

# Конечные 3-подгруппы в группе Кремоны ранга 3

Александра Кузнецова

Аннотация. Мы рассмотрим 3-подгруппы в группах бирациональных автоморфизмов трехмерных рационально связных многообразий и докажем, что любая 3-подгруппа может быть порождена не более чем пятью образующими. Более того, мы изучим группы регулярных автоморфизмов терминальных горенштейновых трехмерных многообразий Фано и покажем, что за возможным исключением нескольких явно описанных случаев любая 3-подгруппа этой группы может быть порождена четырьмя образующими.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, группа автоморфизмов проективного пространства размерности  $n$  над полем комплексных чисел изоморфна группе  $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ . Если же вместо регулярных автоморфизмов изучать бирациональные, описание группы резко усложнится. Группа бирациональных автоморфизмов проективного  $n$ -мерного пространства над  $\mathbb{C}$ , так называемая *группа Кремоны ранга  $n$*  (мы будем обозначать ее  $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$ ), может быть легко описана только при  $n = 1$ : в этом случае она изоморфна  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ . При больших значениях  $n$  группа становится необозримой. Лишь для ранга два существуют некоторые явные описания, в то время как про старшие ранги известно значительно меньше.

Один из способов изучить необозримо большую группу — это перейти к ее конечным подгруппам. Долгачев и Исковских [6] классифицировали все конечные подгруппы  $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ . Бовиль [1], изучал конечные абелевы  $p$ -подгруппы, то есть подгруппы порядка  $p^k$ , где  $p$  — простое число, в группе Кремоны ранга 2. Точнее, он рассматривал подгруппы вида  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$  в группе Кремоны ранга 2, так называемые элементарные  $p$ -подгруппы. Легко заметить, что ранг произвольной абелевой  $p$ -подгруппы не может превышать максимального ранга  $r$  элементарной  $p$ -подгруппы. Таким образом, из результата Бовиля немедленно выводится следующее утверждение:

**Теорема 1.1.** *Любая абелева  $p$ -подгруппа  $G$  в группе Кремоны ранга 2 над  $\mathbb{C}$  может быть порождена не более чем  $r$  элементами, где*

$$r \leq \begin{cases} 4, & \text{если } p = 2; \\ 3, & \text{если } p = 3; \\ 2, & \text{если } p \geq 5; \end{cases}$$

*и эта оценка точна.*

Прохоров в [15] и [16] доказал ограничения на количество порождающих абелевых  $p$ -подгрупп в группе Кремоны ранга 3 (эти результаты так же описывают ранг элементарных  $p$ -подгрупп, однако, как мы показали выше, из них сразу следуют утверждения для всех абелевых  $p$ -подгрупп). При этом он изучил несколько более широкий класс многообразий, а именно, его описание применимо к подгруппам в группе  $\mathrm{Bir}(X)$  бирациональных автоморфизмов любого рационально связного многообразия  $X$ :

**Теорема 1.2** ([16, Theorem 1.2], [15, Theorem 1.2]). *Пусть  $X$  — проективное рационально связанное трехмерное комплексное многообразие,  $G$  — абелева  $p$ -подгруппа в  $\mathrm{Bir}(X)$ . Тогда  $G$  может*

быть порождена не более чем  $r$  элементами, где

$$r \leq \begin{cases} 6, \text{ и эта оценка точна, если } p = 2; \\ 5, \text{ если } p = 3; \\ 4, \text{ если } p = 5, 7, 11 \text{ или } 13; \\ 3, \text{ и эта оценка точна, если } p \geq 17. \end{cases}$$

Мы не будем ограничиваться случаем абелевых  $p$ -подгрупп, хотя большинство групп все равно окажутся абелевыми. В статье Прохорова и Шрамова [21] описаны все  $p$ -подгруппы группы  $\mathrm{Cg}_3(\mathbb{C})$  для больших значений  $p$ :

**Теорема 1.3** ([21, Theorem 1.5]). *Пусть  $X$  — рационально связное трехмерное комплексное многообразие и  $G \subset \mathrm{Bir}(X)$  любая  $p$ -подгруппа. Тогда, если  $p \geq 17$ , то  $G$  абелева и может быть порождена не более чем тремя образующими.*

Наша цель — дать некоторое описание всем 3-подгруппам групп Кремоны рангов два и три. Следующая теорема следует из классификации Долгачева и Исковских конечных подгрупп в  $\mathrm{Cg}_2(\mathbb{C})$ , но мы выведем ее еще раз.

