограничение $P : U_1 \rightarrow U_0$ более низкой степени. Модуль такого ограничения определяется как модуль $\text{mod}(U_0 \setminus \bar{U}_1)$ кольца $U_0 \setminus \bar{U}_1$. Основным результатом нашего исследования является оценка сверху на этот модуль.

Обозначим через K_P заполненное множество Жюлиа многочлена P , то есть множество точек, орбиты которых при действии многочлена P не убегают на бесконечность. Напомним, что внешние лучи для P определяются как координатные линии постоянного аргумента в той полярной системе координат на $\mathbb{C} \setminus K_P$, в которой отображение P возводит модуль в степень D и умножает аргумент на D . Рассмотрим два внешних луча R, L для P , заканчивающихся в одной и той же точке a . Объединение $\Gamma = R \cup L \cup \{a\}$ называется разрезом. Это простая замкнуто вложенная в $\mathbb{C}$ кривая, разделяющая плоскость на две части. Мы предполагаем, что разрез Γ ориентирован от R к L и является ориентированной границей области W_Γ ; последняя называется клином, порожденным разрезом Γ .

Простейший случай доказанного в [4] общего результата состоит в следующем.

Основной результат (простейший случай). Пусть $\mathcal{Z}$ — система разрезов динамической плоскости многочлена P , такая, что соответствующие клинья не пересекаются. Если $P : U_1 \rightarrow U_1$ — PL отображение, такое, что ограничение на каждый клин однолистно, то модуль этого отображения оценивается сверху в терминах числа разрезов и степени многочлена P .

$$\frac{1}{\text{mod}(U_0 \setminus \bar{U}_1)} \geq \frac{\pi |\mathcal{Z}|}{\log D}$$

Интересно, что степень PL отображения не принимает участия в данной оценке.

Основной результат применяется следующим образом к изучению динамики кубических многочленов. Рассмотрим пространство кубических многочленов с неподвижной точкой 0. Линейным отображением вида $z \mapsto \lambda z$ с $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, каждый такой многочлен можно сопрячь с

$$f_{\lambda,b}(z) = \lambda z + bz^2 + z^3.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — пространство всех таких многочленов, а $\mathcal{F}_\lambda$ — одномерный срез, состоящий из $f_{\lambda,b}$ с фиксированным значением мультипликатора λ . Основная гиперболическая компонента $\mathcal{P}^\circ$ пространства $\mathcal{F}$ по определению состоит из $f_{\lambda,b}$, таких, что $|\lambda| < 1$ и обе критические точки отображения $f_{\lambda,b}$ находятся в той же компоненте Фату, что и 0. Основная гиперболическая компонента играет в кубической динамике ту же роль, которую внутренность главной кардиоиды множества Мандельброта играет в квадратичной динамике. Замыкание $\mathcal{P}$ области $\mathcal{P}^\circ$, однако, имеет намного более интересную топологию, чем квадратичный аналог. Мы изучаем множество $\mathcal{P}$ через срезы $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{P} \cap \mathcal{F}_\lambda$, которые могут быть непустыми только если $|\lambda| \leq 1$. Определим подмножество $\mathcal{CU} \subset \mathcal{F}$, состоящее из всех $f = f_{\lambda,b}$, таких, что $|\lambda| \leq 1$, причем

- множество K_f не содержит отталкивающих разделяющих точек,
- неотталкивающие периодические точки отображения f , отличные от 0, имеют мультипликатор 1.

Напомним, что топологической оболочкой $\text{Th}(X)$ компактного подмножества $X \subset \mathbb{C}$ называется объединение множества X и всех ограниченных компонент дополнения. Следующий результат был нами предложен в качестве гипотезы в 2016 году, и теперь эту гипотезу удалось доказать с помощью сформулированной выше теоремы про модуль PL отображения:

$$\text{Th}(\mathcal{P}_\lambda) = \mathcal{CU}_\lambda.$$

За отчетный период В. Тимориным была опубликована статья [5], приняты в печать (опубликованы online-first) статьи [6, 7].

1.8 Оценка числа антицепей

Пусть $P = (\{0, 1, \dots, r-1\}^n, \preceq)$ — частично упорядоченное множество на множестве векторов $(a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in [r] := \{0, 1, \dots, r-1\}$, где мы полагаем $(a_1, \dots, a_n) \preceq (b_1, \dots, b_n)$, если $a_i \leq b_i$ для любого i . Пусть $P_i \subset P$ — множество векторов с суммой координат i . Как известно, размер наибольшей антицепи в P достигается на “среднем слое”, то есть на множестве $P_{\lfloor n(r-1)/2 \rfloor}$; обозначим его размер через $N_{n,r}$. Нас интересует общее число антицепей в P . Очевидно, что это число не меньше $2^{N_{n,r}}$ и для $r = 2$ классический результат Кляйтмана [20] утверждает, что число антицепей не превосходит $2^{(1+o_n(1))N_{n,2}}$. Для $r = 3$ аналогичное утверждение было доказано в недавней работе [30].

В совместной работе стажера лаборатории Д. Захарова с С. Pohoata была доказана оценка $2^{(1+o_n(1))N_{n,r}}$ на число антицепей в P для произвольного фиксированного r .

Основной метод оценки числа антицепей состоит в доказательстве неравенств супернасыщения. А именно, доказывается, что если множество $X \subset P$ имеет размер $N_{n,r} + k$, для целого $x \geq 1$, то X содержит не менее $c_r n x$ пар $x, x' \in X$, что $x \prec x'$. Здесь $c_r > 0$ – некоторая константа, зависящая от r . Для доказательства такой оценки строится некоторое распределение на множестве всех разбиений P на $N_{n,r}$ цепей и оценки матожидания числа пар элементов X , попавших в одну и ту же цепь из разбиения на цепи, взятого в соответствии с данным распределением. Далее применяется лемма о контейнерах для графа сравнимости P . К сожалению, наш метод позволяет доказать оценку супернасыщения только для достаточно больших k (а именно $k \geq N_{n,r}/n$) и константа c_r , которую мы получаем не оптимальна. Но этого все равно достаточно для применения леммы о контейнерах. Ведется работа по доказательству оценки для всех k , а также обобщению метода на другие упорядоченные множества.

Стоит отметить, что в работе [30] доказано почти оптимальное супернасыщение для всех k и $r = 3$, но их методы не удается прямолинейно обобщить на случай произвольного r .

1.9 Множества в почти общем положении

Скажем, что множество $X \subset \mathbb{R}^2$ находится в общем положении, если X не содержит трех точек на одной прямой. Скажем, что X в почти общем положении, если никакие 4 точки X не лежат на одной прямой. В работе [1] построены примеры множеств $X \subset \mathbb{R}^2$ размера n в почти общем положении такие, что любое подмножество $X' \subset X$ размера $n^{5/6+\varepsilon}$ не в общем положении. Главный инструмент в доказательстве — лемма о контейнерах для 3-однородных гиперграфов, нужная чтобы оценить число независимых множеств в некотором вспомогательном гиперграфе. Идет работа по обобщению этой конструкции, а имеено для фиксированных параметров $d > k, a \geq k + 1$ мы хотим построить множество $X \subset \mathbb{R}^d$ размера n такое, что никакая $a + 1$ точка X не лежит в одной k -мерной плоскости, но для любого подмножества $X' \subset X$ размера n^{1-c} , для некоторой константы $c = c(d, k, a)$, в X' найдутся a точек, лежащие в одной k -мерной плоскости. Также хочется получить как можно лучшие оценки на константу c . В совместной работе стажера Лаборатории Д. Захарова с С. Pohoata пока удалось установить частный случай $k = d - 1, a = d + 1$, что уже является новым результатом: ранее была лишь известна лишь конструкция с оценкой на размер множества X' вида $o(n)$, вместо n^{1-c} [28].

Для построения X рассматривается случайное подмножество A куба $\{0, 1, \dots, m\}^d$ некоторой плотности и оценивается вероятность того, что из A можно убрать не более половины элементов, чтобы A перестало содержать $a + 1$ точку в одной k -плоскости и в тоже время, что в любом большом подмножестве $A' \subset A$ найдется a точек в одной k -плоскости. Это является задачей о подсчете числа независимости в некотором

(случайном) гиперграфе и поэтому можно применить метод гиперграф-контейнеров. А именно, все сводится к вопросу о супернасыщении: в любом достаточно большом подмножестве $A \subset \{0, \dots, m\}^d$ найдется много a -элементных подмножеств, порождающих пространство размерности ровно k . Планируется получить как можно лучшие оценки на количество таких подмножеств в зависимости от размера A .

1.10 Производные категории и суперсвязности

Сотрудники Лаборатории также продолжают изучение связи между некоторыми дифференциально-геометрическими и комплексно-аналитическими объектами на комплексно-аналитических многообразиях. Мотивирующим примером здесь служит эквивалентность понятий (или, правильнее, категорий) голоморфных расслоений и гладких расслоений с плоской $\bar{\partial}$ -связностью. Результат, обобщающий такую связь был получен ранее А. Бондалом и сотрудником Лаборатории А. Рослым [9].

Пусть X — компактное комплексно-аналитическое многообразие, $\mathcal{A}_X^\bullet$ — пучок DG-алгебр гладких комплексных внешних форм,

$$\mathcal{A}_X^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}_X^{p,q}$$

с дифференциалом Дольбо $\bar{\partial}$. Рассматриваемая в [9] (плоская) суперсвязность — это пучок DG-модулей над $\mathcal{A}_X^{0,\bullet}$, локально свободный как модуль над $(\mathcal{A}_X^{0,\bullet})^\natural$ (то же самое кольцо, но без дифференциала). Пусть $\mathcal{C}(X)$ — DG-категория таких модулей, а $Ho(\mathcal{C}(X))$ — ее гомотопическая категория. В работе [9] доказано, что последняя категория эквивалентна категории $D_{coh}^b(X)$.

В совместной работе А. Рослого и И. Яковлева изучается связь между двумя категориями, аналогичными тем, что описаны выше. А именно, назовём плоской расширенной суперсвязностью пучок DG-модулей над $\mathcal{A}_X^\bullet$, локально свободных над $(\mathcal{A}_X^\bullet)^\natural$. Пусть $\mathcal{S}(X)$ — DG-категория таких модулей. Как и $\mathcal{C}(X)$, она предтреангулированная. Пусть $Ho(\mathcal{S}(X))$ — соответствующая гомотопическая категория. С другой стороны, рассмотрим DG-категорию $\Omega M(X)$, состоящую из $\Omega_X^\bullet$ -DG-модулей с когерентными когомологиями. (Точное определение когерентности см. ниже.) Мы планируем доказать эквивалентность $Ho(\mathcal{S}(X))$ и производной категории $D_{coh}^b(\Omega M(X))$. Для этого необходимо предъявить функтор между ними, что можно сделать уже на уровне DG-категорий. Поскольку каждый $\mathcal{A}_X^\bullet$ -DG-модуль является также и $\Omega_X^\bullet$ -DG-модулем, получаем функтор $\mathcal{S}(X) \rightarrow \Omega M(X)$. Для корректности надо только проверить, что когомологии $\mathcal{A}_X^\bullet$ -модуля являются когерентными $\Omega_X^\bullet$ -модулями. Это, действительно, так. Соответствующая “Локальная Лемма” аналогична результату из работы [9], отличие чисто техническое.

Уточним теперь понятие когерентности для $\Omega_X^\bullet$ -модулей. Как известно, пучки $\mathcal{O}_X$ -модулей на гладком многообразии X , которые локально допускают конечную свободную резольвенту, — это когерентные пучки, то есть пучки $\mathcal{O}_X$ -модулей, являющиеся

гомоморфным образом свободных:

$$\mathcal{O}_X^{\oplus p} \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus q} \rightarrow \mathcal{H}$$

($\mathcal{H}$ когерентен как $\mathcal{O}_X$ -модуль если и только если $\mathcal{H}$ конечно представим). Это определяется тем, что для гладкого многообразия X локальные кольца $\mathcal{O}_{X,x}$, $\forall x \in X$, имеют конечную гомологическую размерность, равную $\dim X$.

Мы же собираемся иметь дело с пучками $\Omega_X^\bullet$ -модулей, где $\Omega_X^\bullet$ — пучок суперкоммутативных колец голоморфных дифференциальных форм, а суперкоммутативные кольца типично имеют бесконечную гомологическую размерность. Такова, например, внешняя алгебра векторного пространства. Это видно уже в одномерном примере. Действительно, рассмотрим кольцо $\Lambda^\bullet = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\theta$, где θ — нечетная нильпотентная, $\theta^2 = 0$, переменная степени 1. Рассмотрим над ним градуированный $\Lambda^\bullet$ -модуль $M^\bullet = \Lambda^\bullet/(\theta) \simeq \mathbb{C}$. У него есть бесконечная свободная резольвента

$$\dots \rightarrow \Lambda^\bullet \xrightarrow{\theta} \Lambda^\bullet \xrightarrow{\theta} \Lambda^\bullet \rightarrow M^\bullet \rightarrow 0,$$

где $\xrightarrow{\theta}$ — отображение умножения на θ . Эту резольвенту очевидно нельзя оборвать ни на каком конечном шаге. Ничего не поменяется, если условие существования конечной свободной резольвенты заменить условием существования конечной проективной резольвенты: можно показать, что для внешней алгебры векторного пространства, $\Lambda^\bullet(V)$, проективными $\Lambda^\bullet(V)$ -модулями будут только свободные модули. Смысл слова “свободный” объяснен в следующем определении.

Определение 1.7. Назовем свободным модулем над суперкоммутативным кольцом $\mathcal{R}^\bullet$ (или пучком суперкоммутативных колец) модуль вида $\mathcal{R}^\bullet \otimes E^\bullet$, где $E^\bullet$ — конечномерное градуированное векторное пространство (и тензорное произведение понимается в градуированном смысле).

Теперь нам надо определить понятие когерентного пучка $\Omega_X^\bullet$ -модулей. Это будут $\mathcal{O}_X$ -когерентные модули с дополнительным условием.

Определение 1.8. Пучок $\mathcal{G}^\bullet = \bigoplus \mathcal{G}^i$ градуированных $\Omega_X^\bullet$ -модулей называется $\Omega_X^\bullet$ -когерентным, если каждый пучок $\mathcal{G}^i$ когерентен как $\mathcal{O}_X$ -модуль, и для всех $x \in X$ его (геометрический) слой $G^\bullet := \bigoplus (\mathcal{G}_x^i / \mathfrak{m}_x \mathcal{G}_x^i)$, где $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ — максимальный идеал точки, является свободным модулем над внешней алгеброй кокасательного пространства $\Lambda^\bullet(T_x^*X)$.

Такие и только такие пучки $\Omega_X^\bullet$ -модулей локально имеют конечную свободную над $\Omega_X^\bullet$ резольвенту. Теперь определение интересующей нас DG-категории таково.

Определение 1.9. Категория $\Omega M(X)$ состоит из пучков DG-модулей $(\mathcal{M}^\bullet, d)$ над пучком DG-колец $\Omega_X^\bullet$, таких, что их пучки когомологий $\mathcal{H}_d^\bullet(\mathcal{M}^\bullet)$ когерентны над $\Omega_X^\bullet$. Здесь $\Omega_X^\bullet$ понимается как DG-кольцо с нулевым дифференциалом.

Сотрудники Лаборатории рассчитывают завершить в ближайшие месяцы доказательство эквивалентности категорий $\mathcal{S}$ и $D_{coh}^b(\Omega M(X))$.

2 Гомологические и мотивные методы в некоммутативной геометрии

2.1 Спектры категорий представлений симметрических групп

В отчетный период, сотрудник Лаборатории М. Ровинский занимался изучением спектров категорий гладких полулинейных представлений симметрических групп

Пусть $\mathfrak{S}_\Psi$ — группа всех перестановок некоторого бесконечного множества Ψ , гладко (т.е. с открытыми стабилизаторами) и нетривиально действующая на поле K .

Определение 1. Спектром Габриеля категории Гротендика $\mathcal{C}$ называется топологическое пространство, точками которого являются классы изоморфизма неразложимых инъективных объектов. Для каждого объекта X категории $\mathcal{C}$ обозначим через $[X]$ множество точек E , в которые нет ненулевых морфизмов из X . Тогда множества вида $[X]$, где X пробегает компактные (конечно представимые) объекты, образуют базу открытых множеств.

Обозначим через Spec_K спектр Габриеля категории $\mathrm{Sm}_K(\mathfrak{S}_\Psi)$ гладких полулинейных представлений группы $\mathfrak{S}_\Psi$ над полем K . Он гомеоморфен атомному спектру категории $\mathrm{Sm}_K(\mathfrak{S}_\Psi)$.

Пусть $F|k$ — такое расширение полей, что k алгебраически замкнуто в F . Обозначим через $F_\Psi = F_{k,\Psi}$ поле частных копроизведения в категории k -алгебр копий F , пронумерованных множеством Ψ . В частности, $F_\Psi = k$, если $F = k$. Группа $\mathfrak{S}_\Psi$ естественно действует на F_Ψ .

Для каждого $d \in \mathbb{Z}$, пусть $V_{F|k,d} \subset F_\Psi(\Psi)$ — подмножество однородных рациональных функций степени d над F_Ψ от переменных из Ψ . В частности, $V_{F|k,0} = F_\Psi(x/y \mid x, y \in \Psi)$ — $\mathfrak{S}_\Psi$ -инвариантное подполе, а $V_{F|k,d} \subseteq F_\Psi(\Psi)$ — $\mathfrak{S}_\Psi$ -инвариантное одномерное $V_{F|k,0}$ -векторное подпространство.

Для каждого индекса $? \in \{a, b, c, d\}$, рассмотрим следующие $\mathfrak{S}_\Psi$ -поля $K_?$: $K_a := F_\Psi$ с $F \neq k$, $K_b := V_{F|k,0} \subset F_\Psi(\Psi) = F(X)_\Psi$, $K_c := F_\Psi(u - v \mid u, v \in \Psi) \subset F_\Psi(\Psi)$,

$$K_d := F_\Psi \left(\frac{u - v}{u - w} \mid u, v, w \in \Psi, \#\{u, v, w\} = 3 \right) \subset F_\Psi(\Psi).$$

Полученные Ровинским результаты собраны в следующей теореме.

Теорема 2.1. Для любого целого $s \geq 0$, инъективные оболочки объектов $K\langle \binom{\Psi}{s} \rangle$ в $\mathrm{Sm}_K(\mathfrak{S}_\Psi)$ представляют попарно различные точки $P_s = P_s^{(K)}$ спектра Spec_K . Любое множество, содержащее P_s для бесконечного количества $s \geq 0$ плотно в Spec_K . Замыкание точки P_s в $\{P_t \mid t \geq 0\}$ совпадает с $\{P_t \mid 0 \leq t \leq s\}$. Пусть $p \geq 0$ — характеристика поля k .

- Для каждого $? \in \{a, b, c, d\}$, простые объекты категории $\mathrm{Sm}_{K?}(\mathfrak{S}_\Psi)$ обратимы. Группа $\mathrm{Pic}_{K?}$ их классов изоморфизма равна 0 в случаях $? \in \{a, c\}$; она — бесконечная циклическая и порождена классом $(x - y)K? \subset F_\Psi(\Psi) = F(X)_\Psi$, если $? \in \{b, d\}$

Любой неразложимый объект конечной длины в категории $\mathbf{Sm}_{K_?}(\mathfrak{S}_\Psi)$ обратим в случаях $? \in \{a, b\}$; в случае $? = c$, для любого целого $N \geq 1$ существует неразложимый объект $\mathbf{Sm}_{K_c}(\mathfrak{S}_\Psi)$ длины N , его класс изоморфизма единственен тогда и только тогда, когда характеристика поля k нулевая;

- Инъекция $\mathrm{Pic}_{K_?} \rightarrow \mathrm{Cl}_?$, $\mathcal{L} \mapsto E(\mathcal{L})$, во множество замкнутых точек спектра $\mathrm{Spec}_{K_?}$, биективна при $? \in \{a, c\}$; $\mathrm{Cl}_?$ состоит из:

- класса P_0 объекта K_a ,
- (попарно различных) классов $P_{0,n}$ объектов $V_{F|k,n}$ (для всех $n \in \mathbb{Z}$) и P_1 (в этом случае любое бесконечное подмножество множества Cl_b плотно),
- класса P_0 (ненётерова, артинова тогда и только тогда, когда характеристика поля k нулевая) объекта $E(K_c) = K_c[x] \subset F_\Psi(\Psi)$ для любого $x \in \Psi$,
- (попарно различных) классов $P_{0,n}$ объектов $E((x-y)^n K_d) = (x-y)^n K_d \left[\frac{x}{x-y} \right] \subset F_\Psi(\Psi)$ и $P_{1,n}$ объектов $(x-y)^n \cdot K_d \langle \Psi \rangle \subset K_c \langle \Psi \rangle$ для всех целых n .

- Для любого $\mathfrak{S}_\Psi$ -инвариантного подполя $K \subseteq K_a$, объект K_a является инъективной кообразующей категории $\mathbf{Sm}_K(\mathfrak{S}_\Psi)$ (хотя, как правило, весьма разложимой);

- Для каждого $? \in \{a, b, c, d\}$, незамкнутые точки спектра $\mathrm{Spec}_{K_?}$ представлены нётеровыми объектами. Незамкнутыми являются точки P_s при $s \geq 2$ и

- P_1 , если $? \in \{a, c\}$,
- P'_2 of $(x-y) \cdot K_d \langle \left(\frac{\Psi}{2} \right) \rangle \subset K_c \langle \left(\frac{\Psi}{2} \right) \rangle$, если $? = d$ и характеристика поля $k \neq 2$;

Если, для некоторого $s \geq 1$, $K_? \langle \left(\frac{\Psi}{s} \right) \rangle$ не инъективно, то $? \in \{c, d\}$, характеристика поля k равна 2, $s = 2$, $F = k$ и $E(K_? \langle \left(\frac{\Psi}{2} \right) \rangle) \cong K_? \langle \Psi^2 \setminus \Delta_\Psi \rangle$, где Δ_Ψ — диагональ в Ψ^2 .

- Для $? \in \{a, b, c\}$ и любого $s > 0$, замыкание точки P_s совпадает с $\mathrm{Cl}_? \cup \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$.

Для $? = d$,

замыкание точки P_s при $s \geq 2$ совпадает с

- $\mathrm{Cl}_d \cup \{P_{1,n} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{P_2, \dots, P_s\}$, если $s > 2$ и характеристика поля k равна 2,
- $\mathrm{Cl}_d \cup \{P_{1,n} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{P'_2, P_2, \dots, P_s\}$, если $s > 2$ и характеристика поля $k \neq 2$,
- $\mathrm{Cl}_d \cup \{P_{1,n} \mid (-1)^n = 1 \text{ в } k\} \cup \{P_2, \dots, P_s\}$, если $s = 2$;

замыкание точки $P_{1,n}$ совпадает с $\mathrm{Cl}_d \cup \{P_{1,n}\}$.

2.2 Стабильные когомологии конечных групп

Научный руководитель Лаборатории Ф.А. Богомолов в отчетный период провел несколько исследований, совместно с сотрудниками лаборатории Е. Америк, Н. Курносовым и М. Вербицким, которые подробно описаны ниже, в разделе “Специальные многообразия”.

Кроме того, совместно с К. Боннингом и А. Пируткой, Ф.А. Богомолов довел до конца ряд исследований, посвященных стабильным когомологиям конечных групп, и подготовил результаты для журнальной публикации.