**Теорема 1.4.** *Пусть  $G$  это любая 3-подгруппа в группе бирациональных автоморфизмов комплексной проективной плоскости. Тогда  $G$  может быть порождена не более чем 3 образующими, и эта оценка точна.*

Главная цель данной статьи — доказать следующее утверждение:

**Теорема 1.5.** *Пусть  $X$  — проективное рационально связное трехмерное комплексное многообразие и  $G$  любая 3-подгруппа группы  $\mathrm{Bir}(X)$ . Тогда верны следующие утверждения.*

1. *Группа  $G$  может быть порождена не более чем 5 образующими.*
2. *Если  $G$  действует регулярными автоморфизмами на некотором минимальном терминальном трехмерном  $G$ -расслоении Мори  $X_0$  (например, на терминальном  $G\mathbb{Q}$ -Фано многообразии с числом Пикара 1) и может быть порождена 4 образующими за возможным исключением следующих двух случаев:*
  - (a)  *$X_0$  это многообразие Фано, количество его негорнштейновых особенностей равно 9, и все они являются циклическими фактор-особенностями типа  $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ .*
  - (b)  *$X_0$  это горнштейново многообразие Фано с числом Пикара 1, индекса 1 и родов 7 или 10, и количество особенностей на  $X_0$  равно 9 или 18.*

Первое утверждение этой теоремы может быть быстро доказано с использованием теоремы 1.2 (см. замечание 3.2). Однако, мы выбираем более сложный и длинный путь, который позволяет нам показать пункт 2 теоремы 1.5. Этот пункт оставляет возможность дальнейшего улучшения оценки на количество образующих 3-подгрупп группы бирациональных автоморфизмов рационально связных трехмерных многообразий.

В нашем случае оказалось невозможным буквально повторить методы оценки количества образующих  $p$ -подгрупп, использованные Прохоровым и Шрамовым [21]. Чтобы получить оценку, они искали на многообразии неподвижную точку относительно действия  $p$ -группы  $G$  и оценивали ее стабилизатор. Однако, в случае, когда  $p = 3$ , такой точки может не быть: в примере 2.6 показано, что 3-группа  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  может действовать на  $\mathbb{P}^2$  без неподвижных точек. Кроме того, на  $\mathbb{P}^2$  может действовать неабелева 3-группа, а именно группа Гейзенберга. Ее вложение в  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  описано в лемме A.5. С другой стороны, в доказательстве теоремы 1.5 используются недавние результаты, дающие оценки на количество горнштейновых терминальных особенностей трехмерных многообразий Фано [18] и [27]. Кроме того, использованы новые результаты, описывающие группы автоморфизмов некоторых гладких многообразий Фано [11].

Из примера 2.8 мы можем заключить, что оценка на количество образующих 3-групп в трехмерном случае никак не меньше 4, то есть наша оценка достаточно адекватна, хотя может быть и не точна. Возможно также, что результат может быть улучшен, если изучать бирациональные

автоморфизмы не произвольного рационально связного многообразия, а проективного пространства (группу Кремоны ранга 3).

План работы таков: в §2 мы перечислим утверждения, необходимые нам для изучения действия 3-подгрупп на многообразиях. В §3 докажем теорему 1.4 и приведем нужные сведения о 3-группах, действующих на некоторых конкретных поверхностях. В §4 мы изучим 3-подгруппы в группах регулярных автоморфизмов трехмерных многообразий Фано и докажем теорему 1.5. В приложении А мы оценим количество образующих 3-подгрупп  $GL_n(\mathbb{C})$  для  $n < 9$  и приведем ряд необходимых нам утверждений, не требующих более сложных методов, чем линейная алгебра.

Все многообразия далее проективны, нормальны и определены над полем  $\mathbb{C}$ . Обозначим за  $\mathfrak{S}_n$  группу перестановок  $n$  элементов, за  $\mathfrak{A}_n$  группу четных перестановок  $n$  элементов, а за  $C_n$  циклическую группу из  $n$  элементов. За  $\rho(X)$  мы будем обозначать ранг группы Пикара  $\text{Pic}(X)$ .

**Благодарность.** Я благодарю своего научного руководителя Константина Шрамова за поставленную задачу, а также за постоянную и неоценимую поддержку. Кроме того, я благодарна Артему Авилову, Андрею Трепалину и Юрию Прохорову за ценные комментарии к тексту статьи. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-11-00121).

## 2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА 3-ГРУПП

В этом параграфе мы сформулируем некоторые свойства 3-групп, точно действующих на алгебраических многообразиях, и приведем примеры таких действий. Для этого мы будем использовать результаты и обозначения из приложения А.

Мы будем называть многообразие  $G$ -многообразием, если группа  $G$  точно действует на нем. Расслоение  $X \rightarrow B$  назовем  $G$ -расслоением, если  $X$  это  $G$ -многообразие и действие  $G$  сохраняет структуру расслоения. Кроме того, для произвольного многообразия  $X$  и его точки  $x$  обозначим за  $T_x$  касательное по Зарисскому пространство к  $X$  в точке  $x$ .