Само понятие стабильных когомологий группы было в свое время введено Богомоловым в ходе изучения вопросов рациональности факторов аффинных пространств по групповым действиям (где, как оказалось, возникает масса интересных и нетривиальных явлений, породивших большую теорию). А именно, обычные когомологии конечной группы G , скажем, с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ для фиксированного простого числа p , можно тавтологически рассматривать как когомологии стэка Делиня-Мамфорда, полученного фактором точки по тривиальному действию G . Давайте теперь вместо точки возьмем какое-нибудь векторное пространство V над полем k характеристики, отличной от p (например, характеристики 0), на котором G действует. Тогда проекция V в точку задает отображение

$$H^*(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\mathrm{Gal}(k(V/G), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),$$

где $k(V/G)$ – поле функций фактора, а Gal – его группа Галуа, причем оказывается – это обнаружил в свое время Богомолов – что если V достаточно велико, а именно, если действие G на V свободно в общей точке, то образ отображения не зависит от V (хотя зависит от k). Этот образ и называется стабильными когомологиями. В некотором смысле, это та часть когомологий G , которые проявляются как когомологии Галуа многообразий над k .

Большой интерес к стабильным когомологиям обуславливается прежде всего важностью когомологий Галуа, которые таким образом можно непосредственно “пощупать” в конкретных примерах. При этом про когомологии Галуа мы теперь знаем уже довольно много, прежде всего благодаря гипотезе Блоха-Като-Милнора, доказанной В. Воеводским и М. Ростом – что дает возможность вычислять когомологии Галуа с помощью алгебраической K -теории Милнора. Поэтому возникает возможность сравнить поведение всех когомологий Галуа и той их части, которая видна как стабильные когомологии конечных групп, в конкретных ключевых примерах.

Работа Богомолова, Пирутки и Боннинга посвящена именно такому сравнению. В качестве G берется так называемая “экстраспециальная” группа порядка p^{1+m} , где m – положительное целое число. Такая группа по определению имеет центр $Z(G) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а фактор $G/Z(G)$ есть элементарная абелева группа $E = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$, т.е. G включается в короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow Z(G) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow 1,$$

и является простейшей неабелевой конечной группой. Легко видеть, что т.к. $Z(G)$ должно быть не больше, чем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, то число m должно быть четным, а коцикл расширения должен задавать невырожденную симлектическую форму на E , причем известно, что для каждого p и четного положительного m , экстраспециальные группы существуют

(на самом деле, с точностью до изоморфизма их ровно две, группа Гейзенберга и еще одна).

Для любой экстраспециальной группы G , структурное отображение $G \rightarrow E$ индуцирует отображение алгебр когомологий

$$H^*(E, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^*(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),$$

известное как отображение инфляции, и легко видеть – это сразу следует из спектральной последовательности Хохшильда-Серра – что ядро этого отображения есть в точности идеал, порожденный классом расширения (который лежит в $H^2(E, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$).

Более того, можно изучить аналогичный вопрос для группы Галуа $\Gamma = \text{Gal}(k(V/G))$, с абелевым фактором $\Gamma^a = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ и его первым нетривиальным расширением $\Gamma^c = \Gamma/[\Gamma, [\Gamma, \Gamma]]$, и рассмотреть отображение инфляции $H^*(\Gamma^a, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\Gamma^c, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Тогда из гипотезы Блоха-Като-Милнора следует, что его ядро порождено своей компонентой когомологической степени 2. Тем самым, возникает вопрос – верно ли аналогичное утверждение для стабильных когомологий экстраспециальных конечных групп?

Богомоловым, Боннингом и Пируткой вопрос был полностью изучен, и обнаружено следующее.

- Если характеристика коэффициентов достаточно велика – а именно, если $p > m$ – то утверждение по-прежнему верно;
- Однако в общем случае оно неверно, даже для основного поля k характеристики 0. Конкретный контрпример был построен для $p = 2$, но по-видимому, теми же методами можно построить и примеры для любого p .

Тем самым, было найдено существенное различие между поведением стабильных когомологий на конечном уровне, и при переходе к пределу, когда они превращаются в когомологии Галуа.

2.3 Группа Торелли и дзета-значения

В отчетный период, сотрудник Лаборатории Н. Маркарян проводил исследования по двум связанным между собой направлениям.

Во-первых, были разработаны подходы к применению открытых ранее Маркаряном 3-алгебр Вейля к изучению группы Торелли. Очень заманчиво было бы этими методами воспроизвести результаты R. Naima о структуре этой группы. До сих пор известно только одно доказательство этих результатов, полученное самим Наймом и использующее смешанные структуры Ходжа нетривиальным образом. Помимо этого, можно надеяться, что подход Маркаряна позволит внести ясность в старую проблему описания образа алгебры Ли проунипотентного пополнения группы Торелли в алгебре Ли симплектических дифференцирований свободной алгебры Ли, введенной Концевичем. Например, пока совершенно непонятен смысл коскобки Тураева в этом контек-

сте. Насколько известно, связь между когомологиями группы Торелли и инвариантами трехмерных многообразий до последнего времени была мало изучена и технически сложноописуема. Применение же алгебр Вейля делает эту связь почти тавтологической. Таким образом, одно преимущество такого подхода налицо. Можно надеяться, что дальнейшее развитие этих идей принесет другие не менее ценные плоды.

Во-вторых, было продолжено изучение кратных дзета значений. Как известно, они являются коэффициентами стандартного ассоциатора Дринфельда. Геометрическое значение соотношений между ними можно и нужно понимать в терминах ассоциатора. Известно два семейства соотношений на них, и важная гипотеза утверждает, что они эквивалентны. Первое семейство это соотношение на ассоциатор, выписанные самим Дринфельдом, самое важное из которых это пентагональное соотношение. Второе семейство соотношений это двойные шаффл соотношения. Как показал G. Racinet в своей диссертации, эти соотношения можно записать в виде требования на примитивность некоторого элемента в некоторой алгебре Хопфа. В работе P. Deligne и T. Terasoma анонсированной на ICM'06, но так и не опубликованной, разрабатывался подход к геометрической конструкции этой алгебры Хопфа, а именно геометрически строилась тензорная категория ей соответствующая. Маркарян предлагает следующую интерпретацию этой работы. На ассоциатор Дринфельда можно смотреть как на проунипотентную деформацию стандартного пути из 0 в 1 на аффинной комплексной прямой без 0 и 1. Пентагональное соотношение тогда можно интерпретировать как условие на то, что это путь не самопересекается. Известен другой подход к условию несамопересекаемости кривой, при помощи коскобки Тураева. Если кривая не имеет сампересечений, она примитивна относительно коскобки Тураева, обратное, вообще говоря не верно. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что коскобка Racinet-Deligne-Terasoma это по сути правильно понятая коскобка Тураева. Таким образом, из вышеупомянутого критерия несамопересекаемости кривой следует, что соотношения ассоциатора влекут двойные шаффл соотношения. Этот факт хорошо известен и доказан разными способами. Можно надеяться, что развитие методов Маркаряна позволит развить подходы к доказательству обратной импликации и лучше понять (само)пересечения кривых на поверхности в контексте алгебраической геометрии.

2.4 n -оидальные ∞ -категории

В отчетный период, стажером Лаборатории Г. Кондыревым была построена теория n -оидальных ∞ -категорий, которая является обобщением теории E_n -моноидальных категорий и описывает ∞ -категорию с n моноидальными структурами, которые являются лакс согласованными друг с другом. Была определена категория n -алгебр в n -оидальной ∞ -категории, категория n -модулей над n -алгеброй, а так же доказаны различные свойства этих категорий. Было показано, что категория n -модулей над n -алгеброй в n -оидальной ∞ -категории контролирует теорию деформаций n -алгебры, а так же построен аналог кокасательного комплекса для n -алгебры.

Была также построена теория виртуальных n - ∞ -алгеброидов, и с ее помощью было построено несколько новых моделей для обогащенных (∞, n) -категорий, включая описание обогащенных (∞, n) -категорий как n -алгебр в некоторой n -оидальной ∞ -категории, построенной по категории соответствий. С помощью этого была предъявлена конструкция категории n -модулей над обогащенной (∞, n) -категорией, являющаяся обобщением категории $\mathbb{E}_n$ -модулей над $\mathbb{E}_n$ -алгеброй. Было доказано, что эта категория контролирует теорию деформаций исходной обогащенной (∞, n) -категории. Был определен кокасательный комплекс для обогащенной (∞, n) -категории, доказаны его фундаментальные свойства, а так же показано, как его получить с помощью формальных задач модулей.

Помимо этого, совместно с К. Магидсоном и А. Приходько было разработано понятие 2-теории Ловера, и с помощью этого понятия была построена теория симплициальных моноидальных ∞ -категорий, позволяющая удобно и эффективно работать с дополнительными структурами, имеющимися на категории модулей над коммутативным симплициальным кольцом, рассмотренным как $\mathbb{E}_\infty$ -кольцевой спектр. С помощью этого была доказана соответствующая теорема о Таннакиевой реконструкции. Кроме этого, была показано, как получить структуру симплициальной моноидальной ∞ -категории на категории инд-когерентных пучков от достаточно хорошей производной схемы.

2.5 Специальные унитарные кобордизмы

Теория (ко)бордизмов была объектом активного исследования в 1950–1960х годах. Ведущие топологи того времени принимали участие в изучении колец бордизмов. Впервые идея бордизма была сформулирована Понтрягиным, который основываясь на концепте трансверсальности связал теорию оснащённых бордизмов со стабильными гомотопическими группами сфер. Ключевые результаты теории бордизмов были получены в работах Рохлина, Тома, Новикова, Уолла, Авербуха, Милнора, Атия.

Появление в конце 1950х годов спектральной последовательности Адамса дало новый виток изучению теории бордизмов, кульминацией которого стало вычисление кольца комплексных бордизмов $\pi_*(MU)$ Милнором и Новиковым. В своих работах они показали, что $\pi_*(MU)$ изоморфно кольцо многочленов $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$, $\deg x_i = 2i$ с одной образующей в каждой чётной размерности. (Позже Квиллен показал, что схожесть с кольцом Лазара тут неспроста.)

В работе 1967 года Новиковым был предложен совершенно новый подход к теории кобордизмов и стабильной теории гомотопий, основанный на спектральной последовательности Адамса-Новикова и технике формальных групп. Этот подход в дальнейшем перерос в теорию кобордизмов с особенностями в работах Миронова, Ботвинника и Вершинина. Спектральная последовательность Адамса-Новикова стала на долгие годы основным инструментом для вычисления стабильных гомотопических групп сфер.

В качестве иллюстрации подхода Новиков дал полное описание аддитивного кручения и мультипликативной структуры кольца SU -бордизмов $\pi_*(MSU)$, которое подвело итог предыдущим геометрическим вычислениям. Полное описание кольца SU -

бордизмов существенно опирается на вычисление $\pi_*(MSU)$ с обращённой двойкой, а именно на изоморфизм колец $\pi_*(MSU) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][y_1, y_2, \dots]$, $\deg y_i = 2i$. Этот изоморфизм впервые появился в работе Новикова 1962 года лишь с наброском доказательства, который утверждал, что он может быть доказан с помощью спектральной последовательности Адамса аналогично вычислению Новикова кольца комплексных бордизмов $\pi_*(MU)$. Несмотря на то, что этот результат считался известным с 1960х, его полное доказательство отсутствовало в литературе.

В отчетный период, стажером Лаборатории С. Абрамяном было дано полное доказательство изоморфизма выше основанное на оригинальных методах спектральной последовательности Адамса. Восполняя детали в доказательстве Новикова, Абрамян столкнулись с техническими проблемами, которые были неизвестны до сих пор. Им было дано описание гомологий $H_*(MSU; \mathbb{F}_p)$ как комодуля над двойственной алгеброй Стиррода $\mathfrak{A}_p^*$ для нечётного простого p . А именно, было доказано, что гомологии $H_*(MSU; \mathbb{F}_p)$ — свободный комодуль над фактор алгеброй $(\mathfrak{A}_p/(\beta))^*$, где β — гомоморфизм Бокштейна. Также был описан гомоморфизм Гуревича $\pi_*(MSU) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rightarrow H_*(MSU; \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$: образующие в размерностях отличных от $2p^t$ и $2(p^t - 1)$ переходят в соответствующие образующие, оставшиеся домножаются на p .

2.6 Двойственные комплексы

В ходе работы стажера Лаборатории Л. Суханова, было продолжено исследование сглаживаний поверхностей с нормальными пересечениями с односвязным двойственным комплексом. Напомним, что многообразие с нормальными пересечениями это многообразие X , локально-аналитически (или, что эквивалентно, локально-этакно) представимая как открытая подмножество координатного креста в $\mathbb{C}^{d+1}$. Поверхность называется имеющей простые нормальные пересечения (simple normal crossing), если кроме этого все её неприводимые компоненты гладки, и строго простые нормальные пересечения (strictly simple normal crossing) если многократные пересечения компонент связны.

Для SNC поверхностей существует широко известное понятие двойственного комплекса - а именно, его вершинам $\{1, \dots, n\}$ соответствуют неприводимые компоненты $X_1, \dots, X_n$, а симплексам - связные компоненты их пересечений. Для SSNC выполнено дополнительное условие, гарантирующее что любые два симплекса пересекаются по грани или по пустому подмножеству.

Сухановым было сформулировано условие, при котором можно определить двойственный комплекс и для нормальных пересечений - “условие неперепутывания ветвей” (no branch-switching condition). А именно, рассмотрим стратификацию $Z_k = \text{Sing}(Z_{k-1})$, $Z_0 = X$, и рассмотрим какую-нибудь неприводимую компоненту K страта Z_k . Тогда условие неперепутывания ветвей утверждает, что проходящие через неё аналитические ветви Z_0 не должны иметь монодромии. В таких предположениях определен двойственный комплекс, технические детали см. в [38].

Также Сухановым было доказано, что многие стандартные результаты про двойственные комплексы обобщаются на этот случай. В частности, результаты Шмида и Стинбринка о связи смешанной структуры Ходжа на логарифмических когомологиях центрального слоя вырождения с когомологиями двойственного комплекса могут быть обобщены на данный случай дословно.

Следующее утверждение пока что имеет статус гипотезы, однако скорее всего верно (требует детальной проверки аргумент из доказательства теоремы о полустабильной редукции Мамфорда-Кемпфа-Кнудсена-Сен Доната):

Гипотеза 2.1. Для любого гладкого семейства с центральным слоем с нормальными пересечениями и неперепутывающимися ветвями после замены базы существует разрешение с гомеоморфным двойственным комплексом и слоем SSNC.

После того как данное утверждение будет доказано, большую часть утверждений о топологии двойственного комплекса, доказанных в SSNC предположениях, можно будет применять напрямую.

Кроме этого, Сухановым был изучен вопрос о вычислении фундаментальной группы близкого слоя. Для семейства с центральным слоем с нормальными пересечениями была доказана следующая теорема:

Теорема 2.1. Пусть дуальный комплекс центрального слоя стягиваем, а фундаментальные группы компонент $G_i = \pi_1(X_i \setminus \text{Sing}(X))$ абелевы. Обозначим за $q_{ij} \in G_i$ маленький ориентированный цикл обходящий вокруг $X_i \cap X_j$ в компоненте X_i . Тогда фундаментальная группа центрального слоя также абелева, и вычисляется как фактор $\prod_i G_i$ по следующим соотношениям: $q_{ij} = q_{ji}$.

Данная теорема была применена для рассматриваемого в статье [38] примера, и позволила доказать односвязность общего слоя.

Наконец, для основного примера работы [38] было пересмотрено доказательство зануления $H^2(X, T_X \log)$, и приведен новый, более прямой вычислительный аргумент.

2.7 Аддитивные инварианты и K -теория

Работа стажера Лаборатории Андрея Коновалова преимущественно относится к области некоммутативной алгебраической геометрии. Объекты изучения – (идемпотентно-полные) k -линейные стабильные ∞ -категории или, эквивалентно, k -dg-категории с точностью до Морита-эквивалентности, и их инварианты. Чтобы описать k -dg-категорию, достаточно задать множество объектов, сопоставить комплекс k -модулей каждой паре объектов и объяснить, как компонировать морфизмы. Например, производная категория (квази)когерентных пучков на алгебраическом многообразии может быть оснащена структурой dg-категории, и название “некоммутативная алгебраическая геометрия” приходит из интуиции – получившей конкретную реализацию в работах Бондала, Концевича, Орлова, Каваматы, Тоэна, Каледина, Ван ден Берга, Табуады,

Кузнецова, и многих других – что dg-категории, даже не приходящие из геометрии, во многом ведут себя как многообразия (или их производные категории). В то же время, самые разные области доставляют примеры dg-категорий: производные категории представлений колчанов и алгебраических групп, производные категории ассоциативных алгебр и dg-алгебр, категории особенностей и матричных факторизаций, категории Фукая и (partially) wrapped категории Фукая, производные категории производных стеков, ∞ -локальные системы со значениями в некоторой dg-категории и, если разрешить k быть E_∞ -кольцом вместо классического, модули над произвольным E_1 -кольцом, в частности, стабильная гомотопическая категория. В каждом из этих случаев, dg-категория содержит большое количество информации об объекте, по которому она построена; при этом, во-первых, содержательная часть теории может быть развита для всех dg-категорий одновременно, во-вторых, нередко, dg-категории, приходящие из разных областей, оказываются связаны, что позволяет переносить структурные результаты и вычисления из одной области в другую.

Вышеупомянутая геометрическая интуиция предлагает несколько типов вопросов. Один из них: возможно ли восстановить свойства или инварианты схемы по её производной категории (скажем, совершенных комплексов)? И если да, то другой вопрос: возможно ли обобщить эти свойства/инварианты на все dg-категории? Оказывается, что нередко ответ на оба вопроса – да: например, понятия гладкости/собственности могут быть обобщены на некоммутативный контекст так, что dg-категория совершенных комплексов на qcqs схеме гладка/собственна, если и только если это верно для схемы.

Для работы Андрея важно, что в случае k поля характеристики 0 когомологии де Рама многообразия также имеют некоммутативный аналог – периодические циклические когомологии. Это (Морита-инвариантный) локализирующий функтор из k -dg-категорий в комплексы k -векторных пространств, совпадающий с 2-периодизацией комплекса де Рама при ограничении на производные категории гладких собственных многообразий. Когда $k = \mathbb{C}$, когомологии де Рама несут несколько дополнительных структур – что позволяет гораздо лучше чувствовать геометрию и служит предпосылкой для развития теории Ходжа. В статье Кацаркова-Концевича-Пантева 2008 года, авторы предлагают несколько гипотез, связанных с продолжением теории Ходжа в некоммутативный сеттинг, например, гипотезу о существовании рациональной структуры на периодических циклических гомологиях, то есть функтора $F : dgCat_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{Q} - Mod$ вместе с естественным преобразованием $F \rightarrow \mathbf{HP}(\cdot/\mathbb{C})$, таким что для гладкой собственной $\mathbb{C}$ -dg-категории T индуцированный морфизм $F(T) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{HP}(T/\mathbb{C})$ – эквивалентность. В коммутативном случае рациональная/целочисленная структура даёт дополнительную жёсткость при изучении вариаций структур Ходжа в семействах многообразий; также она используется для определения промежуточного якобиана и для того чтобы получить функториальное разложение Ходжа (для последнего хватает вещественной структуры согласованной с фильтрацией Ходжа).

В диссертации Э. Бланка был предложен кандидат на роль гипотетической цело-

численной структуры в некоммутативном случае, названный топологической К-теорией dg-категорий, – вместе с факторизацией

$$K \longrightarrow K^{\text{top}} \xrightarrow{Ch^{\text{top}}} HP$$

алгебраического отображения следа

$$K \longrightarrow HC^- \longrightarrow HP.$$

Также был построен более тонкий инвариант – полутопологическая К-теория, обобщающая свой коммутативный аналог, развитый в работах Фридландера-Волкера.

Стажером Лаборатории Андреем Коноваловым были изучены свойства топологической и полутопологической К-теории dg-категорий, определённых Э. Бланком. В частности, был доказан следующий результат, обеспечивающий существование целочисленной структуры в ряде важных примеров:

Теорема 2.1. Пусть $LC \subset dgCat_{\mathbb{C}}$ – класс тех dg-категорий, для которых естественное преобразование $Ch^{\text{top}} : K^{\text{top}}(T) \otimes \mathbb{C} \rightarrow HP(T/\mathbb{C})$ – эквивалентность. Тогда LC содержит следующие классы dg-категорий:

а) $T = HP(B)$, где B – связная dg-алгебра, такая что $N_0 B$ – нильпотентное расширение коммутативной $\mathbb{C}$ -алгебры конечного типа (этот класс содержит все собственные связные $\mathbb{C}$ -dg-алгебры);

б) $T = \text{Loc}(M, \mathbb{C})^{\omega}$, где M – связное локально стягиваемое топологическое пространство, удовлетворяющее определённому условию (*) на фундаментальную группу, и $\text{Loc}(M, \mathbb{C})$ обозначает dg-категорию локальных систем комплексов на M ;

с) $T = HP(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – производная $\mathbb{C}$ -схема, такая что её классическое обрезание – отделимая схема конечного типа.

LC удовлетворяет свойству “2 из 3” в точных тройках dg-категорий и замкнут относительно Морита-эквивалентностей и ретрактов.

Отметим, что в случае б) локальных систем наложение некоторого условия на фундаментальную группу необходимо, поскольку, как несложно проверить, когда $\pi_1 M \simeq \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, Ch^{top} не эквивалентность. Тем не менее, если группа удовлетворяет гипотезе Бургелеа и слабой гипотезе Фаррелла-Джонса (для рациональной гомотопической К-теории $\mathbb{C}$ -алгебр), то она удовлетворяет (*). В частности, это выполнено для гиперболических групп, конечномерных $SAT(0)$ -групп и фундаментальных групп компактных многообразий размерности ≤ 3 . Андреем также была предложена стратегия, которая потенциально может дать контрпример к гипотезе Фаррелла-Джонса.

Топологическая К-теория dg-категорий определяется при помощи функтора топологической реализации, обобщающего функтор взятия комплексных точек с аналитической топологией с (отделимых конечного типа) схем на произвольные инварианты схем со значениями в спектрах. Для доказательства теоремы выше Андреем было изучено поведение функтора реализации на инвариантах типа различных версий циклических гомотопий и доказан следующий результат о нильинвариантности.

Теорема 2.2. Пусть $v : B \rightarrow A$ – морфизм связных $\mathbb{C}$ -dg-algebras, такой что $\pi_0 v$ – сюръективный с нильпотентным ядром. Тогда индуцированное отображение $K^{\text{st}}(B) \rightarrow K^{\text{st}}(A)$ – эквивалентность.

По теореме E статьи Лэнда-Тамме “On the K-theory of pullbacks” из этого свойства нильинвариантности, в частности, следует, что K^{st} удовлетворяет cdh-спуску как предпучок на квазикompактных квазиотделимых схемах. Это позволяет использовать разрешение особенностей для вычислений K^{st} -групп особых многообразий. Удаётся получить разумный ответ, как минимум, для кривых и поверхностей, и ожидается, что отрицательные полутопологические K-группы могут быть полезны для изучения особенностей в больших размерностях.

В недавней статье Элманто-Соснило “On nilpotent extensions of ∞ -categories and the cyclotomic trace” авторы обобщили понятие нильрасширения на стабильные ∞ -категории с весовой структурой, что позволило им применить Теорему 2.2 чтобы расширить класс c) до всех ANS производных стеков с гладким классическим локусом.

Одной из ключевых идей теории Ходжа является наличие некоторого контроля над структурами в вариациях структур Ходжа для семейств многообразий; например, в гладком собственном случае когомологии слоев дают расслоение с плоской связностью (Гаусса-Манина), согласованной с рациональной структурой, и разложения Ходжа слоёв удовлетворяют трансверсальности Гриффитса; в общем случае когомологии де Рама слоёв образуют D-модуль, чей образ при соответствии Римана-Гильберта изоморфен комплексификации извращённого пучка когомологий Бетти. Андрей работает над развитием аналогичной картины в некоммутативной ситуации. В частности, он разработал теорию относительной топологической K-теории (определённой Т. Моулиносом) и построил топологический характер Черна в относительной ситуации. Это важно, например, для того, чтобы придать смысл некоммутативной вариационной гипотезе Ходжа, сформулированной в А. Пеппи “The integral Hodge conjecture for two-dimensional Calabi-Yau categories” для семейств dg-категорий “приходящих-из-геометрии”, без этого дополнительного предположения, которое означает, грубо говоря, что соответствующая “тотальная” dg-категория вкладывается в производную категорию тотального пространства некоторого семейства многообразий над той же базовой схемой полуортогональным слагаемым линейно по базе. Есть основания ожидать, что для гладких собственных семейств dg-категорий, топологический характер Черна будет отображением локальных систем, что, в случае связной базы, позволит выводить утверждения (например, о том, что топологический характер Черна задаёт рациональную структуру) для произвольного слоя из аналогичных утверждений для одного конкретного слоя.

2.8 Квантования и инварианты Розанского-Виттена

В работе аффилированного сотрудника Лаборатории Г. Папаянова изучалось отображение периодов для деформационного квантования голоморфно симплектических многообразий. Голоморфно симплектическое многообразие — это гладкое ком-

лексное многообразие X , снабжённое невырожденной голоморфной 2-формой ω . Квантование X это пучок ассоциативных $\mathbb{C}[[h]]$ -алгебр $\mathcal{O}_h$, локально изоморфный $\mathcal{O}_X[[h]]$ как пучок $\mathcal{O}_X$ -модулей, снабжённый изоморфизмом $r : \mathcal{O}_h/h \rightarrow \mathcal{O}_X$, такой, что для любых двух локальных сечений r верно, что

$$fg - gf = h\omega(df, dg)(\text{mod } h^2).$$

Два квантования $\mathcal{O}_h^1$ и $\mathcal{O}_h^2$ называются эквивалентными, если между ними существует $\mathbb{C}[[h]]$ -линейный изоморфизм пучков алгебр. Таким образом, каждому голоморфно симплектическому многообразию X можно сопоставить множество $Q(X)$ квантований X с точностью до эквивалентности.

Отображение периодов, описанное в [44], и в алгебраическом случае в [41] является отображением множеств

$$Per : Q(X) \rightarrow H_{dR}^2(X)[[h]].$$

В вышеупомянутых работах доказано, что, при условии расщепления фильтрации Ходжа на когомологиях де Рама X , отображение Per является вложением. Встаёт естественный вопрос об описании образа этого вложения.

Вопрос представляется важным, поскольку аналогичный вопрос для коммутативных многообразий изучен достаточно хорошо. А именно, обозначим через $M(X)$ пространство модулей голоморфно симплектических структур на X . Тогда существует морфизм локальных аналитических пространств (точнее, формальных стеков)

$$P : M(X) \rightarrow H_{dR}^2(X),$$

сопоставляющий деформации (X_t, ω_t) класс когомологий $[\omega_t]$ в пространстве $H_{dR}^2(X_t) = H_{dR}^2(X)$. Хорошо известно ([39]), что в случае, когда X является компактным кэлеровым многообразием (как следствие, фильтрация Ходжа на $H_{dR}(X)$ расщепляется, образом P является так называемая квадрика Бовиля-Богомолова-Фуджики. Эта форма имеет большое значение в теории гиперкэлеровых многообразий.

Само существование морфизма P влечёт за собой нетривиальные последствия. Например, применив теорему Манетти о неявной функции для формальных стеков ([43]), можно получить гладкость $M(X)$. Это даёт ещё одно доказательство теоремы Богомолова-Тиана-Тодорова (подход, изложенный в [40] и [45]).

В работе Папаянова доказано, что множество $Q(X)$ на самом деле является множеством $\mathbb{C}[[h]]$ -точек некоторого формального стека $NDef(X)$. Более того, этот стек снабжён морфизмом

$$\tilde{P} : NDef(X) \rightarrow \Omega_{dR}^*(X)$$

, где $\Omega_{dR}^*(X)$ это формальное пополнение комплекса де Рама X в точке $[\omega]$, и отображение Per это отображение, индуцированное морфизмом $\tilde{P}$ на множестве $\mathbb{C}[[h]]$ -точек. Из расщепления фильтрации Ходжа на X следует, что морфизм $\tilde{P}$ индуцирует вложение на касательных пространствах. Таким образом, результаты Каледина-Безрукавникова и Неста-Цыгана встроены в общий контекст теории деформационных функторов, и получено их альтернативное доказательство, опять при помощи теоремы Манетти о неявной функции.

Более того, функториальное описание морфизма Per позволяет задать его явной формулой. Все формальные стеки, участвующие в его описании, естественным образом являются стеками Маурера-Картана некоторых (возможно, искривлённых) дифференциально градуированных алгебр Ли, заданных в дифференциально-геометрических терминах многообразия X . Именно, задача о нахождении квантований X интерпретируется как задача о специальном виде деформации L_∞ -структуры на $T_X[1]$, описанной Капрановым в [42] для построения инвариантов Розанского-Виттена. Эта интерпретация подтверждает связь между отображением периодов и инвариантами Розанского-Виттена, замеченную ранее в [44].

Для получения явной формулы морфизма Per вычислены минимальные модели дг-алгебр Ли, соответствующих формальным стекам. Доказательство варианта теоремы о гомотопическом трансфере, нужного для алгебр с кривизной, по-видимому, никем не опубликовано, поэтому этот вариант представляет самостоятельный интерес.

Стоит заметить, что, хотя методами Папаянова и можно получить явную формулу для отображения Per , эта формула пока что основана на соответствующей формуле для симплектических деформаций, и вычисляет поправки к ней, связанные с инвариантами Розанского-Виттена. Саму форму Богомолова-Бовиля-Фуджики такими методами пока вывести не удалось. Поиск такого вывода представляется важной задачей и может стать темой дальнейших исследований.

2.9 Деформации абелевых категорий

Теория деформаций, или же, как ее называют топологи, теория препятствий – одно из мощнейших технических средств современной абстрактной алгебры и алгебраической геометрии, некоторый аналог анализа в алгебре, позволяющий систематически приближать самые разные алгебраические структуры более простыми, и исследовать их свойства индукцией по порядку приближения – так же, как исследуют гладкие функции, разлагая их в ряд Тэйлора. Приближения первого порядка обычно называются “расширения с квадратом ноль” – терминология происходит из случая алгебр, ассоциативных или ассоциативных коммутативных, где в первом порядке возникают расширения с помощью идеала, операция умножения в котором тождественно равна нулю. Как

правило, каждой деформационной задаче сопоставляется некоторый кохомологический функтор; расширения с квадратом ноль отвечают классам кохомологий. Более того, если дана деформация порядка n , то возникает кохомологический класс “препятствия” к продолжению деформации дальше; продолжение до порядка $n + 1$ возможно тогда и только тогда, когда препятствие обращается в ноль, и в этом случае, продолжения также естественно параметризуются элементами соответствующей группы кохомологий. Тем самым, в каждом порядке теория деформаций линеаризует исходную задачу, обычно весьма нелинейную, и позволяет применять для ее изучения мощные вычислительные методы гомологической алгебры.

В контексте алгебраической геометрии, основным объектом изучения является категория, в том или ином смысле линейная (например, аддитивная или триангулированная), и снабженная тем или иным оснащением (например, DG-категория над фиксированным базовым полем, или стабильная ∞ -категория в смысле Лурье или Резка). Про такую категорию можно думать как про “алгебру с многими объектами”, и поэтому неудивительно, что теория деформаций для них похожа на теорию деформаций ассоциативных алгебр, и в некотором смысле обобщает ее. Кохомологический функтор, контролирующий деформации ассоциативной алгебры A – это функтор ее кохомологий Хохшильда $HH^*(A)$; классы деформаций лежат во вторых кохомологиях $HH^2(A)$, а препятствия – в третьих кохомологиях $HH^3(A)$. Обобщения кохомологий Хохшильда на DG-алгебры и DG-категории хорошо известно и построено в работах многих авторов, ставших уже классическими; весьма хороший и подробный обзор дан в докладе Б. Келлера на ICM 2006 года в Мадриде. Там же описаны возникающие здесь высшие структуры на комплексе Хохшильда, и соответствующая теория деформаций.

При этом в контексте приложений к алгебраической геометрии, релевантный объект изучения – производная категория когерентных пучков на алгебраическом многообразии – возникает двумя эквивалентными способами. С одной стороны, можно выбрать образующий в производной категории, который существует по теореме А. Бондала и М. Ван ден Берга, и тем самым, как показал Келлер, интерпретировать категорию как производную от DG-категории DG-модулей над DG-алгеброй эндоморфизмов этого образующего. С другой же стороны, можно вспомнить, что наша категория является производной от абелевой категории когерентных пучков, и сначала изучить эту абелеву категорию.

Теория деформаций абелевых категорий была построена уже довольно давно, прежде всего в работах аффилированного сотрудника Лаборатории В. Ловен, совместных с М. Ван ден Бергом. Однако эта теория в значительной степени повторяет стандартную теорию для алгебр, DG-алгебр и DG-категорий. В частности, кохомологии Хохшильда определяются с помощью некоторого обобщения стандартного хохшильдовского комплекса, основанного на бар-резольвенте, а класс деформации получается по сути той же формулой, что и в классической теории для расширений алгебр с квадратом ноль (придуманной в свое время самим Хохшильдом). При этом не учитываются неко-

торые специальные свойства ситуации абелевой категории, которые позволяют теорию в значительной степени обобщить и упростить. Упомянем два из них:

- Понятие абелевой категории – абсолютное, категория не обязана быть линейной ни над каким полем (и хотя она a posteriori линейна над кольцом $\mathbb{Z}$, рассматривать ее в таком виде неправильно, т.к. **Hom**-модули никогда не являются плоскими над этим кольцом). С практической точки зрения, даже для категорий, линейных над полем, крайне важны деформации “в смешанной характеристике”, которые ни над каким полем уже не линейны – простейший пример здесь это категория $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ -модулей, для какого-либо простого числа p , рассмотренная как расширение с квадратом ноль категории векторных пространств над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Хотелось бы иметь деформационный формализм, который позволяет учитывать и такие примеры, а для этого когомологий Хохшильда точно недостаточно;
- Когомологии Хохшильда абелевой категории $\mathcal{C}$ можно и нужно определять напрямую, без использования бар-резольвенты – а именно, как эндоморфизмы тождественного эндифунктора (“производный центр” категории в смысле И. Бернштейна). При этом класс расширения с квадратом ноль можно также написать прямо и совершенно естественно, из общих категорных соображений, не используя сведения к алгебрам и явные формулы.

Последнее замечание имеет странный статус – оно хорошо известно в фольклоре, и, по-видимому, переоткрывалось разными людьми много раз (в частности, оно приписывается В. Дринфельду), однако в литературе его до сих пор не было. Заведующий Лабораторией Д. Каледин также обнаружил эту конструкцию в ходе своей работы довольно давно. Вкратце, она такова.

Скажем, что абелева категория $\mathcal{C}'$ является расширением с квадратом ноль абелевой категории $\mathcal{C}$, если дано точное полное строгое вложение $\iota : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, причем каждый объект $\mathcal{C}'$ имеет фильтрацию длины 2, присоединенные градуированные факторы которой лежат в $\iota(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$. Удобно предположить – и это не сильно ограничивает общность – что ι имеет правый сопряженный функтор $\sigma : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$. Тогда $\sigma \circ \iota \cong \text{Id}$ – тождественный функтор в силу строгой полноты ι , отображение сопряжения $\iota(\sigma(A)) \rightarrow A$ инъективно для любого объекта $A \in \mathcal{C}'$, и мы имеем расширение с квадратом ноль тогда и только тогда, когда коядро этого отображения для любого A лежит в $\iota(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$. Отметим, что, по сопряженности, функтор σ точен слева; однако вообще говоря, он не точен, и имеет производные функторы $R^i\sigma$. Композиция $T = R^1\sigma \circ \iota : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ тогда будет точным слева эндифунктором категории $\mathcal{C}$, который в некотором смысле является касательным пространством к нашему расширению. Однако отметим теперь, что производные функторы – это не просто набор функторов, занумерованных положительными целыми числами; на самом деле, они являются гомологиями целого комплекса функторов из $\mathcal{C}'$ в $\mathcal{C}$. Поэтому, komponуя их с ι и беря каноническое обрезание комплекса в

степени 1, получаем естественную точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Id} \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

эндофункторов категории $\mathcal{C}$, которая определяет по Йонедэ некоторый когомологический класс в $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{Id}, T)$. Это и есть класс деформации, а группы $\mathrm{Ext}^*(\mathrm{Id}, T)$, в которых он лежит, следует воспринимать как когомологии Хохшильда $HH^*(\mathcal{C}, T)$ категории $\mathcal{C}$ с коэффекфициентами в T .

В текущий отчетный период, заведующий Лабораторией Д. Каледин, совместно с аффилированным сотрудником Лаборатории В. Ловен, в целом построил теорию расширений с квадратом ноль для абелевых категорий, основанную на этой конструкции (в настоящее время работа продолжается, т.к. пока не прояснены 2-категорные аспекты конструкции).

Построенная теория работает как в относительной, так и в абсолютной ситуации, и обладает рядом довольно неожиданных и интересных свойств. В частности, в относительной ситуации – т.е. над фиксированным полем k – естественной категорией эндофункторов является категория k -линейных точных слева эндофункторов (при надлежащих предположениях эта категория абелева в силу классической теоремы Габриэля-Попеску, что позволяет использовать в ней гомологическую алгебру). Естественно было бы ожидать, что абсолютной ситуации достаточно отбросить k -линейность. Однако оказывается, что надо отбросить также и аддитивность! Свойство точности слева при этом играет критическую роль во всей теории, и его необходимо оставить, однако в другой интерпретации: оно теперь возникает как свойство быть пучком по отношению к надлежащей топологии Гротендика на $\mathcal{C}$ (а именно, топологии, в которой покрытиями являются эпиморфизмы). При этом резольвенты в смысле гомологической алгебры отождествляются с помощью эквивалентности Дольда-Кана с гиперпокрытиями в смысле теории топологий Гротендика, а вычисление производных функторов и взятие ассоциированного пучка оказываются частями одной и той же конструкции.

Отметим, что переход к неаддитивным функторам необходим уже в простейших абсолютных примерах. Так, для описанного выше расширения $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ до $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, категория аддитивных эндофункторов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -векторных пространств по сути тривиальна, в частности полупроста, и никаких интересных когомологий Хохшильда там нет. Однако есть взять функторы – на самом деле, достаточно полиномиальных в смысле Фридландера-Суслина – то вместо когомологий Хохшильда мы получаем когомологии Маклейна. В частности, во вторых когомологиях имеется совершенно нетривиальный класс, который и отвечает расширению до $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Таким образом, чисто алгебраическая теория деформаций, развитая нами в абсолютном случае, оказывается тесно связанной с когомологиями и гомологиями Маклейна, который можно отождествить с топологическими гомологиями Хохшильда и изучать средствами алгебраической топологии. Такая открытая нами связь выглядит весьма интригующе, и несомненно заслуживает дальнейшего изучения.

3 Классическая геометрия

3.1 Рациональность факторов поверхностей Севери–Брауэра по конечным группам автоморфизмов

Пусть $\mathbb{k}$ — алгебраически незамкнутое поле, а X — алгебраическое многообразие над этим полем. Одним из наиболее интересных для изучения с разных точек зрения свойств многообразия X является его множество $\mathbb{k}$ -точек $X(\mathbb{k})$. С помощью исследования этого множества можно получить много информации о многообразии, а методы, используемые при этом, разнообразны, интересны и красивы.

Для некоторых многообразий множество $X(\mathbb{k})$ пусто, и такие многообразия представляют отдельный интерес. В частности, может оказаться, что над алгебраическим замыканием поля $\bar{\mathbb{k}}$ многообразие $\bar{X} = X \otimes \bar{\mathbb{k}}$ хорошо известно. В этом случае говорят, что X — $\mathbb{k}$ -форма многообразия $\bar{X}$. Одно и то же многообразие $\bar{X}$ может иметь различные $\mathbb{k}$ -формы, свойства которых значительно отличаются.

Например, d -мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^d$ является $\mathbb{k}$ -формой проективного пространства $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^d$, но помимо этого могут существовать и другие $\mathbb{k}$ -формы $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^d$. Многообразием Севери–Брауэра размерности d называется $\mathbb{k}$ -форма проективного пространства $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^d$. Если многообразие Севери–Брауэра изоморфно проективному пространству $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^d$, то говорят, что оно тривиально. Нетривиальные многообразия Севери–Брауэра обладают многими интересными свойствами. Например, для них множество $\mathbb{k}$ -точек пусто.

В отличие от проективных пространств над незамкнутыми полями, многообразия Севери–Брауэра исследованы не так хорошо, но это научное направление активно развивается. Наиболее хорошо изученными являются многообразия Севери–Брауэра размерности 1 — коники. Для любой коники C антиканоническая линейная система $|-K_C|$ задаёт вложение в проективную плоскость $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^2$, поэтому коники являются объектом исследования классической алгебраической геометрии с давних пор.

Одним из активно изучаемых свойств разнообразных алгебраических многообразий является группа автоморфизмов. В частности, для сложно устроенных групп автоморфизмов интерес представляют конечные подгруппы автоморфизмов. Для произвольной коники C каждая конечная группа автоморфизмов является конечной подгруппой в группе $\mathrm{PGL}_2(\bar{\mathbb{k}})$, а значит, является либо циклической группой, либо диэдральной группой, либо одной из групп A_4 , S_4 , A_5 . Однако в случае нетривиальных коник и некоторых ограничений на поле классификацию можно упростить. Например, если в поле есть корни любой степени из единицы, то любая конечная группа, действующая на этой конике, является либо группой порядка 2, либо абелевой нециклической группой порядка 4. Аналогичные ограничения возникают для многообразий Севери–Брауэра любой размерности. Впрочем, если не накладывать на поле $\mathbb{k}$ дополнительных условий, то для любой из вышеперечисленных конечных групп можно найти нетривиальную конику, на которой действует эта группа.

Помимо общего изучения конечных групп автоморфизмов также интересна проблема, как устроен фактор многообразия по конечной группе. Для коник хорошо известен следующий результат.

Теорема. Пусть C — нетривиальная коника над полем $\mathbb{k}$, а G — конечная группа автоморфизмов. Тогда фактор C/G является $\mathbb{k}$ -рациональным тогда и только тогда, когда порядок G чётный. Иначе фактор C/G изоморфен конике C .

Поверхности Севери–Брауэра (то есть двумерные многообразия Севери–Брауэра) изучены не так хорошо, как коники. Однако и для них сотрудником Лаборатории Константином Шрамовым в прошлом году получено описание конечных групп, которые могут действовать на такой поверхности (см. [46, Theorem 1.3(ii)]). В частности, на таких нетривиальных поверхностях не могут действовать элементы чётного порядка и элементы простого порядка вида $6k + 5$. В результате этого получается довольно небольшой список групп.

Кроме того, оказывается, что для нетривиальных поверхностей Севери–Брауэра верно утверждение про факторы по конечным группам, аналогичное соответствующему утверждению для нетривиальных коник. В этом году в статье [47] сотрудников Лаборатории А. Трепалиным доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть S — нетривиальная поверхность Севери–Брауэра над полем $\mathbb{k}$, а G — конечная группа автоморфизмов. Тогда фактор S/G является $\mathbb{k}$ -рациональным тогда и только тогда, когда порядок G делится на 3. Иначе фактор S/G бирационально эквивалентен поверхности Севери–Брауэра S .

Используемые в статьях [46] и [47] методы позволяют полагать, что полученные результаты допускают обобщения в высшие размерности. В частности, на случай $(p - 1)$ -мерных многообразий Севери–Брауэра, где p — простое число. В этом случае возникают значительные ограничения на порядки элементов, которые могут действовать на нетривиальном многообразии Севери–Брауэра, однако вопрос о том, является ли фактор многообразия Севери–Брауэра по конечной группе автоморфизмов бирационально эквивалентным исходному многообразию связан с гипотезой Амицура.

3.2 Непроективные малые разрешения

Рассмотрим трехмерное проективное многообразие над $\mathbb{C}$ с изолированной особенностью типа A_1 (она же простейшая квадратичная особенность, она же node). При ее однократном раздутии эта особенность разрешается, и получившееся многообразие, естественно, также является проективным. Если, однако, вместо раздутия, при котором на место особой точки вклеивается двумерная квадрака, применить так называемое малое разрешение, когда на место особой точки вклеивается $\mathbb{P}^1$, то во многих известных примерах оказывается, что получающееся многообразие проективным быть перестает, и принято считать, что нарушение проективности при малом разрешении — скорее правило, чем исключение. В поддержку этого мнения сотрудниками Лаборатории было

построено большое семейство проективных трехмерных многообразий с единственной особенностью типа A_1 , малое разрешение которой проективным многообразием не является. Вот формулировка основных результатов.

Предложение 1. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкое четырехмерное проективное многообразие над $\mathbb{C}$, для которого $H^0(X, \omega_X(1)) \neq 0$, где ω_X — канонический пучок. Тогда общее особое гиперплоское сечение $Y_0 \subset X$ имеет ровно одну особую точку $a \in Y_0$, эта точка имеет тип A_1 , и малое разрешение этой особенности проективным многообразием не является.

Следствие. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — произвольное гладкое четырехмерное проективное многообразие над $\mathbb{C}$. Тогда существует такое натуральное число m_0 , что при всех $m \geq m_0$ общее особое пересечение X с гиперповерхностью степени m имеет ровно одну особую точку, эта особая точка имеет тип A_1 и ее малое разрешение не может быть проективным многообразием.

Предложение 1 вытекает из следующего более сильного результата, для формулировки которого нам понадобится одно определение из SGA7.

Именно, пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкое проективное многообразие над $\mathbb{C}$. Мы будем говорить, что для многообразия X выполнено условие (A), если либо $X^* \subset (\mathbb{P}^n)^*$ — не гиперповерхность, либо X^* гиперповерхностью является, но гомоморфизм ограничения $H^{d-1}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{d-1}(Y, \mathbb{Q})$, где $d = \dim X$ и $Y \subset X$ — какое-то (или, что равносильно, любое) гладкое гиперплоское сечение, не является сюръективным (инъективным этот гомоморфизм является всегда — по теореме Лефшеца о гиперплоском сечении). Если X^* — гиперповерхность, то условие (A) может нарушаться только если размерность X четная.

Имея все это в виду, сформулируем обещанный более сильный результат.

Предложение. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкое четырехмерное проективное многообразие над $\mathbb{C}$, для которого $X^* \subset (\mathbb{P}^n)^*$ — гиперповерхность.

Если условие (A) выполняется для X , то общее особое гиперплоское сечение $Y_0 \subset X$ имеет ровно одну особую точку $a \in Y_0$, эта особая точка имеет тип A_1 и малые разрешения этой особенности не могут быть проективными многообразиями.

Если условие (A) выполняется для X и то общее особое гиперплоское сечение $Y_0 \subset X$ имеет ровно одну особую точку $a \in Y_0$, эта особая точка имеет тип A_1 и для Y_0 существует малое разрешение в категории проективных многообразий.