**2.1. Свойства действий групп на многообразиях.** Рассмотрим конечную группу  $G$  и  $G$ -расслоение  $X$  над базой  $B$ , пусть слой  $X$  над общей точкой  $B$  изоморфен  $F$ . Тогда  $G$  включается в следующую точную последовательность:

$$(2.1) \quad 1 \rightarrow G_F \rightarrow G \rightarrow G_B \rightarrow 1,$$

где  $G_F \subset \text{Aut}(F)$  это подгруппа всех автоморфизмов из  $G$ , сохраняющих базу расслоения, а  $G_B \subset \text{Aut}(B)$  это факторгруппа  $G/G_F$ . Это соображение влечет полезное следствие.

**Лемма 2.2.** Пусть  $X$  это некоторое  $G$ -многообразие, где  $G$  это 3-группа, сохраняющая структуру расслоения  $X \rightarrow B$  с общим слоем  $F$ . Если любая 3-подгруппа  $\text{Aut}(F)$  (соответственно  $\text{Aut}(B)$ ) может быть порождена  $n$  (соответственно  $m$ ) образующими, то  $G$  может быть порождена  $n + m$  образующими.

В частности, если  $X$  двулистно накрывает  $B$  и 3-группа  $G$  сохраняет структуру расслоения, то  $G \subset \text{Aut}(B)$ .

*Доказательство.* Поскольку  $G$  конечна и сохраняет структуру расслоения, она включается в точную тройку 2.1. В силу леммы А.2 видно, что если группы  $G_F$  и  $G_B$  можно породить  $n$  и  $m$  элементами соответственно, то группу  $G$  можно породить  $n + m$  элементами.

Кроме того, если  $X \rightarrow B$  — конечное  $n$ -листное накрытие, то  $\text{Aut}(F) \cong \mathfrak{S}_n$ , в частности, если  $n = 2$ , то  $G_F \subset C_2$ . Поскольку  $G$ , а следовательно и  $G_F$  это 3-группа, то  $G_F = 1$  и  $G \subset \text{Aut}(B)$ .  $\square$

Следующее утверждение касается действий конечных групп, сохраняющих некоторую точку многообразия.

**Предложение 2.3** ([14, Lemma 4]). Пусть конечная группа  $G$  действует на многообразии  $X$  и сохраняет некоторую точку  $x$ . Тогда  $G \subset GL(T_x)$ .

В случае, если конечная группа  $G$  действует на многообразии  $X$  лишь бирациональными автоморфизмами, с помощью следующего хорошо известного утверждения можно построить бирациональную модель  $X$ , на которой  $G$  действует регулярными автоморфизмами:

**Предложение 2.4** (см., например, [17, Lemma-Definition 3.1]). *Пусть  $X$  гладкое многообразие. Рассмотрим конечную подгруппу  $G$  в группе  $\text{Bir}(X)$ . Тогда найдется гладкое  $G$ -многообразие  $\tilde{X}$  и  $G$ -эquivариантное бирациональное отображение  $\tilde{X} \dashrightarrow X$ .*

Приведем также описание группы автоморфизмов грассманиана:

**Предложение 2.5** ([4, Theorem I]). *Рассмотрим  $n$ -мерное векторное пространство  $V$ . Тогда  $\text{Aut}(\text{Gr}(k, V)) \cong \text{PGL}(V)$ , если  $n \neq 2k$ . В случае, когда  $n = 2k$ , группа  $\text{PGL}(V)$  является подгруппой индекса 2 в  $\text{Aut}(\text{Gr}(k, V))$ .*

**2.2. Количество образующих 3-групп.** Приведем пример действия 3-группы на поверхности, не сохраняющей ни одной точки (из-за этого мы не можем использовать такую же стратегию, как и в [21]). Здесь  $\mathcal{H}_3$  обозначает группу Гейзенберга, подробно она описана в приложении А.

**Пример 2.6.** Рассмотрим стандартное действие группы Гейзенберга  $\mathcal{H}_3$  в трехмерном пространстве  $V$ . Это действие индуцирует точное действие группы  $C_3 \times C_3$  на проективном пространстве  $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^2$ . Предположим, что точка  $x$  неподвижна относительно этого действия. Тогда линейное подпространство  $W \subset V$  в прообразе  $x$  будет инвариантно относительно  $\mathcal{H}_3$ . С другой стороны, стандартное действие  $\mathcal{H}_3$  задает неприводимое трехмерное представление, то есть мы получили противоречие.

Покажем, что оценка в теореме 1.4 точна.