Принято считать (см. [49, Exposé XVIII, 5.3.5]), что для “большинства” многообразий четной размерности условие (A) выполнено. В размерности 2 это подтверждается результатом Зака [51] (в этой работе перечислены все поверхности, для которых условие (A) не выполнено), но уже в размерности 4 соответствующей классификации пока нет.

Скажем несколько слов о доказательствах этих результатов. Пусть W — трехмерное проективное многообразие с единственной особой точкой a , и пусть эта особая точка имеет тип A_1 . Пусть $\tilde{W}$ — раздутие многообразия W в точке a , и пусть $Q \subset \tilde{W}$ — прообраз точки a при этом раздутии (поверхность Q изоморфна гладкой двумерной квадрике). Обозначим через $i: Q \hookrightarrow \tilde{W}$ естественное вложение и через $i_*: H_2(Q) \rightarrow H_2(\tilde{W})$ — индуцированный им гомоморфизм в гомологиях с рациональными коэффициентами. Тогда выполняется одно из двух: либо $\text{rank } i_* = 1$ и $b_2(W) = b_4(W)$, либо $\text{rank } i_* = 2$ и $b_2(W) = b_4(W) - 1$. Это утверждение несложно выводится из гомологической последовательности пары $(\tilde{W}, Q)$, где через b_i обозначено i -е число Бетти. (Отметим, что условие $b_2(W) = b_4(W)$ в контексте малых разрешений рассматривалось Чельцовым в работе [48].)

Далее показывается, что если, в прежних обозначениях, $\text{rank } i_* = 1$, то у точки a малого разрешения в категории проективных многообразий нет, а если $\text{rank } i_* = 2$, то, напротив, проективное малое разрешение существует. Доказательства этих утверждений проводятся более или менее стандартными методами (для доказательства существования проективного малого разрешения строится экстремальный луч, стягивающий одно из семейств прямолинейных образующих на квадрике, получаемой в результате раздутия особой точки).

Теперь, чтобы доказать предложение 2, включим гиперплоское сечение Y_0 в пучок Лефшеца. Если двойственное к многообразию X является гиперповерхностью, то условие (A) нарушается в том и только том случае, когда группа монодромии, действующая на $H^3(Y, \mathbb{Q})$, где $Y \subset X$ — гладкое гиперплоское сечение, является тривиальной. Поскольку группа монодромии порождена псевдоотражениями от исчезающих циклов, а все исчезающие циклы сопряжены, это последнее условие равносильно тому, что исчезающий цикл в гладком гиперплоском сечении $Y \subset X$, близком к Y_0 , гомологичен нулю. Исчезающий цикл может быть реализован подмножеством $S \subset Y$, гомеоморфным трехмерной сфере, и особое гиперплоское сечение Y_0 гомеоморфно Y/S — пространству, полученному из Y стягиванием S в точку. Рассмотрим теперь следующие два фрагмента точной последовательности пары (Y, S) :

$$H_2(S, \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(Y_0, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Q}), \quad (3.2.1)$$

$$H_4(S, \mathbb{Q}) \rightarrow H_4(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H_4(Y_0, \mathbb{Q}) \rightarrow H_3(S, \mathbb{Q}) \xrightarrow{j_*} H_3(Y, \mathbb{Q}) \quad (3.2.2)$$

(здесь $j: S \rightarrow Y$ — естественное вложение). Из (3.2.1) следует, что $b_2(Y) = b_2(Y_0)$, а из (3.2.2) и двойственности Пуанкаре следует, что $b_4(Y_0) = b_2(Y_0)$, если условие (A) выполнено и что $b_4(Y_0) = b_2(Y_0) + 1$, если условие (A) не выполнено. Теперь предложение 2 вытекает из замечаний выше.

Чтобы вывести предложение 1 из предложения 2, достаточно воспользоваться предложением 6.1 из работы [50], из которого вытекает, что у многообразия X четной размерности, для которого $H^0(X, \omega_X(1)) \neq 0$, группа монодромии обязана быть нетривиальной, так что для такого многообразия условие (A) выполняется.

3.3 Конечные группы бирациональных автоморфизмов

Группы бирациональных автоморфизмов алгебраических многообразий могут иметь чрезвычайно сложную структуру. Даже их конечные подгруппы могут быть недоступны для классификации. Для того, чтобы исследовать конечные подгруппы в группах бирациональных автоморфизмов на качественном уровне, В. Л. Попов предложил следующее определение.

Определение. Группа Γ называется жордановой (в этом случае также говорят, что для Γ выполнено свойство Жордана), если существует такая константа $J = J(\Gamma)$, зависящая только от Γ , что любая конечная подгруппа в Γ содержит нормальную абелеву подгруппу индекса не больше J .

Классическая теорема К. Жордана, доказанная в 1878 году, утверждает, что свойством Жордана обладает группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, а следовательно, и любая аффинная алгебраическая группа над полем характеристики 0. Ж.-П. Серр в 2009 году доказал, что тем же свойством обладает группа Кремоны ранга 2, то есть группа бирациональных автоморфизмов проективной плоскости. Впоследствии В. Л. Попов классифицировал все поверхности, группы бирациональных автоморфизмов которых обладают свойством Жордана, а Ш. Менг и Д.-Ч. Жанг установили жордановость алгебраических групп и групп автоморфизмов всех проективных многообразий над полем характеристики 0.

Тем не менее, свойство Жордана не выполняется для групп автоморфизмов простейших многообразий над полями положительной характеристики. Например, оно не выполнено для группы автоморфизмов проективной прямой над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$. Чтобы работать с конечными подгруппами в таких группах, Ф. Ху предложил следующее определение.

Определение. Пусть p — простое число. Группа Γ называется p -жордановой, если такие существуют константы $J(\Gamma)$ и $e(\Gamma)$, зависящие только от Γ , что любая конечная подгруппа G в Γ содержит нормальную абелеву подгруппу, порядок которой взаимно прост с p , а индекс не превосходит $J(\Gamma) \cdot |G_p|^{e(\Gamma)}$, где G_p обозначает силовскую p -подгруппу в G .

Отметим, что любая жорданова группа является p -жордановой, но обратное неверно. Согласно теоремам Брауэра–Фейта и Ларсена–Пинка, группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ над полем $\mathbb{k}$ характеристики $p > 0$ является p -жордановой. Ф. Ху доказал, что это свойство также выполнено для произвольной алгебраической группы и для группы автоморфизмов любого проективного многообразия над $\mathbb{k}$.

В 2021 году сотрудник Лаборатории К. А. Шрамов совместно с И. Ченом заложили основы для изучения p -жордановых групп бирациональных автоморфизмов. В частности, они обобщили результат Ж.-П. Серра о группе Кремоны ранга 2 на случай полей положительной характеристики.

Теорема 3.1. Существует такая константа J , что для любого простого числа p и любого поля $\mathbb{k}$ характеристики p , любая конечная подгруппа G группы $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ содержит нормальную абелеву подгруппу, порядок которой взаимно прост с p , а индекс не превосходит $J \cdot |G_p|^3$, где G_p обозначает силовскую p -подгруппу в G . В частности, для любого поля $\mathbb{k}$ характеристики $p > 0$ группа $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ является p -жордановой.

Кроме того, было получено обобщение результатов В. Л. Попова и Ю. Г. Зархина о группах бирациональных автоморфизмов алгебраических поверхностей.

Теорема 3.2. Пусть $\mathbb{k}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$, а S — неприводимая алгебраическая поверхность над $\mathbb{k}$.

- (i) Если S бирациональна произведению $E \times \mathbb{P}^1$ для некоторой эллиптической кривой E , то группа $\mathrm{Bir}(S)$ не является p -жордановой;
- (ii) Если кодaira размерность поверхности S отрицательна, но S не бирациональна произведению $E \times \mathbb{P}^1$, где E — эллиптическая кривая, то группа $\mathrm{Bir}(S)$ является p -жордановой, но не жордановой в обычном смысле;
- (iii) Если кодaira размерность S неотрицательна, то группа $\mathrm{Bir}(S)$ жорданова.

Для доказательства теоремы 3.2 используется следующий вспомогательный результат, уточняющий теорему Ф. Ху в одном важном частном случае.

Предложение. Пусть $\mathbb{k}$ — произвольное поле. Пусть X — гладкое геометрически неприводимое проективное многообразие неотрицательной кодaira размерности над $\mathbb{k}$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ жорданова.

Следующая теорема обобщает более ранний результат сотрудников Лаборатории К. А. Шрамова и Ю. Г. Прохорова о группах автоморфизмов комплексных поверхностей нулевой кодaira размерности.

Предложение. Существует такая константа J , что для любого поля $\mathbb{k}$ и любой геометрически неприводимой алгебраической поверхности S кодaira размерности 0 над $\mathbb{k}$, любая конечная подгруппа в группе $\mathrm{Bir}(S)$ содержит нормальную абелеву подгруппу индекса не больше J .

Если X — многообразие, а P — точка на X , обозначим через $\mathrm{Aut}(X; P)$ стабилизатор точки P в группе $\mathrm{Aut}(X)$. Следующий результат также является обобщением более раннего результата К. А. Шрамова и Ю. Г. Прохорова о группах автоморфизмов комплексных поверхностей.

Предложение. Существует такая константа B , что для любого поля $\mathbb{k}$, любой гладкой геометрически неприводимой проективной поверхности S кодaira размерности 0 над $\mathbb{k}$, любой $\mathbb{k}$ -точки $P \in S$, и любой конечной подгруппы $G \subset \mathrm{Aut}(S; P)$ порядок G не превосходит B .

Отметим, что утверждение предложения 3.3 вообще говоря не выполняется для стабилизаторов замкнутых точек над не алгебраически замкнутыми полями. С другой стороны, оно допускает следующее частичное обобщение на многообразия произвольной размерности.

Теорема 3.3. Пусть $\mathbb{k}$ — поле, а X — гладкое геометрически неприводимое проективное многообразие неотрицательной кодаимовой размерности над $\mathbb{k}$. Тогда существует такая константа $B = B(X)$, что для любой замкнутой точки $P \in X$ и любой конечной подгруппы $G \subset \text{Aut}(X; P)$ порядок G не превосходит B .

3.4 Исследование групп автоморфизмов и бирациональной жёсткости многообразий Фано и приложения к исследованиям подгрупп группы Кремоны

Сотрудники Лаборатории продолжают изучать вопрос классификации рациональных многообразий Фано с действием конечной группы автоморфизмов, которые нельзя G -эквивариантно бирационально перестроить в другие G -многообразия Фано и расслоения Мори. Такие многообразия называются G -бирационально жёсткими. Одной из мотиваций для их изучения является классификация конечных подгрупп в трёхмерной группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{k})$, где $\mathbb{k}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. В случае размерности 1 эта группа устроена относительно просто, и ее конечные подгруппы хорошо известны. В случае размерности 2 она достаточно хорошо изучена, в частности, её конечные подгруппы описаны в работе И. Долгачева и В. Исковских [57]: для классификации этих подгрупп достаточно описать G -минимальные терминальные $G\mathbb{Q}$ -факториальные расслоения Мори и морфизмы между ними. В трёхмерном случае группа Кремоны очень сложна, и описание ее конечных подгрупп – один из немногих способов что-то понять про её структуру. Но даже с такой точки зрения имеется гигантское количество разных случаев, поэтому задача полной классификации конечных подгрупп выглядит неподъёмной. По этой причине логично ограничиться классификацией бирационально жёстких многообразий, которые дают уникальные подгруппы в группе Кремоны. Таким образом И. Чельцовым и К. Шрамовым были описаны несколько несопряженных вложений некоторых простых групп в группу Кремоны. Мы рассматриваем многообразия $G\mathbb{Q}$ -Фано с дополнительным условием: канонический класс делится на 2 в группе Пикара (такие многообразия называются G -многообразиями дель Пеццо). Ранее были классифицированы G -бирационально жесткие многообразия дель Пеццо степеней 3 и 4 такого типа, а также получена частичная классификация возможных многообразий дель Пеццо степени 2. В случае степени 4 оказалось, что G -бирационально жёсткими могут быть только 5 отдельных многообразий и одно однопараметрическое семейство. В случае степени 3 классификация устроена ещё проще – только два многообразия являются бирационально жёсткими относительно всей группы автоморфизмов. Для одного из них были классифицированы все подгруппы полной группы автоморфизмов, относительно которых многообразие является эквивариантно бирационально жёстким. Также была опубликована статья с классификацией бирационально жёстких многообразий дель Пеццо степени 2 с 15 обыкновенными двойными точками, оно оказалось ровно одно. В случае степени 1 известен полный ответ для многообразий с максимальным количеством особенностей, а также классифицированы возможные многообразия, имеющие более 15 особенностей.

В отчетный период продолжалось исследование многообразий дель Пеццо степени 2. Была полностью завершена классификация не $\mathbb{Q}$ -факториальных многообразий, имеющих только простейшие (нодальные) особенности, которые при этом имеют до-

статочно большую группу автоморфизмов, чтобы не иметь перестроек в более простые многообразия Фано (например, трехмерное проективное пространство или трёхмерную квадрику), и потенциально являющихся G -бirationально жёсткими. Были выписаны явные уравнения и вычислены группы автоморфизмов всех таких многообразий.

Теорема 3.4. Имеются следующие возможности для количества особенностей:

- 16 (в этом случае имеется трёхпараметрическое семейство возможных многообразий, а группа автоморфизмов имеет вид $C_2 \times C_2^4 \rtimes G$, где G – подгруппа S_6),
- 15 (в этом случае имеется ровно одно многообразие с группой автоморфизмов $S_5 \times C_2$),
- 12 (в этом случае имеется несколько принципиально разных с точки зрения геометрии случаев: в первом имеется однопараметрическое семейство многообразий с группой автоморфизмов $S_4 \times C_2$ или $S_4 \times C_2^2$, во втором также однопараметрическое семейство с группой автоморфизмов $S_4 \times C_2$, в третьем четыре однопараметрических семейства и четыре выделенных случая с довольно большим списком возможных групп автоморфизмов от A_4 до довольно сложной группы порядка 576),
- 10 (в этом случае имеется однопараметрическое семейство решений с группой автоморфизмов $S_4 \times C_2$),
- 8 (в этом случае имеется двухпараметрическое семейство решений с группой автоморфизмов $D_8 \times C_2^2$ и один выделенный случай с группой автоморфизмов $S_4 \times C_2^2$).

Соответствующая статья сейчас дописывается и будет подана в журнал до конца года.

Также изучались не $\mathbb{Q}$ -факториальные многообразия, имеющие особенности более сложные, чем нодальные. В некоторых случаях (а именно в случаях 18, 20, 21, 23, 24, 25 в терминах статьи [59]) удалось показать, что ненодальных многообразий с требуемыми свойствами не существует, а в случаях 16 и 19 имеются существенные продвижения, но окончательный ответ пока неизвестен. Планируется закончить эту работу в следующем году.

Для $\mathbb{Q}$ -факториальных многообразий имеется гипотеза (см. [58]), что такие многообразия не бывают рациональными. Если эта гипотеза верна, то такие многообразия не могут давать никакого вклада в изучение группы Кремоны. Тем не менее, вопрос их бирациональной жёсткости продолжал изучаться. Из-за бедной геометрии их изучение гораздо сложнее не $\mathbb{Q}$ -факториального случая, тем не менее, в некоторых случаях удалось продвинуться. Ранее были исследованы случаи 7 и 9 особых точек, в этом году удалось разобраться со случаем 10 особенностей.

3.5 Производная длина конечных подгрупп в группе Кремоны

В алгебраической геометрии важной является задача изучения групп автоморфизмов алгебраических многообразий. С точки зрения бирациональной геометрии интерес также представляют группы их бирациональных автоморфизмов. Одним из простейших многообразий является проективное пространство. Многообразия, бирационально изоморфные проективному пространству, называются рациональными. Их геометрия представляет значительный интерес. Обобщая класс рациональных многообразий, можно рассматривать рационально связные многообразия, то есть такие многообразия, через любые две общие точки на которых проходит рациональная кривая.

Группой Кремоны $\text{Cr}_n(\mathbb{C})$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n$. Для $n = 1$ группа Кремоны изоморфна $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$, но уже для $n \geq 2$ группа Кремоны является довольно сложным объектом для изучения. Один из способов описать ее структуру заключается в том, чтобы исследовать ее на уровне конечных подгрупп. Для $n = 2$ конечные подгруппы в группе Кремоны были классифицированы И. В. Долгачевым и В. А. Исковских, см. [60].

При $n = 3$ структура группы Кремоны становится более сложной, и полная классификация конечных подгрупп представляется недоступной. Тем не менее, можно выделить два направления для их изучения. Во-первых, разумной является задача получить классификационные результаты для некоторых классов конечных подгрупп, см. например [63] в случае простых групп.

Во-вторых, можно получать результаты об ограниченности инвариантов конечных подгрупп, либо некоторых классов таких подгрупп. Такие результаты показывают, что далеко не всякая группа может быть реализована как подгруппа группы Кремоны (вопрос об этом был поставлен в работе [65]). Перечислим несколько таких результатов.

В работе [64] было показано, что конечные подгруппы в группе Кремоны в произвольной размерности n удовлетворяют свойству жордановости. Это означает, что существует такая константа $J = J(n)$, называемая константой Жордана, что для любой конечной группы $G \subset \text{Cr}_n(\mathbb{C})$ существует нормальная абелева подгруппа индекса, не превосходящего J . Этот результат показывает, что конечные подгруппы в группе Кремоны “достаточно близки” к абелевым. Более того, аналогичный результат верен и для групп автоморфизмов рационально связных многообразий фиксированной размерности.

Можно поставить задачу ограничения других инвариантов конечных подгрупп в трехмерной группе Кремоны. Естественными кандидатами в этом случае являются такие хорошо известные инварианты, как производная длина и класс нильпотентности. Напомним, что производной длиной разрешимой группы G называется длина ряда итерированных коммутантов. Классом нильпотентности нильпотентной группы G называется длина ее нижнего центрального ряда.

Для решения поставленной задачи естественно применить программу минимальных моделей, также известную как теория Мори. Она представляет собой последова-

тельность операций, применяемых к произвольному проективному многообразию с достаточно “хорошими” особенностями. Если мы стартуем с действия конечной группы G на произвольном рационально связном (работать с рационально связными многообразиями в этом контексте удобнее, чем с рациональными) многообразии бирациональными автоморфизмами, то, разрешая точки неопределенности этого действия и переходя к эквивариантному разрешению особенностей многообразия, можно считать, что G действует регулярными автоморфизмами на гладком проективном многообразии. Далее мы можем применить к этому многообразию G -эквивариантную программу минимальных моделей, результатом которой будет многообразие, обладающее структурой G -эквивариантного расслоения Мори.

Отметим, что в размерности 2 программа минимальных моделей работает в категории гладких многообразий. Начиная с размерности 3, естественной категорией для эквивариантной программы минимальных моделей является категория многообразий с $G\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями.

В качестве приложения описанного метода сотрудниками Лаборатории получено ограничение производной длины для конечных подгрупп группы Кремоны плоскости: в этом случае точная оценка равна 4.

Тот факт, что производная длина конечных подгрупп в группе бирациональных автоморфизмов рационально связного многообразия ограничена (неэффективной оценкой), следует из ограниченности многообразий Фано фиксированной размерности с терминальными особенностями. Действительно, если итогом применения ПММ является расслоение Мори с базой положительной размерности, то по индукции мы сводим задачу к меньшей размерности. Если же базой является точка, мы получаем терминальное многообразие Фано X , на котором эффективно действует группа G . Применяя результат об ограниченности таких X , мы получаем (неэффективную) оценку на производную длину G .

Таким образом, встает задача получить эффективную оценку на производную длину. Ожидается, что она не превосходит 10. Для этого нужно проанализировать геометрию трехмерных расслоений на поверхности дель Пеццо, расслоений на коники, а также многообразий Фано с различными классами особенностей (терминальных горенштейновых и негоренштейновых). В настоящее время сотрудники Лаборатории ведут работу в этом направлении [62]. Для расслоений с базой положительной размерности полезным может оказаться переход к так называемым стандартным моделям таких расслоений, см. [61].

В случае нильпотентной длины уже не существует ее априорной оценки, так как нильпотентная длина хуже ведет себя в точных последовательностях. С этой точки зрения ограничение нильпотентной длины представляется более сложной задачей.

3.6 Многообразие Энриквеса

В статьях [66] и [68] независимо было введено понятие многообразия Энриквеса, что является обобщением поверхности Энриквеса. А именно:

Определение. Пусть Y связное, компактное, гладкое, кэлерово, комплексное многообразие. Тогда будем говорить, что Y – многообразие Энриквеса, если оно не односвязно, и при этом его универсальным накрывающим многообразием является неприводимое голоморфное симплектическое многообразие или Калаби-Яу.

Определение. Индексом многообразия Энриквеса будем называть натуральное число d , что $\pi_1(Y)$ имеет порядок d . Или, эквивалентно, канонический класс является кручением порядка d .

В упомянутых статьях приведены несколько явных примеров таких многообразий. А именно, индекса 2, которые являются фактором схемы Гильберта n точек на КЗ поверхности при нечетных n или фактором многообразия Куммера n точек с четным n . Так же там построены примеры индекса 3 и 4, которые являются фактором куммеровых многообразий 3 и 4 точек, соответственно. После 2011 года других примеров построено не было.

Однако, появились отрицательные результаты. В статье [67] было показано, что для схемы Гильберта 2 точек на КЗ не существует автоморфизмов без неподвижных точек. Это значит, что схема Гильберта 2 точек на КЗ поверхности не может накрывать многообразие Энриквеса.

Стоит так же отметить следующий очевидный результат, сформулированный в статье [68]:

Утверждение. Неприводимое голоморфное симплектическое многообразие или многообразие Калаби-Яу X является универсальной накрывающей какого-либо многообразия Энриквеса, если существует конечная циклическая группа автоморфизмов без неподвижных точек, порядок которой делит голоморфную эйлерову характеристику. Из этого следует, что фундаментальная группа многообразия Энриквеса является циклической группой.

Это значит, что для построения примеров многообразий Энриквеса нужно искать циклическую группу автоморфизмов без неподвижных точек правильного порядка.

Для схемы Гильберта 3 точек X на КЗ поверхности имеем, что голоморфная эйлерова характеристика равна 4. Поэтому потенциальное многообразие Энриквеса Y , которое накрывается с помощью X может иметь либо $\pi_1(Y) = 2$, либо $\pi_1(Y) = 4$. Для первого случая пример был найден в упомянутых статьях. Для второго в отчетный период сотрудниками Лаборатории было доказано, что не существует группы автоморфизмов порядка 4 без неподвижных точек. То есть схема Гильберта 3 точек на КЗ поверхности не может накрывать многообразие Энриквеса индекса 4.

3.7 Автоморфизмы многообразий Севери-Брауэра

Многообразием Севери-Брауэра называется многообразие, определённое над алгебраически незамкнутым полем k характеристики 0 , такое что над алгебраическим замыканием k оно становится изоморфно $\mathbb{P}^n$.

В 2020 году в работе сотрудника Лаборатории К.А.Шрамова были классифицированы все конечные подгруппы групп автоморфизмов поверхностей Севери-Брауэра. В этом году, сотрудники Лаборатории обобщили этот результат на нетривиальные (то есть не изоморфные $\mathbb{P}^n$) многообразия Севери-Брауэра размерности $p - 1$, где $p > 2$ — простое число. Пусть μ_n обозначает циклическую группу порядка n . Была доказана следующая теорема.