**Пример 2.7.** Рассмотрим проективизацию  $\mathbb{P}^3 \cong \mathbb{P}(V)$  векторного пространства  $V$ , с координатами  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ . Введем действие абелевой 3-группы  $(C_3)^3$  с образующими  $\gamma_1, \gamma_2$  и  $\gamma_3$  на  $\mathbb{P}(V)$ : каждая образующая  $\gamma_i$  действует умножениями  $x_i$  на первообразные кубические корни из 1. Это действие свободно и сохраняет кубики Ферма  $S$  в  $\mathbb{P}^3$ :

$$S = \{(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}^3 \mid x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0\}$$

Таким образом 3-группа  $C_3^3$ , которую нельзя породить менее чем 3 элементами, свободно действует на рациональной поверхности  $S$  и, следовательно, лежит в группе  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ .

Наконец покажем, что на некотором трехмерном рациональном многообразии действует группа, которую нельзя породить менее чем 4 элементами:

**Пример 2.8.** Рассмотрим теперь  $X = \mathbb{P}^1 \times S$  произведение  $\mathbb{P}^1$  и кубики Ферма. Это трехмерное рациональное многообразие с точным действием абелевой 3-группы  $(C_3)^4 \cong (C_3)^3 \times C_3$ . А именно, группа  $(C_3)^3$  действует на  $S$  как в примере 2.7, а группа  $C_3$  действует стандартным образом на  $\mathbb{P}^1$ . При этом группу  $(C_3)^4$  нельзя породить менее чем 4 образующими. Следовательно, в группе  $\text{St}_3(\mathbb{C})$  есть 3-подгруппа, которую нельзя породить менее чем 4 образующими.

### 3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой части мы докажем теорему 1.4, описывающую 3-подгруппы в группе Кремоны ранга 2, а также приведем вспомогательное утверждение, которое пригодится нам при изучении бирациональных автоморфизмов рационально связных трехмерных многообразий. Затем мы приведем несколько утверждений, ограничивающих порядок 3-подгрупп групп автоморфизмов многообразий в некоторых конкретных случаях.

**3.1. Доказательство теоремы 1.4.** Начнем с утверждения, верного во всех размерностях и показывающего, что оценка на ранг абелевых 3-подгрупп помогает оценить количество образующих группы в неабелевом случае.

**Предложение 3.1.** *Предположим, что для любого рационально связного многообразия  $Y$  размерности  $n$  и для любой абелевой  $p$ -подгруппы  $A \subset \text{Bir}(Y)$  верно, что ранг  $A$  не больше  $r$ . Тогда, если  $X$  рационально связно и  $n$ -мерно, то любая не обязательно абелева  $p$ -группа  $G \subset \text{Bir}(X)$  может быть порождена  $r$  элементами.*

*Доказательство.* В силу предложения 2.4 найдется  $\tilde{X}$  бирациональная модель  $X$ , на которой  $G$  действует регулярными автоморфизмами. Рассмотрим подгруппу Фраттини  $\Phi(G) \subset G$ , то есть пересечение всех максимальных подгрупп  $G$ . Тогда факторгруппа  $A = G/\Phi(G)$  это абелева  $p$ -группа и она действует на фактормногообразии  $Y = \tilde{X}/\Phi(G)$ . Многообразие  $Y$  рационально связно и  $n$ -мерно, то есть группа  $A$  является подгруппой группы бирациональных автоморфизмов рационально связного многообразия, а значит ее ранг равен  $r$ . Следовательно, по теореме Бернсайда о базисе [10, Theorem 12.2.1] группа  $G$  может быть порождена  $r$  своими элементами.  $\square$

Как следствие выведем отсюда теорему 1.4.

*Доказательство теоремы 1.4.* Теорема 1.1 дает необходимую оценку для абелевых 3-групп. Из нее, пользуясь предложением 3.1 выводим нужный результат.  $\square$

**Замечание 3.2.** Тем же рассуждением, используя оценку на ранг абелевых 3-подгрупп в группе бирациональных автоморфизмов рационально связного трехмерного многообразия  $X$  из теоремы 1.2, можно показать, что любая 3-подгруппа  $G \subset \text{Bir}(X)$  может быть порождена 5 своими элементами.

Заметим, что как было показано в примере 2.7, группа  $(C_3)^3$  вкладывается в группу  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  и при этом она не может быть порождена менее чем 3 элементами. Следовательно, наша оценка в двумерном случае точна.