Теорема 3.5. Пусть k — поле характеристики 0 . Пусть $X \not\cong \mathbb{P}^{p-1}$ — многообразие Севери-Брауэра размерности $p - 1$, где p — простое. Пусть конечная группа G вложена в $\text{Aut}(X)$. Тогда верно одно из следующего:

- $G = \mu_n$, где для любого простого $q \mid n$ верно, что $q \equiv 1 \pmod{p}$,
- $G = \mu_n \times \mu_p$, где для любого простого $q \mid n$ верно, что $q \equiv 1 \pmod{p}$,
- $G = \mu_n \rtimes \mu_p$ — сбалансированное полупрямое произведение,
- $G = (\mu_n \rtimes \mu_p) \times \mu_p$, где полупрямое произведение сбалансировано.

Также верно следующее.

Теорема 3.6. Для любой группы G , удовлетворяющей условиям теоремы 3.5, существует поле характеристики 0 и нетривиальное многообразие Севери-Брауэра X размерности $p - 1$ над ним такие, что $G \subset \text{Aut}(X)$.

Таким образом получена полная классификация конечных подгрупп групп автоморфизмов нетривиальных многообразий Севери-Брауэра размерности $p - 1$ над полями характеристики 0 .

3.8 Рациональность многообразий Фано

Проблема рациональности неособых трехмерных многообразий Фано над алгебраически замкнутыми полями характеристики 0 в настоящее время практически полностью решена. В последнее время наметилась значительная активность в изучении рациональности многообразий Фано над алгебраически незамкнутыми полями [70], [71], [72], [73], [74]. Например, случай геометрически рациональных трехмерных многообразий Фано с геометрическим числом Пикара $\rho(X_{\bar{k}}) = 1$ был рассмотрен в работе [73].

В отчетный период сотрудниками Лаборатории велась работа над случаем геометрически рациональных трехмерных многообразий Фано X с числами Пикара, удовлетворяющих условиям $\rho(X_k) = 1$ и $\rho(X_{\bar{k}}) > 1$ (см. [75]). Такие многообразия были классифицированы в работе [76], а в работе [69] было выяснено, какие из них геометрически рациональны. Были доказаны критерии рациональности над алгебраически

незамкнутыми полями характеристики 0 для пяти из шести типов таких многообразий Фано. Для последнего типа доказана стабильная нерациональность при дополнительных предположениях. Как вспомогательный результат, была получена подробная информация о геометрических свойствах соответствующих многообразий Фано. В частности, были описаны их экстремальные стягивания над $\bar{\mathbb{k}}$ и а также схемы Гильберта кривых малой степени.

Основной результат – следующая теорема.

Теорема 3.7 ([75]). Пусть X – трехмерное многообразие Фано с $\rho(X_{\mathbb{k}}) = 1$ и $\rho(X_{\bar{\mathbb{k}}}) > 1$. Верны следующие утверждения.

- X является унирациональным тогда и только тогда, когда $X(\mathbb{k}) \neq \emptyset$;
- Если X имеет тривиальный промежуточный якобиан, то X является рациональным тогда и только тогда, когда $X(\mathbb{k}) \neq \emptyset$.
- Если размерность промежуточного якобиана многообразия X равна 3, то X не является рациональным.

Теорема дает исчерпывающие критерии рациональности для пяти из шести типов трехмерных форм многообразий Фано $\rho(X_{\mathbb{k}}) = 1$ и $\rho(X_{\bar{\mathbb{k}}}) > 1$. Оставшийся неисследованным случай – многообразие Фано $X_{(1,1,1,1)}$, являющееся формой дивизора бистепени $(1,1,1,1)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Гипотеза. Если X имеет тип $X_{(1,1,1,1)}$ и $\rho(X) = 1$, то X никогда не будет рациональным.

В этом случае получен частичный результат:

Теорема ([75]). Предположим, что основное поле $\mathbb{k}$ несчетно. Пусть X – очень общее многообразие типа $X_{(1,1,1,1)}$ такое, что $\rho(X) = 1$, $X(\mathbb{k}) \neq \emptyset$ и группа Галуа G_X разложения X содержит группу Клейна $\mathfrak{V}_4 \subset \mathfrak{S}_4$. Тогда X не является не стабильно рациональным.

3.9 Цилиндры в многообразиях Фано

Цилиндр в проективном многообразии X – это открытое в топологии Зарисского подмножество $U \subset X$ такое, что

$$U \simeq \mathbb{A}^1 \times Z,$$

для некоторого аффинного многообразия Z . Если X содержит цилиндр, мы говорим, что X является цилиндрическим.

Проблема существования цилиндров в проективных многообразиях тесно связана с унитарными действиями на аффинных конусах над ними:

Теорема ([79], [80]). Аффинное многообразие V допускает эффективное $\mathbb{G}_a$ -действие тогда и только тогда, когда V содержит основной эффективный дивизор D , дополнение $V \setminus \text{Supp}(D)$ к которому является цилиндром.

Следствие. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – проективное нормальное многообразие, группа классов дивизоров которого имеет ранг 1. Тогда аффинный конус над $X \subset \mathbb{P}^n$ эффeктивное $\mathbb{G}_a$ -действие если и только если X является цилиндрическим.

Поскольку цилиндрические многообразия имеют отрицательную размерность Кодайры, наиболее интересно изучить цилиндричность для многообразий Фано. Например, грассманиан $\text{Gr}(m, n)$ является гладком проективным многообразием размерности $m(n - m)$. При этом $-K_X \sim nH$, где H – гиперплоское сечение при плюккеровом вложении. Многообразие X содержит открытую клетку Шуберта, изоморфную $\mathbb{A}^{m(n-m)}$. Следовательно, это цилиндрическое многообразие Фано.

Однако не все многообразия Фано являются цилиндрическими, например, гладкие трехмерные кубики и квартики не содержат цилиндров, потому что они нерациональны. С другой стороны, несложно видеть, что каждая гладкая рациональная проективная поверхность содержит цилиндр. В частности, все гладкие поверхности дель Пеццо являются цилиндрическими. Следовательно, можно было бы ожидать, что и все рациональные многообразия Фано являются цилиндрическими. Однако это не так: имеются примеры особых (рациональных) поверхностей дель Пеццо, не содержащих цилиндра.

Вопрос. Содержит ли каждое гладкое рациональное многообразие Фано цилиндр?

Ответ на этот вопрос не известен даже в размерности 3, несмотря на тот факт, что гладкие трехмерные многообразия Фано полностью классифицированы и хорошо изучены [78]. Тем не менее, считается что ответ на этот вопрос отрицательный. На самом деле, не известно ответа даже на следующее обобщение вопроса:

Вопрос. Верно ли, что любое гладкое рациональное многообразие является цилиндрическим?

Однако, оказалось возможно доказать следующее.

Предложение ([77]). Пусть X – цилиндрическое гладкое многообразие Фано с $\rho(X) = 1$. Тогда X является бирациональным по отношению к произведению $Y \times \mathbb{A}^2$ для некоторого рационально связанного многообразия Y .

Следствие ([77]). Пусть X – цилиндрическое гладкое четырехмерное многообразие Фано с числом Пикара $\rho(X) = 1$. Тогда X рационально.

Однако аналог этого утверждения в произвольной размерности не известен:

Вопрос. Верно ли, что все цилиндрические гладкие многообразия Фано с числом Пикара $\rho(X) = 1$ рациональны?

Известны примеры цилиндрических гладких трехмерных многообразий Фано, группы Пикара которых порождены их антиканоническим классом. Однако, не известно таких примеров в высших размерностях:

Проблема. Найти цилиндрические гладкие многообразия Фано размерности ≥ 4 , группа Пикара которых порождена их антиканоническим классом.

Все эти вопросы и проблемы подробно обсуждались в подготовленном в отчетный период сотрудниками Лаборатории большом обзоре [77].

4 Специальные многообразия

4.1 Гиперкэлеровы многообразия и слоения

Сотрудник Лаборатории Михаил Вербицкий продолжает работу над книгой *Principles of Locally conformally Kahler geometry*, совместно с Ливиу Орнеа. В рамках этого проекта, было подготовлено несколько статей с презентацией нового материала, полученного при работе над книгой. Был опубликован препринт

Compact homogeneous locally conformally Kahler manifolds are Vaisman. A new proof (Liviú Ornea, Misha Verbitsky) <https://arxiv.org/abs/2110.12361> посвященный доказательству классической классификационной теоремы (Gauduchon, Moroianu, Ornea, Hasegawa, Kamishima, Alekseevsky, Cortes), описывающей однородные локально конформно кэлеровы многообразия; чрезвычайно трудное классическое доказательство удалось заменить на простой аргумент, выводящий классификацию из базовых результатов локально конформно кэлеровой геометрии.

Совместно с Людмилой Каменовой, был получен простой аргумент, позволяющий строить гиперкэлеровы многообразия с двумя независимыми лагранжевыми расслоениями; сей результат вышел в виде препринта

<https://arxiv.org/abs/2109.08088> Roundness of the ample cone and existence of double Lagrangian fibrations on hyperkahler manifolds (Ljudmila Kamenova, Misha Verbitsky)

Совместно с Андреем Солдатенковым, Вербицкий доказал голоморфную версию изотопии Мозера, позволяющий упростить многие деформационные аргументы в гиперкэлеровой геометрии. Эта работа вышла в виде препринта <https://arxiv.org/abs/2109.00935> The Moser isotopy for holomorphic symplectic and C-symplectic structures (Andrey Soldatenkov, Misha Verbitsky)

Эта работа развивает результаты препринта, опубликованного в ноябре 2020-го года <https://arxiv.org/abs/2011.00469> Sections of Lagrangian fibrations on holomorphically symplectic manifolds and degenerate twistorial deformations (Fedor Bogomolov, Rodion Deev, Misha Verbitsky) в котором абстрактное описание голоморфно-симплектических структур использовалось для построения деформаций голоморфно-симплектических структур и построения голоморфных сечений лагранжевой проекции. Среди прочего, было доказано, что любое гладкое сечение голоморфно лагранжевой проекции можно сделать голоморфным, если перейти к подходящей деформации голоморфной лагранжевой структуры.

Вместе с Ливиу Орнеа, М. Вербицкий нашел новое доказательство эффективной гипотезы Вайнштейна для сасакиевых многообразий (ее независимо и раньше доказал Philippe Rukimbira). Было доказано, что число замкнутых орбит поля Реба равно сумме чисел Бетти кэлерова орбиобразия, на которое это сасакиево многообразие расслаивается со слоем окружность. Этот же результат дает точную оценку числа эллиптических кривых на любом подмногообразии диагонального многообразия Хопфа. Эта работа

вышла препринтом

<https://arxiv.org/abs/2102.05962> Closed orbits of Reeb fields on Sasakian manifolds and elliptic curves on Vaisman manifolds (Liviu Ornea, Misha Verbitsky)

Опубликованы следующие статьи

Correa, Mauricio; Ferreira, Antonio M.; Verbitsky, Misha Classification of holomorphic Pfaff systems on Hopf manifolds. Eur. J. Math. 7 (2021), no. 2, 729-740.

В этой статье приводится классификация голоморфных слоений на достаточно общих многообразиях Хопфа, (компактных комплексных многообразиях вида $\mathbb{C}^n \setminus 0/\mathbb{Z}$). Было доказано, что все такие слоения на самом деле линейные, то есть получаются из $GL(n, \mathbb{C})$ -инвариантных слоений на комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$.

Ornea, Liviu; Verbitsky, Misha Hopf surfaces in locally conformally Kahler manifolds with potential. Geom. Dedicata 207 (2020), 219-226.

В этой статье доказано, что любое локально конформно кэлерово многообразие с потенциалом содержит поверхность Хопфа. Также доказано, что эта поверхность Хопфа может быть выбрана не допускающей вайсмановой структуры, если амбиентное многообразие не вайсманово. Поскольку все подмногообразия вайсмановых многообразий вайсмановы, этот результат дает классификацию локально конформно кэлеровых многообразий с потенциалом в терминах содержащихся в них поверхностей Хопфа.

Bogomolov, Fedor A.; Kamenova, Ljudmila; Verbitsky, Misha Algebraically hyperbolic manifolds have finite automorphism groups. Commun. Contemp. Math. 22 (2020), no. 2, 1950003, 10 pp.

Гиперболические по Кобаяши многообразия это многообразия, на которых псевдометрика Кобаяши невырождена. Все такие многообразия имеют конечную группу автоморфизмов, что легко видеть из того, что все эти автоморфизмы являются изометриями метрики Кобаяши. “Алгебраическая гиперболичность”, определенная Демайи, есть версия гиперболичности по Кобаяши, сформулированная в терминах комплексных кривых, лежащих в многообразии. Гипотетически, для проективных многообразий, алгебраическая гиперболичность равносильна гиперболичности по Кобаяши. В совместной статье с Людмилой Каменовой (Kamenova, Ljudmila; Verbitsky, Misha Algebraic nonhyperbolicity of hyperkahler manifolds with Picard rank greater than one. New York J. Math. 23 (2017), 489-495.) Вербицкий доказал, что гиперкэлеровы многообразия с рангом группы Пикара >1 алгебраически гиперболичны. Аргумент был основан на явном описании группы автоморфизмов проективных гиперкэлеровых многообразий, не содержащих рациональных кривых. В совместной статье с научным руководителем Лаборатории Ф. Богомоловым, Каменова и Вербицкий обобщили этот аргумент на любое проективное многообразие, доказав, что группа автоморфизмов алгебраически гиперболического многообразия конечна.

В статье Amerik, Ekaterina; Verbitsky, Misha Collections of orbits of hyperplane type in homogeneous spaces, homogeneous dynamics, and hyperkähler geometry. Int. Math. Res. Not. IMRN 2020, no. 1, 25-38.

был доказан общий факт о симметрических многообразиях. Пусть задан набор S вполне геодезических симметрических подмногообразий максимальной размерности в симметрическом многообразии $X = G/H$, инвариантный относительно действия решетки $\Gamma \subset G$. Тогда либо Γ действует на S с конечным числом орбит, либо объединение всех подмногообразий из S плотно в X .

Этот результат является обобщением аналогичного результата для гиперболических гиперповерхностей в гиперболических многообразиях: если в гиперболическом пространстве $X = SO(1, n)/SO(n)$ $n > 1$ задан Γ -инвариантный набор S гиперболических гиперповерхностей, то он плотен, либо Γ действует на S с конечным числом орбит. Этот результат использовался в доказательстве сильной версии гипотезы Моррисона-Каваматы для гиперкэлеровых многообразий, полученном Америк и Вербицким в статье

“Morrison-Kawamata cone conjecture for hyperkahler manifolds”, *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.* (4) 50 (2017), no. 4, 973-993.

За прошедший год была окончательно подготовлена к печати и вышла в журнале *Selecta Mathematica* совместная статья сотрудников Лаборатории Е.Америк и М. Вербицкого *Contraction centers in families of hyperkähler manifolds*.

Был получен (положительный) отзыв из редакции журнала *Algebraic Geometry* на работу Е.Америк с М. Вербицким *MBM classes and contraction loci on low-dimensional hyperkahler manifolds of K3 type*. Был доработан текст согласно замечаниям рецензента, а также был добавлен в статью важный пример, который не был замечен в первой редакции. Он состоит в следующем. Стягивание экстремального луча на многообразии отображает в точку все кривые, класс когомологий которых принадлежит этому лучу, и только их. Исключительное множество стягивания замечается рациональными кривыми из какого-нибудь такого класса, или даже таких классов: вообще говоря, оно может быть приводимым и каждая компонентой может замечаться рациональными кривыми из какого-то своего класса (но все они пропорциональны). Назовем такую кривую минимальной, если через общую точку замечаемого ее деформациями подмногообразия не проходит приводимых деформаций (т.е. кривая не разваливается в смысле Мори). Возникает естественный вопрос, можно ли построить пример гиперкэлерова многообразия, где такие минимальные кривые лежат в разных пропорциональных классах когомологий. В конце концов такой пример был построен; более того, что несколько контр-интуитивно, исключительное множество в этом примере неприводимо, то есть подмногообразие, замечаемое деформациями одной минимальной кривой (“МВМ locus”), строго содержится в другом МВМ локусе. При этом размерность пространства деформаций той и другой кривой одинакова (как и должно быть на голоморфно симплектическом многообразии).

В окончательной форме эта статья принята к печати. О результатах докладывалось на семинаре лаборатории.

Написана и в ближайшее время будет обнародована еще одна статья, *Parabolic*

automorphisms of hyperkähler manifolds. Это обобщение следующих наблюдений С. Канта, сделанных им около 2000 года. Пусть X КЗ поверхность с эллиптическим пучком, а f так называемый параболический автоморфизм (это автоморфизм, сохраняющий класс расслоения, задающего эллиптический пучок; с точностью до взятия степени он действует на как послойный сдвиг вдоль эллиптического пучка. Как показано Канта, орбиты этих сдвигов плотны вне множества меры нуль (на самом деле конечного множества слоев). Как следствие, если на поверхности X есть два разных эллиптических пучка и два соответствующих параболических автоморфизма, то порожденная ими подгруппа $Aut(X)$ действует эргодически. Это доказывается с помощью простого вычисления. Мы задались аналогичным вопросом в случае многомерного аналога эллиптической КЗ поверхности, т.е. неприводимого голоморфно симплектического многообразия M размерности $2n$ с лагранжевым расслоением на n -мерные торы. Оказывается, как и в случае Канта, что параболические автоморфизмы с точностью до взятия степени являются послойными сдвигами, и что орбиты этих сдвигов по-прежнему плотны, за исключением множества слоев меры нуль.

Доказательство, конечно, значительно сложнее и использует теорию Ходжа, конкретно - теорему Делиня о полупростоте. Из теоремы Делиня быстро следует неизотривиальный случай, в изотривиальном работы нужно чуть больше, но тоже все получается.

Вопрос о существовании параболических автоморфизмов решается в терминах так называемых МВМ классов, это многомерные аналоги (-2) -кривых. Используя это описание, мы в той же работе предъявляем особенно простое построение гиперкэлеровых многообразий с параболическими автоморфизмами.

Предварительный доклад об этих результатах сотрудник Лаборатории Е.Америк сделала на конференции во Владивостоке.

Также Е.Америк продолжила совместную работу с Ф. Кампана и научным руководителем Лаборатории Ф. Богомоловым о потенциальной плотности рациональных точек на трехмерных многообразиях Калаби-Яу со структурой расслоения на абелевы поверхности и доложила об этом на семинаре Шафаревича (семинаре отдела алгебры МИ РАН). К сожалению, результаты все еще несколько неполны, надеемся разобраться с этим в ближайшее время.

4.2 Исследование геометрии многообразий Гуана

Сотрудник Лаборатории Н. Курносов продолжил исследования БГ-многообразий, единственного примера некэлерава симплектического односвязного многообразия. Впервые БГ-многообразие было построено Гуаном, затем Богомолов привёл конструкцию по своей идее, основанной на построении обобщённого куммерового многообразия из двумерного тора.

Свойства групп биголоморфных и бимероморфных преобразований комплексного многообразия X являются интересным вопросом. Сами группы часто устроены

довольно сложно, поэтому изучают их конечные подгруппы. Оказывается, такие группы часто оказываются в некотором смысле ограниченными, а именно мы говорим, что группа Γ жорданова с константой J , если любая конечная подгруппа этой группы содержит нормальную абелеву подгруппу индекса менее J . Мотивацией для рассмотрения такого свойства является в частности тот факт, что $GL_n(\mathbb{C})$ обладает таким свойством.

Ранее Курносов совместно с Ясинским изучали жордановость для групп автоморфизмов гиперкэлеровых многообразий, получив ряд положительных результатов. Естественно, поскольку БГ-многообразия во многом аналогичны гиперкэлеровым, можно ожидать похожих свойств и для них. В опубликованную в 2021 году работу совместно с Ф. Богомолковым, А. Кузнецовой и Е. Ясинским вошли результаты по жордановости для групп автоморфизмов БГ-многообразий.

Было доказано, что БГ-многообразие Q имеет жорданову группу биголоморфных автоморфизмов. Более того, существует точная короткая последовательность

$$1 \rightarrow \text{Bim}(Q)_\Phi \rightarrow \text{Bim}(Q) \rightarrow \Delta \rightarrow 1,$$

где $\text{Bim}(Q)_\Phi \subset \text{Bim}(Q)$ подгруппа тех бимероморфных автоморфизмов, которые послыжны относительно алгебраической редукции Q на проективное пространство P^{n-1} и Δ - подгруппа группы Кремоны $\text{Bir}(P^{n-1})$. Из этой точной последовательности следует также, что группа $\text{Bim}(Q)_\Phi$ жорданова.

Ключевой шаг в доказательстве заключается в том, что в условиях алгебраической редукции БГ-многообразия все конечные подгруппы группы $\text{Bim}(Q)_\Phi$ вложены в слой редукции, который является абелевым многообразием. Этот результат использует теорему Прохорова-Шрамова, в которой показано что для счётного семейства конечных подгрупп в $\text{Bim}(X)_\phi$, где $\phi : X \rightarrow Y$ сюръективный морфизм с конечными слоями, существует слой F отображения ϕ размерности $\dim(X) - \dim(Y)$, такой что все группы семейства вложены в $\text{Bim}(F)$.

Жордановость группы бимероморфных автоморфизмов остаётся открытым вопросом, также как и ограниченность (т.е. существование константы, что порядок любой конечной подгруппы менее этой константы) $\text{Aut}(Q), \text{Bim}(Q)$ (для гиперкэлеровых многообразий доказанная ранее Курносовым и Ясинским).

Помимо этого, совместно с сотрудником Лаборатории М. Вербицким Н. Курносов продолжил исследование деформаций БГ-многообразий. Ранее была показана гладкость пространства голоморфно симплектических и комплексных деформаций БГ-многообразий (БТТ теорема в их случае). Сейчас удалось продвинуться в доказательстве SYZ-гипотезы для них, которая заключается в том, что БГ-многообразия деформируются в лагранжево расслоение (для гиперкэлеровых многообразий это до сих пор открытый вопрос). Препятствия к деформации лагранжевых расслоений были изучены Вуазен и лежат во вторых когомологиях. Основная идея доказательства заключается в том, как циклы во вторых когомологиях БГ-многообразия связаны со вторыми когомо-

логиями Кодаиры и как устроены слои расслоения. В будущем полученные результаты возможно позволят изучить твисторные деформации для БГ-многообразий.

4.3 Самоподобные гессиановы многообразия

Сотрудником Лаборатории П. Осиповым была доработана и подана в Journal of Geometry and Physics работа [81].

Самоподобный римановы многообразием называется риманово многообразие (C, g) , оснащённое полем ξ , таким что $\mathcal{L}_\xi g = 2g$. Самоподобное многообразие (M, g, ξ) называется потенциальным, если ξ является градиентом функции. Плоское аффинное многообразие — это многообразие оснащённое плоской связностью без кручения. Самоподобным гессиановым многообразием (M, ∇, g, ξ) называется гессианово многообразие (M, ∇, g) , оснащённое векторным полем ξ , таким что поток вдоль ξ сохраняет аффинную структуру и (M, g, ξ) является самоподобным многообразием.

Поле ρ на плоском аффинном многообразии (M, ∇) называется радиантным, если $\nabla \rho = \text{Id}$. В окрестности каждой точки существует локальная плоская система координат, в которой радиантное поле имеет вид $\rho = \sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Назовём самоподобное гессианово многообразие (M, ∇, g, ξ) радиантным, если существует такое $\lambda \neq 0$, что $\lambda \xi$ — радиантное векторное поле.