**3.2. Кривые и поверхности.** В процессе изучения 3-групп, действующих на разных многообразиях нам потребуется оценивать 3-подгруппы группы автоморфизмов некоторой кривой  $C$  рода  $g$  больше 1. Оценка Гурвица позволяет нам сказать, что порядок такой группы не превышает  $84(g-1)$ , однако, эта оценка слишком груба для некоторых случаев. Поскольку  $p$ -группы нильпотентны, мы имеем более сильную оценку на порядок любой  $p$ -группы  $G \subset \text{Aut}(C)$  в силу [23, Theorem 1.2]:

$$(3.3) \quad |G| \leq 16(g-1).$$

Используя эту формулу, мы можем изучить 3-подгруппы точно действующие на якобиане кривой:

**Лемма 3.4.** *Если  $\text{Jac}(C)$  это якобиан кривой  $C$  рода 2 и  $G$  это 3-группа, точно на нем действующая и сохраняющая поляризацию, тогда  $G$  может быть порождена 2 своими элементами.*

*Доказательство.* В силу теоремы Торелли для кривых автоморфизмы  $\text{Jac}(C)$ , сохраняющие поляризацию, вкладываются в группу  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \text{Aut}(C)$ . Следовательно группа  $G$  вкладывается в  $\text{Aut}(C)$ . Из (3.3) мы видим, что

$$|G| \leq |\text{Aut}(C)| \leq 16(g(C)-1) = 16.$$

Поскольку  $|G|$  является степенью 3, в силу леммы А.1 мы заключаем, что  $G$  может быть порождена 2 своими элементами.  $\square$

Теперь применим формулу (3.3) для поверхности, расслоенной над кривой.

**Лемма 3.5.** *Пусть  $S$  это проективизация двумерного векторного расслоения над кривой  $C$  рода 3 и  $G$  это 3-подгруппа в  $\text{Aut}(S)$ . Тогда  $G$  может быть порождена 4 своими элементами.*

*Доказательство.* Любой автоморфизм такой поверхности коммутирует с проекцией на  $C$ . Таким образом, оценка на количество образующих  $G$  не превосходит суммы количества образующих любой 3-группы действующей на слое и на базе. В силу (3.3) любая 3-подгруппа  $\text{Aut}(C)$  имеет порядок не больше 32, следовательно она может быть порождена не более чем 3 элементами. Слой расслоения над  $C$  изоморфен проективной прямой, в силу леммы А.6, любая 3-группа, точно действующая на слое, циклическая. Следовательно,  $G$  может быть порождена 4 элементами.  $\square$

#### 4. ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ТРЕХМЕРНЫХ РАССЛОЕНИЙ МОРИ

**4.1. Общие сведения.** Будем называть  $G\mathbb{Q}$ -многообразие  $G\mathbb{Q}$ -факториальным, если любой  $G$ -инвариантный дивизор Вейля на нем является  $\mathbb{Q}$ -дивизором Картье, то есть некоторая его степень является дивизором Картье. Кроме того, терминальное  $G$ -многообразие  $X$  называется  $G\mathbb{Q}$ -многообразием Фано, если оно  $G\mathbb{Q}$ -факториально, класс  $-K_X$  обилен и ранг группы  $\text{Pic}(X)^G$  равен 1. Ранг группы Пикара  $\text{Pic}(X)$  называется также *числом Пикара* и обозначается  $\rho(X)$ .

Мы собираемся изучать группы регулярных автоморфизмов минимальных трехмерных терминальных  $G$ -расслоений Мори. Это либо  $G\mathbb{Q}$ -многообразия Фано, либо нетривиальные  $G$ -расслоения  $X \rightarrow B$  с обильным относительным антиканоническим классом  $-K_{X/B}$ , у которых относительная  $G$ -инвариантная группа Пикара  $\text{Pic}(X/B)^G$  имеет ранг 1. Ввиду следующего утверждения случай  $G$ -расслоений Мори оценить не сложно.

**Лемма 4.1.** *Если  $X \rightarrow B$  это трехмерное  $G$ -расслоение Мори, и размерность базы  $B$  больше нуля, то любая 3-подгруппа  $G$  в  $\text{Aut}(X)$  может быть порождена 4 элементами.*

*Доказательство.* В силу леммы 2.2 число элементов, порождающих  $G$  складывается из числа элементов порождающих 3-подгруппу в группе автоморфизмов базы и слоя. Поскольку база и общий слой  $X \rightarrow B$  рациональны, то в силу оценок в теореме 1.4 и лемме А.6 получаем нужный ответ.  $\square$

Таким образом, наша цель исследовать 3-подгруппы в группах регулярных автоморфизмов многообразий Фано. Гладкие трехмерные многообразия Фано классифицированы, особый интерес представляет следующая часть классификации. Будем называть *индексом* многообразия Фано  $X$  с не более чем горенштейновыми особенностями максимальное число  $r$  такое что найдется элемент группы Пикара  $H$ , для которого

$$-K_X \sim rH.$$

Любой автоморфизм  $f$  многообразия  $X$  сохраняет линейное расслоение  $\mathcal{O}(H)$ : в самом деле  $f^*K_X \sim K_X$ , значит то же верно и для дивизора  $H$ , поскольку в группе  $\text{Pic}(X)$  нет кручения [7, Proposition 2.1.2].