Теорема 4.1 ([O1]). Пусть (C, ∇, ξ) — самоподобное гессианово многообразие. Поле ξ потенциально тогда и только тогда, когда (C, ∇, ξ) локально изоморфно прямому произведению радиантных гессиановых многообразий. Кроме того, если поле ξ потенциально и зануляется в какой-то точке, то (C, ∇, g, ξ) — радиантное гессианово многообразие с радиантным векторным полем $\rho = \xi$.

4.4 Самоподобные гессиановы и конформно кэлеровы многообразия

Также, П. Осиповым доработана и подана в Differential Geometry and its Application статья [82].

Открытый выпуклый конус $V \subset \mathbb{R}^n$ называется регулярным, если он не содержит ни одной полной прямой. Трубочатая окрестность регулярного выпуклого конуса $V + \sqrt{-1}\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ биголоморфна ограниченной области в $\mathbb{C}^n$. Все комплексные области, возникающие таким образом, называются областями Зигеля первого рода. Мы будем рассматривать аффинные автоморфизмы конусов и комплексные аффинные автоморфизмы соответствующих трубочатых областей. В этих соглашениях область $V + \sqrt{-1}\mathbb{R}^n$ однородна тогда и только тогда, когда конус V однороден. Однородные выпуклый конус допускает инвариантную гессианову структуру, по ней можно построить инвариантную кэлерову структуру на соответствующей области Зигеля первого рода.

Павел Осипов модифицирует конструкцию инвариантной кэлеровой структуры на однородных областях Зигеля первого рода для получения некоторого класса однородных конформно кэлеровых многообразий и однородных конформно гиперкэлеровых многообразий.

Однородным (глобально) конформно кэлеровым многообразием называется однородное комплексное многообразие (X, G, I) с G -инвариантной римановой метрикой $g_{с.к.}$ конформно эквивалентной некоторой кэлеровой метрике g_K . (метрика g_K не обязательно G -инвариантна).

Теорема 4.2 ([O2]). Пусть (M, ∇, g, ξ) односвязное самоподобное гессианово многообразие, ξ полно и G — группа аффинных изометрий (M, ∇, g) сохраняющих ξ . Положим, что G действует свободно и транзитивно на линии уровня $\{g(\xi, \xi) = 1\}$. Тогда TM допускает однородную конформно кэлерову структуру.

В частности, Павел Осипов строит инвариантную конформно кэлерову метрику на любой области Зигеля первого рода.

Теорема 4.3 ([O2]). Пусть (M, ∇, g, ξ) односвязное самоподобное специальное кэлерово многообразие, ξ полно и G — группа аффинных изометрий (M, ∇, g) сохраняющих ξ . Положим, что G действует свободно и транзитивно на линии уровня $\{g(\xi, \xi) = 1\}$. Тогда T^*M допускает однородную конформно гиперкэлерову структуру.

4.5 Другие гессиановы многообразия

В настоящий момент Павел Осипов пишет статью, продолжающую [81]. Статистическим многообразием называется риманово многообразие (M, g) оснащённое плоской связностью без кручения такой, что тензор ∇g симметричен по трём аргументам. Статистическое многообразие является статистическим многообразием постоянной кривизны C , если тензор кривизны связности ∇ равен

$$\theta(X, Y)(Z) = c(g(Y, Z)Z - g(X, Z)Y)$$

для любых $X, Y, Z \in TM$

По аналогии с локально конформно кэлеровыми многообразиями Павел Осипов определяет локально конформно гессианово многообразие. Это риманово многообразие (M, g) оснащённое плоской связностью без кручения такой, что тензор ∇g симметричен по трём аргументам. Несложно проверяется, что в этом случае метрика g действительно конформно эквивалентна некоторой гессиановой.

Теорема 4.4. Пусть (C, g, ∇) локально конформно гессианово многообразие. Тогда существует набор статистических многообразий постоянной кривизны $\{(M, g_i, D_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ таких что (C, g) локально изометрично $((\prod_{i=1}^k M_i) \times \mathbb{R}^k, \sum_{i=1}^k (g_i + ds_i^2))$.

Теорема 4.5. Пусть (C, ∇, g) компактное локально конформно гессианово многообразие с аффинным киллинговым полем Ли. Тогда существует натуральное число k такое что (C, g) допускает риманову субмерсию на тор $p : C \rightarrow T^k$. Кроме того слои M изометричны произведению нескольких k статистических многообразий постоянной кривизны и $C = (M \times \mathbb{R}^k) / \Gamma_k$, где Γ_k свободная группа из k образующих, оснащённая некоторым действием на $M \times \mathbb{R}^k$.

П.Осиповым был сделан доклад “самоподобные гессиановы многообразия” на семинаре Лаборатории “Геометрические структуры на многообразия” 09.09.2021.

4.6 Сходимость Громова-Хаусдорфа многообразий Калаби-Яу

Пусть $(M, g, \omega, J, \Omega)$ – многообразие Калаби-Яу, т.е. комплексное многообразие с эрмитовой (не обязательно кэлеровой) метрикой $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$ и голоморфной $(n, 0)$ -формой Ω , которая в каждой точке отлична от нуля. Предположим, что наша метрика “конформно балансирующая” в следующем смысле: $d(\|\Omega\|_\omega^2 \omega^{n-1}) = 0$. Рассмотрим следующее уравнение на семейство метрик:

$$\partial_t(\|\Omega\|_\omega^2 \omega^{n-1}) = i\partial\bar{\partial}(\|\Omega\|_\omega^2 \omega^{n-2}).$$

Это параболическое уравнение, аналогичное потоку Риччи в кэлеровой и римановой геометрии. Оно сохраняет свойство метрики быть конформно балансирующей и его стационарные точки являются кэлеровыми метриками. Т.е. данное уравнение дает способ деформировать эрмитову метрику в кэлерову. Данное уравнение было предложено в [87, 83] в качестве замены потоков Риччи на некэлеровых многообразиях, однако очень мало известно о поведении решений, сходимости и особенностях решений данного уравнения. Для решения этих вопросов нужен некоторый аналог теоремы Гамильтона (см. [84, 85]) и соответствующие результаты о сходимости Громова-Хаусдорфа многообразий Калаби-Яу. В работе [86] стажером Лаборатории Н. Клемятым были получены соответствующие результаты. А именно, были доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.6. Пусть $\{(M_j, g_j, J_j, \Omega_j, x_j)\}_{j=1}^\infty$ -последовательность компактных многообразий Калаби-Яу, которые удовлетворяют следующим условиям:

- (1) Кривизна Rm_j и кручение T_j связности Черна на (M_j, g_j, J_j) равномерно ограничены вместе со всеми своими ковариантными производными, т.е. существуют положительные константы C_k , не зависящие от j , что $|\nabla^k Rm_j|_{g_j} \leq C_k$ и $|\nabla^k T_j|_{g_j} \leq C_k$.
- (2) Найдутся константы $C_1 \geq C_0 > -\infty$, такие что $C_1 \geq \log \|\Omega_j\|_{g_j}^2 \geq C_0$.
- (3) Все многообразия конформно балансируемые: $d(\|\Omega\|_\omega^2 \omega^{n-1}) = 0$.

Тогда, после возможного перехода к подпоследовательности, найдется полное многообразие Калаби-Яу $(M_\infty, g_\infty, J_\infty, \Omega_\infty, x_\infty)$ с конформно балансирующей метрикой, исчерпание $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ многообразия M_∞ и последовательность диффеоморфизмов $\Phi_j : U_j \rightarrow V_j \subset M_j$, $\Phi_j(x_\infty) = x_j$, таких что тройка $(\Phi_j^* g_j, \Phi_j^* J_j, \Phi_j^* \Omega_j)$ сходятся к $(g_\infty, J_\infty, \Omega_\infty)$.

Из этой теоремы выводится теорема компактности для решений [4.6].

Теорема 4.7. Пусть $\{(M_j, g_j(t), J_j, \Omega_j, x_j)\}_{j=1}^\infty$ последовательность решений [4.6] на интервале $[\tau_0; \tau_1] \subset \mathbb{R}$, таких что:

(1) Существует константа C_0 , такая что

$$|Rm_j|_{g_j} + |\nabla T|_{g_j} + |T|_{g_j}^2 \leq C_0$$

(2) Существует константа $\iota_0 > 0$, такая что $\text{inj}(M_j) \geq \iota_0$;

(3) Существует константа C_1 , не зависящая от j , такая что $C_1 \leq \log \|\Omega_j\|_{g_j}^2(\tau_0)$;

Тогда, после перехода к подпоследовательности, существует полное конформно-балансированное многообразие Калаби-Яу $(M_\infty, g_\infty(t), J_\infty, \Omega_\infty, x_\infty)$, исчерпание $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ многообразия M_∞ , и последовательность диффеоморфизмов $\Phi_j : U_j \rightarrow V_j \subset M_j$, таких что $(M_j, g_j(t), J_j, \Omega_j, x_j)$ сходятся к полному решению $(M_\infty, g_\infty(t), J_\infty, \Omega_\infty, x_\infty)$ уравнения 4.6.

С помощью предыдущих двух теорем Клемятин доказал теорему о структуре особенностей решения уравнения 4.6, аналогично таковой классификации для потоков Риччи, полученной Гамильтоном в [85].

Теорема 4.8. Пусть $\omega(t)$ является решением уравнения 4.6 на компактном конформно-балансированном многообразии M , и пусть $[0, T)$ является максимальным отрезком, на котором оно существует. Предположим, что существует нижняя оценка на радиус инъективности решения. Тогда для подходящего выбора $t_j \rightarrow T$ и рескейлинга метрики $g_j(t) = C_j g(t_j + C_j^{-1}t)$, последовательность $g_j(t)$ допускает сходящуюся к решению 4.6 подпоследовательность, такую, что $f(t) := \sup_M (|Rm|^2 + |\nabla T|^2 + |T|^4)$ удовлетворяет в точности одному из следующих свойств:

- (1) Решение существует на интервале $(-\infty, c)$ и $f(t) \leq \frac{C}{c-t}$;
- (2) Решение существует при всех $t \in \mathbb{R}$ и $f(t) \leq C$;
- (3) Решение существует на интервале $(-A, \infty)$ и $f(t) \leq \frac{A}{A+t}$.

4.7 Реализация многогранников

Многогранник — это трингулированная ориентируемая поверхность, с односвязным краем или без края, снабженная метрикой d , в которой каждая грань изометрична треугольнику на плоскости. Реализацией многогранника P называется его непрерывное отображение в трехмерное евклидово пространство, аффинное на каждом ребре и которое индуцирует метрику d на P . Естественно рассмотреть пространство $\mathbb{E}^P$ всех возможных реализаций данного многогранника, отождествляя две реализации если одну можно перевести в другую изометрией трехмерного евклидова пространства. Оно задается системой алгебраических уравнений в $\mathbb{R}^{3m}$, где m — число вершин многогранника, и, таким образом, несет структуру аффинной схемы над $\mathbb{R}$. Несмотря на то, что вопрос о строении пространства реализаций многогранника интенсивно изучался с XVIII века, его структура остается загадочной. Даже вопрос о том, является ли пространство реализаций данного многогранника нульмерным (вопрос о жесткости многогранника)

очень сложен. Наиболее сильные результаты о жесткости доступны для класса выпуклых многогранников и связаны прежде всего с именами Коши и А.Д. Александрова. Примеры замкнутых многогранников с пространством реализаций положительной размерности редки и были открыты сравнительно недавно [90].

С другой стороны, пространство реализаций $\mathbb{E}^L$ замкнутой ломаной L с фиксированными длинами ребер в евклидовом пространстве, рассмотренных с точностью до евклидовых изометрий, имеет еще и структуру комплексного аналитического пространства (в общем случае гладкого, но иногда имеющего изолированные квадратичные особенности). Оно также имеет естественную кэлерову структуру на гладких точках, полученную с помощью симплектической редукции, примененной к взвешенному произведению двумерных сфер с диагональным действием группы $SO(3)$ (Клячко [89] и Капович–Милсон [88]).

Рассмотрим многогранник P со связной границей ∂P . Граница является ломаной и каждая реализация многогранника с помощью ограничения также дает реализацию границы, то есть задано алгебраическое отображение $\partial : \mathbb{E}^P \rightarrow \mathbb{E}^{\partial P}$. Был поставлен вопрос о том, как множество реализаций ∂P , полученных таким образом, располагается в пространстве Каповича–Милсона всех реализаций $\mathbb{E}^{\partial P}$. В частности, может ли оно иметь положительную меру? Была доказана следующая

Теорема 4.9. Отображение ∂ является изотропным, то есть пулбэк симплектической формы Каповича–Милсона — нулевая форма на $\mathbb{E}^P$. Более того, в случае, когда многогранник гомеоморфен диску, это отображение является лагранжевым.

Следует отметить, что касательные вектора, дифференциалы и пулбэк понимаются в смысле касательных векторов по Зарисскому, которые в классической литературе по изгибаемым многогранникам известны как инфинитезимальные деформации. Теория деформаций полиэдров нетривиальна и многогранники могут быть жесткими несмотря на наличие инфинитезимальных деформаций.

Ключевая идея доказательства теоремы — расширить определение многогранника, введя понятие граф-поверхности. А. Ананьин предложил следующее

Определение 2. Вложенный триангулированный комплекс в ориентируемой замкнутой поверхности, дополнение до которого гомеоморфно открытому диску, называется граф-поверхностью.

Граф-поверхность выглядит как многогранник, к границе которого может быть приклеено несколько метрических графов. Для граф-поверхностей, как и для многогранников, определены понятия реализации, границы, отображения ∂ и утверждение теоремы. Была введена операция коллапса грани граф-поверхности, которая из граф-поверхности P делает граф-поверхность P' , имеющую на одну грань меньше. Используя свойство жесткости треугольника, было показано, что коллапс задает иммерсию, согласованную с пулбэками формы Каповича–Милсона, между $\mathbb{E}^P$ и $\mathbb{E}^{P'}$. Это позволило провести индукцию, сведя утверждение теоремы к случаю графа, для которого

зануление формы вычисляется непосредственно. Из теоремы получается ключевое для приложения к гипотезе Кеньона

Следствие. Образ $T_q\mathbb{E}^P$ в $T_{\partial q}\mathbb{E}^{\partial P}$ имеет размерность, меньшую или равную половине размерности $T_{\partial q}\mathbb{E}^{\partial P}$. Следовательно, мера образа отображения ∂ равна нулю.

Р. Кеньон сформулировал [91] следующий

Вопрос. Является ли реализация в трехмерном евклидовом пространстве любой ломаной, все ребра которой имеют длину 1, границей реализации многогранника, все ребра которого имеют длину 1? Иными словами, лежит ли любой элемент $\mathbb{E}^L$ в $\partial(\mathbb{E}^P)$ для какого-то P ?

В комментарии на mathoverflow [92] Й. Агол предложил стратегию получения отрицательного ответа на вопрос Кеньона через доказательство лагранжевости ∂ (и хотя лагранжевость не всегда имеет место, изотропности достаточно).

Следуя стратегии Агола, было продемонстрировано, что для большинства реализаций ломаных положительное решение Вопросы невозможно. Действительно, для данного полиэдра множество реализаций ломаной, которые он ограничивает имеет меру нуль в пространстве Каповича-Милсона в силу Следствия. Многогранник, все ребра которого имеют длину 1 определяется только своим комбинаторным строением. Следовательно, таких многогранников счетное число и это значит, что множество 'затягиваемых' подходящими многогранниками ломаных, как счетное объединение нульмерных множеств, имеет меру нуль.

Таким образом, был получен отрицательный ответ на вопрос Ричарда Кеньона. Используя другие методы, Пак и Глазырин получили тот же ответ в [93].

4.8 Кривые в слоях твисторной проекции гиперкомплексного нильмногообразия

Пусть G – нильпотентная группа Ли, Γ – решетка. Компактное многообразие N , допускающее транзитивное действие нильпотентной группы G , называется нильмногообразием. В работе [94] Анатолий Мальцев показал, что всякое нильмногообразие диффеоморфно фактору связной односвязной нильпотентной группы Ли G по кокомпактной решетке: $N = \Gamma \backslash G$.

Стажер Лаборатории Ю. Горгиян рассматривает нильмногообразия, которые также являются гиперкомплексными многообразиями, то есть допускают три комплексные структуры I, J и K , связанные также кватернионными соотношениями.

Гиперкомплексная структура на нильмногообразии $N = \Gamma \backslash G$ получается из левоинвариантной гиперкомплексной структуры на группе Ли G .

Примерами гиперкомплексных нильмногообразий, являются тор, фактор группы Гейзенберга по целочисленным матрицам (тоже из группы Гейзенберга) подходящего размера.

Пусть (N, I, J, K) – гиперкомплексное нильмногообразие с плоской связностью Обаты. Связность Обаты есть единственная связность без кручения, сохраняющая все

три комплексные структуры. Она может быть записана в виде, найденном в работе [95]:

$$\nabla_X^{Ob} Y = [X, Y] + I[IX, Y] - J[X, JY] + K[IX, JY].$$

Под руководством сотрудника Лаборатории М. Вербицкого, Ю. Горгиян работает над доказательством следующей теоремы:

Теорема 4.10. Пусть (N, I, J, K) есть гиперкомплексное нильмногообразие с плоской связностью Обаты. Тогда не существует семейства комплексных кривых в слоях голоморфной твисторной проекции, которые проецируются на $\mathbb{CP}^1$ сюръективно.

Пусть $\mathfrak{g}$ есть нильпотентная алгебра Ли. Для доказательства теоремы 1.1 вводится вспомогательное утверждение про бивекторы на гиперкомплексной алгебре Ли.

Бивектор – это функционал на 2-формах $\alpha \in \Lambda^2(\mathfrak{g}^*)$:

$$\xi := \int_{C_L} \alpha = \langle \alpha, [C_L] \rangle$$

где C_L комплексная кривая в N .

Теорема 4.11. Пусть $(\mathfrak{g}, I, J, K)$ гиперкомплексная алгебра Ли с плоской связностью Обаты. Рассмотрим множество $\tilde{\xi} \subset \Lambda^{1,1}(\mathfrak{g}, L)$, состоящее из положительных и точных бивекторов ξ_L для каждой комплексной структуры $L \in \mathbb{CP}^1$. Тогда $\tilde{\xi}$ пусто.

Ю. Горгиян было доказано, что

Теорема 4.12. Пусть $(\mathfrak{g}, I, J, K)$ гиперкомплексная алгебра Ли с плоской связностью Обаты. Тогда

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + I[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + J[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + K[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}.$$

Ю. Горгиян был сделан доклад 11.06.2020, Семинар Лаборатории Алгебраической Геометрии, “Abelian hermitian geometry”.

Ю. Горгиян также участвовала в организации летней школы Алгебра и геометрия 2021 в Ярославле в июле 2021.

4.9 Многочлены Шура, двойственные многочлены Гротендика и массивы

Многочлены Шура — симметрические многочлены, которые образуют базис в кольце симметрических многочленов. Они возникают при описании когомологий грасманианов, а также в теории представлений. Многочлены Шура можно определить алгебраически или комбинаторно как сумму мономов по полустандартным таблицам Юнга соответствующей формы. Однако, в обоих случаях могут оказаться достаточно сложными формулировки и доказательства различных утверждений таких как, тождество Коши, выражающее произведение двух многочленов Шура от разных переменных,

или правило Литтлвуда-Ричардсона, описывающее структурные константы кольца симметрических многочленов.

С другой стороны, с помощью массивов, определенных в работе В.И.Данилова и Г.А.Кошевого [97], доказательства многих утверждений, связанных с многочленами Шура и полустандартными таблицами Юнга, становятся значительно проще.

Массивы – это прямоугольные таблицы, заполненные целыми неотрицательными числами, которые выглядят как обыкновенные матрицы, но обладают набором специальных операций D, U, R и L , то есть уплотнений вниз, вверх, вправо и влево соответственно. Массив, к которому некоторую из этих операций применили достаточное количество раз, становится плотным в соответствующем направлении, и оказывается, что L -плотные массивы соответствуют полустандартным таблицам Юнга.

Массивы являются удобным комбинаторным инструментом для работы с таблицами по нескольким причинам. Во-первых, в силу формы и коммутативности операций, массив является достаточно симметричной конструкцией. Кроме того, операции на массивах соответствуют операциям на таблицах Юнга, таким как вставка и эвакуация. Так, например, можно начать с косоугольной полустандартной таблицы и прийти к обыкновенной полустандартной таблице, то есть изменить форму, в то время как на массивах мы всегда будем работать с массивом одной и той же формы.

Двойственные многочлены Гротендика определены в [99] Т.Ламом и П.Пилявским через обратные плоские разбиения, которые являются обобщением понятия полустандартных таблиц.

Двойственные многочлены Гротендика являются симметрическими многочленами и также образуют базис в кольце симметрических функций. Кроме того, они являются двойственными к стабильным многочленам Гротендика относительно скалярного произведения на симметрических многочленах.

Стабильные многочлены Гротендика [98] являются аналогами многочленов Шура и возникают в K -теории грассманианов. А.Бух в [96] доказал, что стабильный многочлен Гротендика может быть представлен как сумма мономов по множественным таблицам, то есть таблицами, клетки которых заполнены множествами, а не отдельными числами.

Для многочленов Гротендика и двойственных многочленов Гротендика известны утверждения, аналогичные тем, что есть для многочленов Шура (см. [101]). Также известны формулы, которые позволяют раскладывать двойственные многочлены Гротендика в сумму по многочленам Шура с некоторыми коэффициентами (Лам-Пилявский [99]; Бэндлоу-Морс [100]) и тем самым в силу двойственности выражать многочлен Шура через стабильные многочлены Гротендика.

В совместной работе сотрудника Лаборатории Е.Ю.Смирнова и А.Е.Сукачёвой был введён такой объект, как множественные массивы, на которых определен набор операций, обобщающих операции из работы В.И.Данилова и Г.А.Кошевого. Далее показано, что двойственный многочлен Гротендика можно определить как сумму мономов,

которые получаются по множественным массивам определённого вида.

Это дает нам новые доказательства тождеств из работ [99] и [100], выражающих двойственные многочлены через многочлены Шура с помощью различных комбинаторных объектов: “элегантных заполнений” косых диаграмм Юнга и обратных плоских разбиений, отвечающих словам Яманучи. Более того, с помощью множественных массивов удастся построить явную биекцию между этими множествами.

4.10 Слайд-комплексы и гс-графы

Многочлены Шуберта $\mathfrak{S}_w$, определенные в [105, 108], индексируются перестановками $w \in \mathcal{S}_\infty$ и являются полиномиальными представителями классов Шуберта в кольце когомологий многообразия полных флагов. Их K -теоретические аналоги называются многочленами Гротендика $\mathfrak{S}_w^{(\beta)}$.

Существует комбинаторное описание многочленов Шуберта и Гротендика в терминах диаграмм, называемых гс-графами (или pipe dreams). Эти диаграммы являются конфигурациями псевдолиний, ассоциированных с перестановкой; также каждой такой диаграмме можно сопоставить моном. РС-граф называется приведенным, если любые две псевдолинии пересекаются не более одного раза. Многочлен Шуберта (соотв. Гротендика) для перестановки w можно получить как сумму мономов по всем приведенным (соотв. не обязательно приведенным) гс-графам, отвечающим перестановке w (см. [103, 106]). Из этого описания сразу следует положительность коэффициентов у многочленов Шуберта и Гротендика.

На множестве всех гс-графов, соответствующих данной перестановке, можно ввести структуру симплицального комплекса, называемого комплексом гс-графов. Это частный случай так называемых комплексов подслов, определяемых для произвольных групп Кокстера (см. [107]). Такие комплексы являются расшелушиваемыми и гомотопны дискам или сферам.

В [102] описаны слайд-многочлены $\mathfrak{S}_Q$. Они индексируются гс-графами Q , удовлетворяющими некоторому специальному комбинаторному условию, и образуют базис в кольце многочленов от счетного числа переменных. Существует комбинаторная формула, позволяющая представить многочлены Шуберта в виде линейных комбинаций слайд-многочленов с коэффициентами 0 и 1. K -теоретические аналоги слайд-многочленов называются глайд-многочленами $\mathcal{G}_Q^{(\beta)}$ (см. [109]).

В работе сотрудника Лаборатории Е.Ю.Смирнова и стажера Лаборатории А.А.Тутубалиной [111] определены соответствующие слайд-многочленам аналоги комплексов подслов, названные слайд-комплексам. Каждый комплекс подслов разбивается в объединение слайд-комплексов. Показано, что слайд-комплексы являются расшелушиваемыми. Основным результатом работы является

Теорема: Слайд-комплексы являются дисками или, в редких случаях, сферами.

В [104] даны определения многочленов Шуберта $\mathfrak{B}_w, \mathfrak{C}_w, \mathfrak{D}_w$ для классических групп. Они индексируются элементами w групп Кокстера $\mathcal{B}_\infty, \mathcal{C}_\infty$ и $\mathcal{D}_\infty$ и являются по-

линомиальными представителями классов Шуберта в кольце когомологий пространства полных флагов групп SO_{2n+1} , Sp_{2n} и SO_{2n} соответственно.

Эти многочлены можно рассматривать как элементы кольца

$$\mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots; p_1(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \dots], \quad (*)$$

где $p_i(\mathbf{x})$ — степенные суммы, то есть они являются многочленами по переменным $\mathbf{z}$ и симметрическими функциями по переменным $\mathbf{x}$. При таком представлении все их коэффициенты положительны.

В работе Е. Ю. Смирнова и А. А. Тутубалиной [110] предложены конструкции гс-графов для этих многочленов. Так же, как и стандартные гс-графы, они представляют собой конфигурации псевдолиний, и с каждой такой конфигурацией ассоциирован элемент w группы $\mathcal{B}_\infty$, $\mathcal{C}_\infty$ или $\mathcal{D}_\infty$, а также моном от переменных $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}$. Кроме того, про каждый гс-граф можно сказать, является ли он приведенным или нет. Сумма мономов по всем приведенным гс-графам, ассоциированным с данным элементом w , дает соответствующий многочлен Шуберта.

На множестве гс-графов, ассоциированных с данным элементом w , вводится структура частично упорядоченного множества. С помощью этой конструкции доказывается, что многочлены Шуберта каждого типа образуют базис в кольце $(*)$, а также, что многочлены Шуберта грасмановых элементов являются P - и Q -функциями Шура.

4.11 В-полуинвариантные действия аддитивных групп

Описание групп автоморфизмов алгебраических многообразий — одна из важных проблем алгебраической геометрии. Она имеет множественные приложения в самых различных областях современной математики. Во-первых ограничимся связными группами автоморфизмов. Во-вторых, будем предполагать, что многообразия, на которых мы будем изучать действия, являются сферическими, то есть снабжены действием редуктивной группы G , таким что существует открытая по Зарискому плотная орбита так называемой борелевской подгруппы (то есть максимальной разрешимой связной подгруппы). Хорошо известно, что группы над алгебраически замкнутым полем, у которых разрешимый радикал является унитарной подгруппой, порождаются своими одномерными аддитивными подгруппами. Тем самым, для изучения группы автоморфизмов важной задачей является описание всех аддитивных действий на многообразии.

Примером решения подобной задачи является знаменитый результат Демазюра, который описал все действия аддитивной группы, нормализуемые действием тора на торическом многообразии. Ответ был дан в терминах так называемых корней Демазюра. А именно, им было описано множество весов полуинвариантных локально-нильпотентных дифференцирований, а также показано каким образом могут быть реализованы эти действия. Естественной задачей было бы обобщение этого вопроса на более общий класс многообразий, таких как сферические. В случае торического многообразия $G=B=T$, поэтому не совсем ясно, что является правильным аналогом T -инвариантного локально-нильпотентного дифференцирования (ЛНД). Тем не менее,

видно, что Т-инвариантных ЛНД на сферическом многообразии слишком много, а G-инвариантных ЛНД — слишком мало. Тем самым, единственным классом, интересным для описания, является класс В-инвариантных локально-нильпотентных дифференцирований.

В работе 2021 г. Р.С.Авдеева и И.В.Аржанцева была сформулирована, описанная выше задача, доказаны начальные свойства многообразий, снабженных В-инвариантными ЛНД, а также построено множество ЛНД для орисферических многообразий. Заметим, что последнее множество содержало ЛНД для каждого веса потенциально возможного для ЛНД, тем не менее, было совершенно очевидно, что оно не исчерпывало множество всех В-инвариантных ЛНД.

Сотрудник Лаборатории В.С.Жгун совместно с Р.С.Авдеевым продолжил исследования множества В-инвариантных ЛНД. Были получены следующие результаты.

Согласно результатам Луны, Кнопа и Бриона имеет место классификация множества В-инвариантных, но не G-инвариантных дивизоров, которые составляют типы (Т),(U),(N). Нами было найдено геометрическое доказательство, того, какие из типов должны быть неподвижны относительно В-нормализуемого аддитивного действия, а именно, дивизоры типов (U) и (N) должны быть всегда неподвижны, а тип (Т) может быть как неподвижным, так и двигаться с помощью аддитивного действия. Заметим, что этот результат был также параллельно получен в работе Р.С.Авдеева и И.В.Аржанцева алгебраическим методом, основанным на результатах Луны. Также нами была доказана теорема об описании локально-нильпотентных дифференцирований на так называемой инвариантной открытой клетке из теоремы о Локальной структуре с дополнительным условием, что векторное поле, определяемое этим дифференцированием касается сечения для действия максимальной унипотентной подгруппы. Более того, была доказана теорема о продолжении, дифференцирований с открытой клетки на все многообразие для дифференцирований достаточно большого веса. Это позволяет доказать гипотезу из работы Р.С.Авдеева и И.В.Аржанцева о том, что для G-инвариантного дивизора при определенных комбинаторных условиях найдется унипотентное действие, которое не оставляет его инвариантным.

4.12 Теоремы типа Кэли-Бахараша в форме Гриффитса-Харриса и их обобщения

Совместно с Н.Бутом (студентом математического факультета ВШЭ), сотрудником Лаборатории Жгуном В.С. были исследованы различные варианты обобщений классической теоремы Кэли-Бахараша. Одно из обобщений этой теоремы принадлежит Гриффитсу и Харрису: обращается в нуль во всех точках множества нулей регулярного сечения векторного расслоения ранга n за исключением разве что одной одной точки, то оно обращается в нуль также в оставшейся точке. На сегодняшний день есть несколько вариантов обобщения этой теоремы на случай нерегулярного сечения, одно принадлежит Муну и Ли. Техника доказательства их теоремы основана на конструкции

обобщенного вычета, Другое обобщение принадлежит Айну и Лазарсфельду и основано на резольвенте Шкоды для пучков мультипликаторов. В свою очередь первое доказательство использует аналитическую технику, а второе чисто алгебраическое. Нашей целью было дать алгебраический подход к доказательству Муна и Ли. Для этого мы разработали подход, основанный на применении спектральной последовательности гиперкогомологий. Хотя результаты не приняли окончательную форму, многие детали доказательства, основанного на указанном подходе были завершены.

4.13 Лагранжевы расслоения и многообразия Бовиля-Мукаи

Лагранжевы расслоения, или, говоря языком математической физики, вполне интегрируемые системы, дают один из наиболее плодотворных подходов к геометрии голоморфно симплектических многообразий. В комплексной размерности два, сичерь на КЗ-поверхностях, лагранжево расслоение задаётся пучком эллиптических кривых, и тем самым их изучение является частным случаем науки об эллиптических поверхностях.

Сотрудник Лаборатории Вербицкий в работе [114] нашёл обобщение скручивания Шафаревича–Тейта, широко применяемого в теории эллиптических поверхностей, на лагранжевы расслоения на голоморфных симплектических многообразиях произвольной размерности. Это так называемая вырожденная твисторная деформация. В первом порядке она может быть задана следующим образом: голоморфная симплектическая форма определяет изоморфизм $T \rightarrow \Omega^1$ касательного расслоения с кокасательным, и тем самым отождествление $H^1(T) \rightarrow H^1(\Omega^1) \cong H^{1,1}$; тогда подъём $(1,1)$ -класса с базы задаёт деформацию первого порядка. Это и есть вырожденная твисторная деформация.

Заметим, что по теореме Мацуситы на базе лагранжева расслоения на неприводимо голоморфно симплектическом многообразии X имеется лишь единственный $(1,1)$ -класс с точностью до пропорциональности (будем обозначать его η). Тем самым на локусе в пространстве периодов, параметризующем голоморфно симплектические многообразия с лагранжевым расслоением (этот локус является дивизором, как показал Мацусита [113]), возникает слоение. Его слои суть целые кривые, параметризующие вырожденную твисторную деформацию. Если пространство периодов изоморфно $\text{Gr}_{++}(H^2, q)$, где q — форма Бовиля–Богомолова–Фуджики на H^2 , а дивизор многообразий с лагранжевым расслоением изоморфен $\text{Gr}_{++}(\eta^\perp, q|_{\eta^\perp}) \subset \text{Gr}_{++}(H^2, q)$, то пространство слоёв вырожденной твисторной деформации изоморфно $\text{Gr}_{++}(\eta^\perp/\eta)$ (учитывая, что $q(\eta, \eta) = 0$). Как однородное пространство это последнее изоморфно $\text{SO}(2, b_2 - 4)/\{\text{SO}(2) \times \text{SO}(b_2 - 4)\}$. Мы будем называть его пространством периодов полуполяризованных голоморфно симплектических многообразий, другое его название — пространство периодов Алексева. Если группа классов отображений X действует на $\text{Gr}_{++}(H^2, q)$ как арифметическая подгруппа в $\text{SO}(3, b_2 - 3)$, и орбиты этого действия плотны, то стабилизатор вектора $\eta \in H^2$ в ней является параболической подгруппой, отображающейся в $\text{SO}(2, b_2 - 4)$ с абелевым ядром. Тем самым, встаёт вопрос о том,

как действует стабилизатор вектора η на пространстве периодов полуполяризованных голоморфно симплектических многообразий. Если образ стабилизатора вектора η исчерпывает целочисленную ортогональную группу решётки $\eta^\perp/\eta$, то фактор, по теореме Бейли–Бореля, является квазипроективным многообразием. Вообще же говоря, это некоторое его накрытие. Имеет смысл говорить о пространстве модулей полуполяризованных голоморфно симплектических многообразий с данным полуобильным вектором η .

То, каким именно является это пространство модулей, может зависеть от геометрии многообразия X , а также от того, в какой орбите действия группы классов отображений на когомологиях лежит полуобильный вектор. Как показал аффилированный сотрудник Лаборатории Р. Деев, в этом свете можно интерпретировать один результат Маркмана [12], для формулировки которого потребуется напоминание некоторых определений.

Пусть $(S, |C|)$ — КЗ-поверхность с обильной линейной системой кривых рода g . Многообразие Бовиля–Мукаи называется пространство модулей стабильных (скажем, относительно поляризации, задаваемой C) пучков с вектором Мукаи $(0, [C], 1 - g + d)$ для некоторого выбора степени d . Общий такой пучок есть линейное расслоение степени d на кривой $C \in |C|$, рассматриваемый как пучок кручения на S . Многообразие Бовиля–Мукаи допускает лагранжево расслоение $\pi: \mathbf{BM}(S, L) \rightarrow \mathbf{P}(|C|)$, сопоставляющее пучку его носитель, кривую рода g на S . Если $C \subset S$ гладкая кривая рода g , $\pi^{-1}(C)$ изоморфно якобиану кривой C . Многообразие Бовиля–Мукаи имеет деформационный класс схемы Гильберта g точек на КЗ-поверхности. Тем самым, конструкцию Бовиля–Мукаи можно воспринимать как отображение из пространства периодов КЗ-поверхностей с поляризацией рода g в пространство периодов полуполяризованных голоморфно симплектических многообразий типа $\mathbf{Hilb}^g(K3)$. Поскольку $b_2(\mathbf{Hilb}^g) = 23$, а $b_2(K3) = 22$, размерности обоих этих пространств периодов равны 19. Группа классов отображений S действует на $\mathbf{BM}(S, |C|)$, сохраняя π , и потому отображается в стабилизатор вектора $\eta \in H^2(\mathbf{BM}(S, |C|))$. Пространство модулей КЗ-поверхностей с поляризацией рода g , тем самым, накрывает пространство модулей лагранжевых расслоений на многообразии типа $\mathbf{Hilb}^g$ с полуполяризацией типа Бовиля–Мукаи. Иными словами, всякое лагранжево расслоение на голоморфно симплектическом многообразии деформационного типа схемы Гильберта, при выполнении некоторых численных условий, является вырожденной твисторной деформацией расслоения Бовиля–Мукаи. В частности, гладкие слои его суть якобианы кривых, лежащих на КЗ-поверхности. Это и составляет результат Маркмана. С точки зрения математической физики деформация к расслоению Бовиля–Мукаи является далеко идущим обобщением разделения переменных в дифференциальных уравнениях.

Явные методы, которыми пользовался Маркман, менее мощны, чем предложенный Деевым метод, использующий пространства модулей полуполяризованных голоморфно симплектических многообразий. Так, применяя рассуждение выше к так на-

зываемому многообразию Дебарра, получаемого аналогично многообразию Бовиля–Мукаи с заменой КЗ-поверхности на абелеву поверхность, можно доказать аналог теоремы Маркмана для лагранжевых расслоений на голоморфно симплектических многообразиях, деформационно эквивалентных обобщённому многообразию Куммера.

4.14 Лемма Мозера и теорема Вайнштейна

Рассмотрим комплексное многообразие M с голоморфно-симплектической формой $\Omega \in H^0(M, \Omega_M^2)$, то есть такой 2-формой, что $d\Omega = 0$ и Ω невырождена в каждой точке многообразия M . Предположим, что $Z \subset M$ компактное лагранжево подмногообразие, то есть такое гладкое комплексное подмногообразие, что $\Omega|_Z = 0$. Хотелось бы изучить локальную геометрию многообразия M в малой окрестности Z .

Напомним (см., например, [119, глава 3]), что в вещественном случае, то есть когда M — вещественное симплектическое многообразие, а Z — компактное лагранжево подмногообразие, справедлива теорема Вайнштейна. Эта теорема утверждает, что Z имеет окрестность, симплектоморфную окрестности нулевого сечения в тотальном пространстве кокасательного расслоения T^*Z . Последнее, как хорошо известно, имеет канонически определенную симплектическую структуру. В случае голоморфно-симплектических многообразий аналогичное теореме Вайнштейна утверждение неверно. Для того, чтобы построить контрпример, достаточно взять в качестве M эллиптическую КЗ-поверхность, такую что эллиптическое расслоение не является изотривиальным, а в качестве Z — один из слоев этого эллиптического расслоения. Тем не менее, в некоторых специальных случаях голоморфный аналог теоремы Вайнштейна может быть справедлив. Сотрудник Лаборатории М. Вербицкий и аффилированный сотрудник Лаборатории А. Солдатенков изучили данный вопрос при дополнительном предположении, что M допускает голоморфный морфизм на штейново пространство, который стягивает Z в точку. Известно (см. [117]), что в данном случае Z изоморфно проективному пространству. Данный частный случай важен, так как часто встречается при изучении гиперкэлеровых многообразий (см., например [118]).

Более точно, мы предполагаем, что

$$\rho: M \rightarrow B$$

бимероморфный морфизм на штейново комплексное пространство B , такой что Z является исключительным множеством ρ . В этом случае известно, см. [115], что B имеет рациональные особенности, и, следовательно, $H^i(M, \mathcal{O}_M) = 0$ при $i > 0$. Так как нас интересует малая окрестность Z , мы можем, уменьшив M , считать, что Z является деформационным ретрактом M .

Мы применяем к подмногообразию Z известную конструкцию деформации к нормальному конусу, см., например, [116]. А именно, рассмотрим комплексное многообразие $M \times \mathbb{C}$ и обозначим через $\hat{M}$ раздутие этого многообразия в подмногообразии $Z \times \{0\}$. Обозначим через $\mathcal{M}$ открытое подмножество в $\hat{M}$, являющееся дополнением к собствен-

ному прообразу подмногообразия $M \times \{0\}$ в $\hat{M}$. Обозначим через

$$\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$$

композицию морфизма раздутья и проекции на сомножитель $\mathbb{C}$. Тогда π является гладким семейством комплексных многообразий, и все его слои $\mathcal{M}_t$ при $t \neq 0$ изоморфны M , а слой $\mathcal{M}_0$ изоморфен тотальному пространству кокасательного расслоения Ω_Z^1 .

Так как $\Omega|_Z = 0$, класс когомологий $[\Omega] \in H^2(M, \mathbb{C})$ нулевой (так как Z является деформационным ретрактом M), то есть форма Ω точна. Используя то, что $H^1(M, \mathcal{O}_M) = 0$, мы находим голоморфную 1-форму β , такую что $\Omega = d\beta$. Форма β определяет сечение расслоения $\Omega_M^1|_Z$, которое мы обозначим через β_Z . Используя свойства морфизма ρ , мы доказываем, что существует голоморфная функция f на M , такая что $(df)_Z = \beta_Z$ как сечения расслоения $\Omega_M^1|_Z$. Полагая $\alpha = \beta - df$, мы получаем, что $\Omega = d\alpha$, и кроме того $\alpha_Z = 0$.

Далее мы показываем, что 2-форма

$$\frac{1}{t} \left(\pi^* \Omega - \frac{dt}{t} \wedge \pi^* \alpha \right)$$

является голоморфной, ее ограничения на слои $\mathcal{M}_t$ при $t \neq 0$ пропорциональны Ω , а ограничение на $\mathcal{M}_0$ является голоморфно-симплектической формой в некоторой окрестности нулевого сечения.

К полученному семейству голоморфных 2-форм мы применяем голоморфный аналог леммы Мозера, см. [120]. В результате мы получаем, что некоторая окрестность нулевого сечения в тотальном пространстве кокасательного расслоения Ω_Z^1 симплектоморфна некоторой окрестности Z в M . Таким образом, мы показали, что в рассматриваемой ситуации справедлив голоморфный аналог теоремы Вайнштейна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что по результатам проведенных работ, описанным в настоящем отчете, можно сделать следующие краткие выводы. Во-первых, все запланированные на год работы были Лабораторией полностью и успешно проведены. Во-вторых, работы выполнены на самом высоком научно-техническом уровне, сравнимым с лучшими достижениями в данной области и в чем-то даже превосходящем их. В-третьих, работы могут быть и будут успешно применены в дальнейших работах по теоретической математике. В-четвертых, как и с любыми другими работами в области теоретической математики, непосредственное внедрение их в текущую технико-экономическую деятельность не представляется возможным, и в планы не входит.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] J. Balogh, J. Solymosi, On the number of points in general position in the plane, *Discrete Analysis* 2018:16, 20 pp.
- [2] A. A. Beilinson. Coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$ and problems of linear algebra. *Functional Analysis and Its Applications*, 12(3):214–216, July 1978.
- [3] A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, *Faisceaux Pervers*, *Asterisque* 100, 1982.
- [4] A. Blokh, L. Oversteegen, V. Timorin, Upper bounds for the moduli of polynomial-like maps, preprint.
- [5] A. Blokh, A. Cheritat, L. Oversteegen, V. Timorin Location of Siegel capture polynomials in parameter spaces, *Nonlinearity* 2021. Vol. 34. No. 4. P. 2430–2453.
- [6] A. Blokh, L. Oversteegen, V. Timorin, Slices of the parameter space of cubic polynomials, to appear in the *Transactions of the AMS*. DOI: <https://doi.org/10.1090/tran/8519>
- [7] A. Blokh, L. Oversteegen, V. Timorin, Cutpoints of Invariant Subcontinua of Polynomial Julia Sets, to appear in *Arnold Mathematical Journal*, <https://link.springer.com/article/10.1007/s40598-021-00186-8>
- [8] А. И. Бондал, И. Ю. Ждановский, Теория гомотопов в применении к несмещенным базисам, гармоническому анализу на графах и превратным пучкам, *УМН*, 76:2(458) (2021), 3-70; *Russian Math. Surveys*, 76:2 (2021), 195-259

- [9] A. Bondal, A. Rosly, Derived categories for complex-analytic manifolds, preprint IPMU11-0117 (Kashiwa, 2011)
- [10] William Crawley-Boevey, On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspace and sum zero, *Duke Math. J.* Volume 118, Number 2 (2003), 339-352.
- [11] Paul M. Cohn, *Free rings and their relations*, Academic Press, London, New York, 1971.
- [12] Alexey Elagin, Valery A. Lunts, “Derived categories of coherent sheaves on some zero-dimensional schemes”, *Journal of Pure and Applied Algebra* 106939 (2021), published online.
- [13] A V Fonarev. Minimal Lefschetz decompositions of the derived categories for Grassmannians. *Izvestiya: Mathematics*, 77(5):1044–1065, oct 2013.
- [14] Anton Fonarev. Full exceptional collections on Lagrangian Grassmannians, 2019.
- [15] José Luis González, Okounkov bodies on projectivizations of rank two toric vector bundles, *Journal of Algebra*, 330 (2011), no. 1, 322–345.
- [16] Lyalya Guseva. On the derived category of $\mathbf{IGr}(3,8)$. *arXiv e-prints*, page arXiv:1810.07777, Oct 2018.
- [17] Mikhail Kapranov. On the derived category of coherent sheaves on Grassmann manifolds. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 48(1):192–202, 1984.
- [18] V. Kiritchenko, Push-pull operators on convex polytopes, preprint arXiv:2012.15690 [math.AG], to appear in IMRN
- [19] V. Kiritchenko, Newton–Okounkov polytopes of Bott–Samelson varieties as Minkowski sums, preprint arXiv:1801.00334 [math.AG]
- [20] D. Kleitman, On Dedekinds problem: the number of monotone boolean functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21, (1969), 677–682.
- [21] Kocherova A.S., Zhdanovskiy I.Yu. Some algebraic and geometric constructions in quantum information theory, *AIP Conference Proceedings* 2362, 060004 (2021).
- [22] Alexander Kuznetsov. Exceptional collections for Grassmannians of isotropic lines. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 97(1):155–182, 2008.
- [23] Alexander Kuznetsov. Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities. *Selecta Math. (N.S.)* 13 (2008), no. 4, 661-696.