Введем важный параметр многообразия Фано индекса 1 — его *род*:

$$g = \dim(H^0(X, \mathcal{O}(H))) - 2.$$

Поскольку  $X$  — многообразие Фано, то расслоение  $\mathcal{O}(H)$  обильно и мы будем рассматривать отображение, заданное линейной системой:

$$\phi_{|H|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}(H)))^\vee.$$

Введем также частный случай многообразий Фано: многообразие с не более чем горенштейновыми терминальными особенностями  $X$  называется  *$n$ -мерным многообразием дель Пеццо степени  $d$* , если его канонический класс представляется как  $-K_X \sim 2H$ , где  $H$  обильный дивизор, ни на что не делящийся в группе Пикара  $\text{Pic}(X)$  и  $H^3 = d$ .

**Предложение 4.2** ([7, Table 12.4]). *Гладкие трехмерные многообразия Фано с числом Пикара равным 1 классифицируются следующим образом:*

1. Если  $r = 1$ , существует десять семейств гладких многообразий Фано родов  $2, \dots, 10$  и 12;

2. если  $r = 2$ , существует пять семейств многообразий Фано, а именно трехмерные гладкие многообразия дель Пеццо степеней  $1, \dots, 5$ ;
3. если  $r = 3$ , существует единственное такое многообразие Фано: гладкая квадрика в  $\mathbb{P}^4$ ;
4. если  $r = 4$ , существует единственное такое многообразие Фано:  $\mathbb{P}^3$ .

Полная классификация трехмерных гладких многообразий Фано и некоторые их инварианты (в частности, ранги Пикара и числа Ходжа  $h^{1,2}$ ) приведены в таблицах [7, Tables 12.6–12.7].

**4.2. Особые многообразия Фано.** Заметим, что в трехмерном случае результат действия программы минимальных моделей может иметь терминальные особенности, поэтому нам понадобится следующее утверждение:

**Теорема 4.3** ([22, Proposition 3.6]). *Любая трехмерная терминальная особенность  $P \in X$  локально имеет вид  $Y/\Gamma$ , где  $\Gamma \cong C_r$  действует на  $Y$  свободно вне точки  $Q$ , а точка  $Q$  это  $cDV$ -особенность (и следовательно горнштейнова особенность) или гладкая точка. Многообразие  $Y$  в этом случае является проективизацией некоторого канонически определенного пучка алгебр на открытом подмножестве  $X$ .*

Приведем также наблюдение, касающееся групп, сохраняющих некоторую точку на трехмерном многообразии  $X$ :

**Лемма 4.4** (ср. [16, Lemma 2.4]). *Пусть  $X$  это трехмерное многообразие с не более чем терминальными особенностями и  $G$  это 3-подгруппа в  $\text{Aut}(X)$ , сохраняющая точку  $x \in X$ . Тогда  $G$  можно породить не более чем 3 образующими.*

*Доказательство.* Если  $x$  это терминальная горнштейнова особая (или гладкая) точка, то в силу [22, Corollary 3.12] пространство  $T_x$  не более чем четырехмерно. Следовательно, в силу предложения 2.3 группа  $G$  вкладывается в  $\text{GL}_4(\mathbb{C})$ , а значит в силу предложения A.11 может быть порождена не более чем 4 элементами.

Более того, в случае, когда  $x$  гладкая точка, касательное пространство к ней трехмерно, и из тех же соображений группа  $G$  может быть порождена 3 элементами.

Предположим теперь, что  $x$  не гладкая, тогда в силу теоремы 4.3 некоторая ее окрестность  $U$  изоморфна фактору  $\tilde{U}/\Gamma$ , где  $\Gamma$  это циклическая группа порядка  $r$ , а  $\tilde{U}$  — гладкая точка или же  $cDV$ -особенность. Окрестность  $\tilde{U}$  канонически определена и на ней действует некоторое расширение  $\tilde{G}$  группы  $G$ . Поскольку силовская 3-подгруппа  $\tilde{G}$  сюръективно покрывает  $G$ , в силу леммы A.2 достаточно доказать утверждение для случая, когда  $x$  это  $cDV$ -особенность.

Предположим, что группа  $G$  не может быть порождена менее чем 4 своими элементами, тогда в силу следствия A.9 она либо содержит подгруппу тора  $\text{GL}_4(\mathbb{C})$  ранга 4, либо это произведение 3-подгруппы одномерного тора и группы  $H$ , содержащей матрицы (A.10).

Изучим для начала первый случай. Заменяя некоторые элементы  $G$  на степени, можем считать, что  $G \cong C_3^4$ . Таким образом, мы можем выбрать координаты  $z_1, z_2, z_3$  и  $z_4$ , в которых действие  $G$  диагонально и для каждого  $i$  некоторый  $g_i \in G$  действует умножением  $z_i$  на  $\zeta$  примитивный кубический корень из 1:

$$g_i \cdot z_j = \begin{cases} \zeta z_i, & \text{если } i = j; \\ z_j, & \text{иначе;} \end{cases}$$

и такие элементы  $g_i$  порождают  $G$ . Если  $x$  это  $cDV$ -особенность, то она задается некоторым уравнением  $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$  из конечного набора уравнений, перечисленных, например в [22, Section 6]. Следовательно,  $f$  это неприводимый многочлен, полуинвариантный относительно любого элемента  $g_i \in G$ .

Из [22, Section 6] видно, что у  $f$  есть нетривиальная квадратичная часть, то есть мы можем перенумеровывая координаты предположить, что либо  $z_1^2$ , либо  $z_1 z_2$  входит в разложение  $f$  с ненулевым коэффициентом. В этом случае  $g_1$  действует на  $f$  с нетривиальным собственным значением. Поскольку на координатах на  $z_j$  элемент группы  $g_1$  действует тривиально для всех индексов  $j \neq 1$ , то все остальные мономы, входящие в  $f$  должны делиться на  $z_1$ , что противоречит

неприводимости  $f$ . Следовательно, наше предположение неверно и абелева группа ранга 4 не может сохранять терминальную трехмерную особенность.

Теперь предположим, что  $G$  содержит элемент  $g_1$  как выше, а также элементы  $\sigma$  и  $t$ , сохраняющие  $z_1$ , а на  $z_2, z_3$  и  $z_4$  действующие как матрицы (A.10). Рассмотрим квадратичную часть  $f_2$  уравнения  $f$ . Она полуинвариантна относительно  $G$ , следовательно, она равна либо 0, либо  $x_1^2$ . Изучая уравнения [22, Section 6], видим, что возможен лишь второй случай и при этом кубическая часть  $f_3$  уравнения  $f$  также должна быть нетривиальна. Однако, действие группы таково, что это требование не может быть выполнено. Следовательно, мы снова пришли к противоречию.  $\square$

**Замечание 4.5.** В лемме 4.4 мы показали, что любая  $cDV$ -особенность не может оставаться инвариантной при точном действии любой 3-группы, порожденной 4 элементами. Однако, этот результат не может быть улучшен, поскольку существуют  $cDV$ -особенности, которые сохраняются при действии абелевой 3-группы ранга 3. Так например,  $cA_1$  особенность, заданная в четырехмерном пространстве уравнением  $x^2 + yz + t^3$ , сохраняется при действии следующей группы:

$$C_3^3 \cong \langle \text{diag}(\zeta, \zeta^{-1}, 1, 1), \text{diag}(\zeta, 1, \zeta^{-1}, 1), \text{diag}(1, 1, 1, \zeta) \rangle \subset \text{GL}_4(\mathbb{C})$$

Из леммы 4.4 можно вывести следующее полезное следствие.

**Лемма 4.6.** Пусть  $X$  это терминальное трехмерное многообразие Фано, и длина орбиты некоторой точки  $x \in X$  равна  $N < 27$ . Тогда 3-группа  $G$ , точно действующая на  $X$ , может быть порождена 5 своими элементами. Более того, если  $N \neq 9$ , то  $G$  может быть порождена 4 элементами.

*Доказательство.* Рассмотрим стабилизатор  $\text{Stab}(x)$  точки  $x$ , это 3-подгруппа  $G$  индекса  $N = 3^k$ . Кроме того, в силу леммы 4.4 группа  $\text{Stab}(x)$  может быть порождена не более чем 3 своими элементами. Таким образом, применяя лемму A.1, получаем нужный результат.  $\square$

Важное наблюдение (сглаживание Намикавы, [13]) состоит в том, что любое трехмерное многообразие Фано  $X$  с не более чем горенштейновыми терминальными особенностями является деформацией гладких многообразий, то есть существует семейство:

$$\mathcal{X} \rightarrow B \ni 0,$$

общий слой которого это гладкое многообразие Фано, а его центральный слой  $\mathcal{X}_0$  изоморфен  $X$ . Кроме того, у нас есть следующая оценка [13] на количество  $N$  особенностей многообразия  $X$ :

$$(4.7) \quad N \leq 20 - \rho(\mathcal{X}_b) + h^{1,2}(\mathcal{X}_b),$$

где  $h^{1,2}(\mathcal{X}_b)$  обозначает размерность группы когомологий  $H^{1,2}(\mathcal{X}_b)$ .