- [24] Alexander Kuznetsov. Derived categories of cubic fourfolds. Cohomological and geometric approaches to rationality problems, 219-243, Progr. Math., 282, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2010.
- [25] Alexander Kuznetsov. Simultaneous categorical resolutions. Preprint math.AG/2101.06943, to appear in Math. Zeitschrift
- [26] Alexander Kuznetsov and Alexander Polishchuk. Exceptional collections on isotropic Grassmannians. Journal of the European Mathematical Society, 018(3):507–574, 2016.
- [27] Alexander Kuznetsov and Maxim Smirnov. On residual categories for Grassmannians. arXiv preprint arXiv:1802.08097, 2018.
- [28] L. Milicevic, Sets in almost general position, Combinatorics, Probability and Computing, Volume 26, Issue 5, 720–745.
- [29] Amnon Neeman, Andrew Ranicki, “Noncommutative localisation in algebraic K-theory I”, Geometry and Topology, 8 (2004), 1385–1425.
- [30] J. Noel, A. Scott, B. Sudakov, Supersaturation in posets and applications involving the container method, J. Combin. Theory, Ser. A 154 (2018), 247–284.
- [31] Alexander Polishchuk and Alexander Samokhin. Full exceptional collections on the Lagrangian Grassmannians $\mathbf{LG}(4,8)$ and $\mathbf{LG}(5,10)$. Journal of Geometry and Physics, 61(10):1996–2014, 2011.
- [32] C. Psariudakis, Homological theory of recollements of abelian categories, J.of Algebra, ISSN: 0021-8693, Vol: 398, Page: 63-110
- [33] Alexander Samokhin. Communications of the Moscow Mathematical society: The derived category of coherent sheaves on $\mathbf{LG}_3^c$. Russian Mathematical Surveys - RUSS MATH SURVEY-ENGL TR, 56:592–594, 01 2001.
- [34] I. Yu. Zhdanovskiy, Homotopes of finite-dimensional algebras, Communications in Algebra, DOI: 10.1080/00927872.2020.1792918
- [35] А. С. Кочерова, И. Ю. Ждановский, Некоторые алгебраические и геометрические аспекты квантовых измерений, Математика квантовых технологий, Сборник статей, Труды МИАН, 313, МИАН, М., 2021, 109-123; Proc. Steklov Inst. Math., 313 (2021), 99-112
- [36] J. Lurie, Higher Algebra, 2017, <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf>; (дата обращения: 01.11.2021)
- [37] D. Gepner, R. Haugseng, Enriched ∞ -categories via non-symmetric ∞ -operads, Adv. in Math. 279 (2015), 575–716.

- [38] L. Soukhanov, A Surface Degeneration With Non-Collapsible Contractible Dual Complex, препринт [arxiv:2012.10995](#).
- [39] A. Beauville. Variétés kähleriennes dont la première classe de chern est nulle., J. Differential Geom., 18:755-782, 1983.
- [40] Ryushi Goto. Deformations of calibrations, Calabi-Yau, HyperKähler, G_2 and Spin(7) structures, [arXiv:math/0204288v2](#)
- [41] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin. Fedosov quantization in algebraic context, [arXiv:math/0309290v4](#)
- [42] M. Kapranov. Rozansky-Witten invariants via Atiyah classes, [arXiv:alg-geom/9704009v2](#)
- [43] Marco Manetti. Lie description of higher obstructions to deforming submanifolds, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 6 (2007) 631-659
- [44] Ryszard Nest, Boris Tsygan. Deformations of symplectic Lie algebroids, deformations of holomorphic symplectic structures, and index theorems, [arXiv:math/9906020v1](#)
- [45] Grigory Papayanov. Goto’s deformation theory of geometric structures, a Lie-theoretical description, [arXiv:1607.07509v1](#)
- [46] C. Shramov, Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces, Eur. J. Math., 7:2 (2021), 591–612
- [47] A. Trepalin, Quotients of Severi–Brauer surfaces, preprint, [arXiv:2107.14530](#) (2021)
- [48] Ivan Cheltsov, On factoriality of nodal threefolds, J. Algebraic Geom. 14 (2005), no. 4, 663–690.
- [49] P. Deligne and N. Katz, Groupes de monodromie en géométrie algébrique. II, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 340, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 II), Dirigé par P. Deligne et N. Katz.
- [50] Serge Lvovski, On curves and surfaces with projectively equivalent hyperplane sections, Canad. Math. Bull. 37 (1994), no. 3, 384–392.
- [51] Ф. Л. Зак. О поверхностях с нулевыми циклами Лефшеца. Матем. заметки, 13:6 (1973), 869–880.
- [52] Serge Lvovski, On non-projective small resolutions, [arxiv:2104.11901](#).

- [53] Y. Chen, C. Shramov, Automorphisms of surfaces over fields of positive characteristic, arXiv:2106.15906.
- [54] C. Shramov, Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces, *Eur. J. Math.*, 7:2 (2021), 591–612.
- [55] В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, Об автоморфизмах квазигладких взвешенных полных пересечений, *Матем. сб.*, 212:3 (2021), 112–127.
- [56] В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, Гладкие полные пересечения Фано основной серии в торических многообразиях, *Матем. заметки*, 109:4 (2021), 590–596.
- [57] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, In *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, *Progr. Math.*, 269 (2009), 443–548.
- [58] I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, Which quartic double solids are rational? *J. of Alg. Geom.* 2019, 28, 201–243
- [59] Yu. Prokhorov, G-Fano threefolds, I *Advances in Geometry*, 2013, 13, 389–418
- [60] I. V. Dolgachev and V. A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, vol. 269 of *Progr. Math.*, 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.
- [61] K. Loginov. Standard models of degree 1 del Pezzo fibrations. *Moscow Mathematical Journal*, vol. 18 (4), 721–737 (2018).
- [62] K. Loginov, E. Yasinskiy. On the derived length of finite groups acting on rationally connected threefolds. In preparation.
- [63] Yu. Prokhorov. Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3. *J. Algebraic Geom.* 21, 563–600, 2009.
- [64] Yu. Prokhorov, C. Shramov. Jordan property for Cremona groups. *Amer. J. Math.*, 138 (2), 403–418, 2016.
- [65] J.-P. Serre. A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field. *Mosc. Math. J.* 9 (2009), no. 1, 193–208.
- [66] S. Boissière, M. Nieper-Wisskirchen, A. Sarti, Higher dimensional Enriques varieties and automorphisms of generalized Kummer varieties, *J. Math. Pures Appl* 95 (2011), 553–563

- [67] S. Boissière, A. Cattaneo, M. Nieper-Wisskirchen, A. Sarti, The automorphism group of the Hilbert scheme of two points on a generic projective K3 surface, *K3 Surfaces and Their Moduli. Progress in Mathematics*, 315 (2015), Birkhäuser
- [68] K. Oguiso, S. Schröer, Enriques manifolds, *J. Reine Angew. Math.* 661 (2011), 215–235
- [69] Alberto Alzati and Marina Bertolini. On the rationality of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$. *Matematiche*, 47(1):63–74, 1992.
- [70] Olivier Benoist and Olivier Wittenberg. Intermediate Jacobians and rationality over arbitrary fields. *ArXiv e-print*, 1909.12668, sep 2019.
- [71] Olivier Benoist and Olivier Wittenberg. The Clemens–Griffiths method over non-closed fields. *Algebraic Geometry*, 7(6):696–721, 2020.
- [72] Brendan Hassett and Yuri Tschinkel. Rationality of complete intersections of two quadrics. *ArXiv e-print*, 1903.08979, 2019.
- [73] Alexander Kuznetsov and Yuri Prokhorov. Rationality of Fano threefolds over non-closed fields. *Arxiv e-print*, 1911.08949, 2019. to appear in *Amer. J. Math.*
- [74] Alexander Kuznetsov and Yuri Prokhorov. Rationality of Mukai varieties over non-closed fields. In Farkas G., van der Geer G., Shen M., and Taelman L., editors, *Rationality of Varieties*, volume 342 of *Progress in Mathematics*, pages 249–290. Birkhäuser, Cham, 2021.
- [75] Alexander Kuznetsov and Yuri Prokhorov. Rationality over non-closed fields of Fano threefolds with higher geometric Picard rank. *Arxiv e-print*, 2103.02934, March 2021. *arXiv*: 2103.02934.
- [76] Yuri Prokhorov. G-Fano threefolds, II. *Adv. Geom.*, 13(3):419–434, 2013.
- [77] Ivan Cheltsov, Jihun Park, Yuri Prokhorov, and Mikhail Zaidenberg. Cylinders in Fano varieties. *EMS Surv. Math. Sci.*, 8(1-2):39–105, 2021.
- [78] V. A. Iskovskikh and Yu. Prokhorov. Fano varieties. *Algebraic geometry V*, volume 47 of *Encyclopaedia Math. Sci.* Springer, Berlin, 1999.
- [79] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. Group actions on affine cones. In Peter Russell’s Festschrift, *Proceedings of the conference on Affine Algebraic Geometry held in Professor Russell’s honour, 1–5 June 2009*, McGill Univ., Montreal., volume 54 of *Centre de Recherches Mathématiques CRM Proc. and Lect. Notes*, pages 123–163, 2011.
- [80] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, and M. Zaidenberg. $\mathbf{G}_a$ -actions on affine cones. *Transformation Groups*, 18(4):1137–1153, 2013.

- [81] P. Osipov Selfsimilar Hessian manifolds, preprint, arXiv:1908.01731, journal of Geometry and Physics.
- [82] P. Osipov Selfsimilar Hessian and conformally Kahler manifolds, preprint, arXiv:2012.03791, submitted to Differential Geometry and its Applications.
- [83] T. Fei, D. H. Phong, S. Picard, and X.W. Zhang, Estimates for a geometric flow for the Type IIB string, arXiv: 2004.14529, to appear in Math. Ann. (2021).
- [84] R.S. Hamilton, A compactness property for solutions of the Ricci Flow, Amer. J. Math. 117, No. 3 (1995) 545-572.
- [85] R.S. Hamilton, Formation of singularities of the Ricci Flow, Surveys in Differential Geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), Int. Press.
- [86] Nikita Klemmyatin, Convergence of Hermitian manifolds and the Type IIB flow, arXiv:2109.00312
- [87] D.H. Phong, Geometric partial differential equations from unified string theories, arXiv:1906.03693.
- [88] M. Kapovich, J.J. Millson, The symplectic geometry of polygons in euclidean space, J. Diff. Geom., 4 (1996), 479–513 (<https://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/papers.html>).
- [89] A. Klyachko, Spatial polygons and stable configurations of points in the projective line, Proc. of the 8th Algebraic Geometry Conference, Yaroslavl' (1992), 67–84
- [90] I.Kh. Sabitov, Algebraic methods for solution of polyhedra, Russian Math. Surv. 66, Issue 3 (2011), 3–66
- [91] <https://gauss.math.yale.edu/~rwk25/openprobs/index.html> (дата обращения: 01.11.2021)
- [92] <https://mathoverflow.net/q/283921> (дата обращения: 01.11.2021)
- [93] I. Pak, A. Glazyrin, Domes over curves, arXiv preprint arXiv:2005.02555 (2020)
- [94] A. I. Mal'cev, On a class of homogeneous spaces, AMS Translation No. 39 (1951).
- [95] A. Soldatenkov, Holonomy of the Obata connection on $SU(3)$, Int. Math. Res. Notices (2012), Vol. 2012 (15), 3483-3497
- [96] A. S. Buch, A Littlewood-Richardson rule for the K-theory of Grassmannians, Acta Math. 189 (2002), 37-38.
- [97] V.I.Danilov and G.A. Koshevoy, Arrays and the combinatorics of Young tableaux, Russian Mathematical Surveys vol.60, 2005, no. 2, 269-334.

- [98] Sergey Fomin and Anatol N. Kirillov. Grothendieck polynomials and the Yang-Baxter equation. 6th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 24 1994.
- [99] Thomas Lam and Pavlo Pylyavskyy. Combinatorial Hopf algebras and K-homology of Grassmannians. Int. Math. Res. Not. IMRN, 2007(24):Art. ID rnm125, 48, 2007.
- [100] Jason Bandlow and Jennifer Morse. Combinatorial expansions in K-theoretic bases. Electron. J. Combin., 19(4):Paper 39, 27, 2012.
- [101] D. Yeliussizov, Symmetric Grothendieck polynomials, skew Cauchy identities, and dual filtered Young graphs, J. Combin. Theory Ser. A 161 (2019), 453-485.
- [102] Sami Assaf, Dominic Searles, “Schubert polynomials, slide polynomials, Stanley symmetric functions and quasi-Yamanouchi pipe dreams”, Adv. Math., 306 (2017), 89-122.
- [103] Nantel Bergeron, Sara Billey, “RC-graphs and Schubert polynomials”, Experiment. Math., 2:4 (1993), 257-269.
- [104] Sara Billey and Mark Haiman. “Schubert polynomials for the classical groups”, Journal of the American Mathematical Society, 8(2):443-482, 1995.
- [105] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, “Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P ”, УМН, 28:3(171) (1973), 3-26; Russian Math. Surveys, 28:3 (1973), 1-26.
- [106] Sergey Fomin, Anatol N. Kirillov, “The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials”, Proceedings of the 5th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Florence, 1993), 153, 1996, 123-143.
- [107] Allen Knutson, Ezra Miller, “Subword complexes in Coxeter groups”, Adv. Math., 184:1 (2004), 161-176.
- [108] Alain Lascoux, Marcel-Paul Schützenberger, “Polynômes de Schubert”, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 294:13 (1982.), 447-450.
- [109] Oliver Pechenik, Dominic Searles, “Decompositions of Grothendieck polynomials”, Int. Math. Res. Not. IMRN, 10 (2019), 3214-3241.
- [110] Evgeny Smirnov and Anna Tutubalina, “Pipe dreams for Schubert polynomials of the classical groups”, arXiv preprint arXiv:2009.14120 (2020).
- [111] Е. Ю. Смирнов, А. А. Тутубалина, “Слайд-многочлены и комплексы подслов”, Матем. сб., 212:10 (2021), 131-151

- [112] Eyal Markman. Lagrangian fibrations of holomorphic-symplectic manifolds of $K3^{[n]}$ -type, in: Frühbis-Krüger A., Kloosterman R., Schütt M. (eds) Algebraic and complex geometry, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 71. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05404-9_10
- [113] Daisuke Matsushita. On deformations of Lagrangian fibrations, in: Faber C., Farkas G., van der Geer G. (eds) K3 surfaces and their moduli, Progress in Mathematics, vol. 315. Birkhäuser, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-29959-4_9
- [114] Misha Verbitsky. Degenerate twistor spaces for hyperkahler manifolds, Journal of Geometry and Physics, Volume 91, May 2015, Pages 2-11
- [115] A. Beauville, Symplectic singularities, Invent. Math. 139 (2000), no. 3, 541–549
- [116] W. Fulton, Intersection theory, Springer-Verlag, Berlin, 1998
- [117] Y. Hu, S.-T. Yau, HyperKähler manifolds and birational transformations, Adv. Theor. Math. Phys. 6 (2002), no. 3, 557–574
- [118] D. Huybrechts, Compact hyperkähler manifolds, Calabi-Yau manifolds and related geometries (Nordfjordeid, 2001), 161–225, Universitext, Springer, Berlin, 2003
- [119] D. McDuff, D. Salamon, Introduction to symplectic topology. Second edition, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998, x+486 pp.
- [120] A. Soldatenkov, M. Verbitsky, The Moser isotopy for holomorphic symplectic and C-symplectic structures, arXiv:2109.00935

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В заключении отчета, мы приводим список публикаций лаборатории и список препринтов.

Публикации лаборатории, индексируемые в базе Web of Science

1. [Amerik E., Verbitsky M. Contraction centers in families of hyperkähler manifolds](#) // *Selecta Mathematica, New Series*. 2021. Vol. 27. [doi](#)
2. [Cheltsov I., Martinez-Garcia J. Stable Polarized del Pezzo Surfaces](#) // *International Mathematics Research Notices*. 2020. Vol. 2020. No. 18. P. 5477-5505. [doi](#)
3. [Cheltsov I., Prokhorov Y. Del Pezzo surfaces with infinite automorphism groups](#) // *Algebraic Geometry*. 2021. Vol. 8. No. 3. P. 319-357. [doi](#)
4. [Finkelberg M., Fujita R. Coherent IC-sheaves on type A_n affine Grassmannians and dual canonical basis of affine type A₁](#) // *Representation Theory*. 2021. Vol. 25. P. 67-89. [doi](#)
5. [Klemyatina N. Dolbeault cohomology of compact complex manifolds with an action of a complex Lie group](#) // *Journal of Geometry and Physics*. 2020. Vol. 157. P. 103823-. [doi](#)
6. Etingof P., Ostrik V. [On the Frobenius functor for symmetric tensor categories in positive characteristic](#) // *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*. 2021. No. 773. P. 165-198. [doi](#)
7. Ostrik V., Etingof P., Brundan J., Entova-Aizenbud I. [Semisimplification of the category of tilting modules for GL_n](#) // *Advances in Mathematics*. 2020. Vol. 375. P. 107331-. [doi](#)
8. Polishchuk A. [A_∞-structures associated with pairs of 1-spherical objects and noncommutative orders over curves](#) // *Transactions of the American Mathematical Society*. 2020. Vol. 373. P. 6029-6093. [doi](#)
9. Polishchuk A., Johnson D. [Birational models of M_{2,2} arising as moduli of curves with nonspecial divisors](#) // *Advances in Geometry*. 2021. Vol. 21. No. 1. P. 23-43. [doi](#)
10. Lim Bronson, Polishchuk A. [Bondal–Orlov fully faithfulness criterion for Deligne–Mumford stacks](#) // *Manuscripta Mathematica*. 2021. Vol. 165. P. 469-481. [doi](#)
11. Rumynin D. [D-affinity and rational varieties](#) // *Colloquium Mathematicum*. 2021. Vol. 164. P. 123-131. [doi](#)
12. Rumynin D., Capdeboscq I. [Kac-Moody groups and completions](#) // *Journal of Algebra*. 2020. Vol. 561. P. 131-148. [doi](#)
13. Rumynin D., Hristova K., Capdeboscq I. [Cocompact lattices in locally pro-p-complete rank-2 Kac-Moody groups](#) // *Математический сборник*. 2020. Vol. 211. No. 8. P. 1065-1079. [doi](#)
14. Rumynin D., Taylor J. [Real representations of C₂-graded groups: The antilinear theory](#) // *Linear Algebra and Its Applications*. 2021. Vol. 610. P. 135-168. [doi](#)
15. Rumynin D., Young M. B. [Burnside rings for Real 2-representation theory: The linear theory](#) // *Communications in Contemporary Mathematics*. 2021. Vol. 23. No. 5. [doi](#)
16. [Rogov V. Complex Geometry of Iwasawa Manifolds](#) // *International Mathematical Research Notices*. 2020. Vol. 23. P. 9420-9439. [doi](#)
17. Sechin P., Semenov N. [Applications of the Morava K-theory to algebraic groups](#) // *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*. 2021. Vol. 54. No. 4. P. 945-990. [doi](#)
18. [Смирнов Е. Ю., Тутубалина А. А. Слайд-комплексы и комплексы подслов](#) // *Успехи математических наук*. 2020. Т. 75. № 6(456). С. 177-178. [doi](#)
19. [Смирнов Е. Ю., Тутубалина А. А. Слайд-многочлены и комплексы подслов](#) // *Математический сборник*. 2021. Т. 212. № 10. С. 131-151. [doi](#)
20. [Shramov K., Przyjalkowski V. Smooth Prime Fano Complete Intersections in Toric Varieties](#) // *Математические заметки*. 2021. Vol. 109. No. 4. P. 590-596. [doi](#)
21. Blokh A., Cheritat A., Oversteegen L., [Timorin V. Location of Siegel capture polynomials in parameter spaces](#) // *Nonlinearity*. 2021. Vol. 34. No. 4. P. 2430-2453. [doi](#)

22. [Verbitsky M.](#), Ornea L. [Closed orbits of Reeb fields on Sasakian manifolds and elliptic curves on Vaisman manifolds](#) // *Mathematische Zeitschrift*. 2021. Vol. 299. [doi](#)
23. [Zhdanovskiy I.](#) [Homotopes of finite-dimensional algebras](#) // *Communications in Algebra*. 2021. Vol. 49. No. 1. P. 43-57. [doi](#)
24. Kocherova A., [Zhdanovskiy I.](#) [Some Algebraic and Geometric Aspects of Quantum Measurements](#) // *Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН*. 2021. Vol. 313. P. 99-112. [doi](#)

Публикации лаборатории, индексируемые в базе Scopus

1. [Bogomolov F. A.](#), Fu Hang [On the PGL₂-invariant quadruples of torsion points of elliptic curves](#) // *European Journal of Mathematics*. 2020. Vol. 6. P. 1236-1253. [doi](#)
2. [Shramov K.](#) [Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces](#) // *European Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 7. P. 591-612. [doi](#)
3. Corrêa M., Ferreira A. M., [Verbitsky M.](#) [Classification of holomorphic Pfaff systems on Hopf manifolds](#) // *European Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 7. P. 729-740. [doi](#)
4. Kamenova L., [Verbitsky M.](#) [Holomorphic Lagrangian subvarieties in holomorphic symplectic manifolds with Lagrangian fibrations and special Kahler geometry](#) // *European Journal of Mathematics*. 2021. [doi](#)
5. [Smirnov E.](#) [Multiple flag varieties](#) // *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 248. No. 3. P. 338-373. [doi](#)
6. [Prokhorov Y.](#) [Quasi-Simple Finite Groups of Essential Dimension 3](#) // *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 257. P. 876-882. [doi](#)

1. [Shramov K., Chen Y. Automorphisms of surfaces over fields of positive characteristic](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
2. [Kuznetsov A. Quadric bundles and hyperbolic equivalence](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
3. [Prokhorov Y., Kuznetsov A. Rationality over non-closed fields of Fano threefolds with higher geometric Picard rank](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
4. [Kuznetsov A., Perry A. Serre functors and dimensions of residual categories](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
5. [Kuznetsov A. Simultaneous categorical resolutions](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
6. [Timorin V., Oversteegen L., Blokh A. A model of the cubic connectedness locus](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
7. [Klemyatina N. Convergence of Hermitian manifolds and the Type IIB flow](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
8. [Timorin V., Oversteegen L., Blokh A. Cutpoints of invariant subcontinua of polynomial Julia sets](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
9. [Timorin V., Shepelevtseva A., Oversteegen L., Blokh A. Modeling core parts of Zakeri slices I](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
10. [Timorin V., Oversteegen L., Haissinsky P., Blokh A. On critical renormalization of complex polynomials](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
11. [Verbitsky M., Abasheva A. Algebraic dimension and complex subvarieties of hypercomplex nilmanifolds](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
12. [Verbitsky M., Ornea L. Compact homogeneous locally conformally Kahler manifolds are Vaisman. A new proof](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
13. [Prokhorov Y., Zaidenberg M. Fano-Mukai fourfolds of genus 10 and their automorphism groups](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
14. [Prokhorov Y. Finite groups of birational transformations](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
15. [Konovalov A. Nilpotent invariance of semi-topological K-theory of dg-algebras and the lattice conjecture](#) / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2021.
16. [Lvovski S. On non-projective small resolutions](#) / Cornell University. Series math "arxiv.org". 2021.
17. [Verbitsky M., Soldatenkov A. The Moser isotopy for holomorphic symplectic and C-symplectic structures](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
18. [Polishchuk A., Kazhdan D. Almost invariant subspaces and operators](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
19. [Prokhorov Y. Conic bundle structures on Q-Fano threefolds](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
20. [Polishchuk A. Extended clutching construction for the moduli of stable curves](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
21. [Polishchuk A., Lekili Y. Homological mirror symmetry for the symmetric squares of punctured spheres](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
22. [Polishchuk A., Kazhdan D. Linear subspaces of minimal codimension in hypersurfaces](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
23. [Polishchuk A., Varolgunes U. On homological mirror symmetry for chain type polynomials](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
24. [Ostrik V., Yu Zhiqiang On the minimal extension and structure of weakly group-theoretical braided fusion categories](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
25. [Polishchuk A., Kazhdan D. Schmidt rank and singularities](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.

26. Polishchuk A., Kazhdan D. [Schmidt rank of quartics over perfect fields](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.
27. Polishchuk A. [\$\mathbb{A}^0|1\$ -torsors, quotients by free \$\mathbb{A}^0|1\$ -actions, and embeddings into \$\Pi\$ -projective spaces and super-Grassmannians \$G\(1|1,n|n\)\$](#) / Cornell University. Series arXiv "math". 2021.