Оценка Намикавы позволяет вывести следующий результат:

**Следствие 4.8.** Пусть  $X$  это трехмерное горенштейново терминальное особое многообразие Фано, такое что  $\rho(X) = 1$ ,  $r(\mathcal{X}_b) = 1$  и  $g(\mathcal{X}_b) > 6$ , где  $\mathcal{X}_b$  это общий слой сглаживания Намикавы. Тогда любая 3-подгруппа  $G \subset \text{Aut}(X)$  может быть порождена 5 своими элементами. Кроме того, группа  $G$  может быть порождена 4 элементами, если длина орбиты некоторой особой точки меньше 9. В частности, это верно в случае, когда количество особенностей на  $X$  не равно 9 или 18.

*Доказательство.* Пусть  $x$  это особая точка на  $X$ . Пользуясь оценкой (4.7) и инвариантами гладких многообразий Фано, перечисленными в [7, Tables 12.6–12.7], можно показать, что длина орбиты  $x$  не превышает 26. Следовательно, в силу леммы 4.6 группа  $G$  может быть порождена 5 своими элементами.

Если же на  $X$  имеется точка  $x$ , длина орбиты которой меньше 9, то применяя лемму 4.6, получаем, что группа  $G$  может быть порождена 4 элементами.  $\square$



Напомним, что *индексом* негоренштейновой особенности  $x$  на многообразии  $X$  называется натуральное число  $n$ , такое что кратность канонического дивизора  $nK_X$  в окрестности  $x$  является дивизором Картье.

**Следствие 4.9.** *Если  $X$  это трехмерное терминальное многообразие Фано с негоренштейновой особенностью и  $G$  это 3-подгруппа в  $\text{Aut}(X)$ , то она может быть порождена 5 элементами. Более того, группа  $G$  может быть порождена 4 элементами кроме случая, когда количество негоренштейновых особенностей на  $X$  равно 9, и все они являются циклическими фактор-особенностями типа  $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ .*

*Доказательство.* Напомним, что для каждой терминальной особенности  $x_i$  на  $X$  существует набор (basket) виртуальных фактор-особенностей  $y_{ij}$  индексов  $r_{ij}$ , где  $j = 1, \dots, l_i$ , и в силу [22, Corollary 10.3] и [9] имеем следующее неравенство:

$$(4.10) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{l_i} \left( r_{ij} - \frac{1}{r_{ij}} \right) < 24,$$

где  $N$  это количество всех негоренштейновых особенностей на  $X$ . Отсюда следует, что  $N < 16$ , то есть длина орбиты любой негоренштейновой особенности  $x$  меньше 16. Таким образом, в силу леммы 4.6 группа  $G$  может быть порождена 5 своими элементами.

Если число особенностей на  $X$  отлично от 9, то найдется негоренштейнова точка  $x$ , у которой длина орбиты меньше 9, и в силу леммы 4.6 группа  $G$  может быть порождена 4 элементами. Тот же аргумент можно использовать в случае, если на  $X$  ровно 9 особенностей, но группа  $G$  действует на них не транзитивно.

Если же  $N = 9$  и группа действует на множестве негоренштейновых особенностей транзитивно, то все числа  $l_i = l$  в формуле (4.10) совпадают, и  $r_{ij} = r_j$  не зависят от  $i$ . Таким образом неравенство приводится к виду:

$$\sum_{j=1}^l \left( r_j - \frac{1}{r_j} \right) < \frac{8}{3}.$$

Следовательно,  $l$  равно 1 и  $r_1 = 2$ . Так как  $l = 1$ , то все негоренштейновы особенности  $X$  являются циклическими фактор-особенностями (см. доказательство [22, Theorem 10.2] и доказательство [22, Theorem 9.1]). Так как  $r_1 = 2$ , то они имеют вид  $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ .  $\square$

**4.3. Многообразие Фано с  $\rho > 1$ .** Теперь мы переходим к изучению трехмерных многообразий Фано с многомерной решеткой Пикара. Как и раньше, нас интересуют многообразия Фано  $X$ , такие что ранг инвариантной решетки Пикара  $\text{Pic}(X)^G$  равен 1. Нам потребуется следующее наблюдение.

**Теорема 4.11** ([19, Theorem 1.2, Theorem 6.6]). *Пусть  $X$  это трехмерное многообразие Фано с негоренштейновыми терминальными особенностями,  $\rho(X) > 1$ , а  $G$  — конечная группа, действующая на  $\text{Pic}(X)$ , сохраняя форму пересечения и канонический класс. Если при этом выполняется  $\text{Pic}(X)^G \cong \mathbb{Z}$ , то верно одно из следующих утверждений:*

- (1)  $\rho(X) = 2$ ,
- (2)  $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ,
- (3) Существует морфизм  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  — двойное накрытие разветвленное в элементе линейной системы  $| -K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} |$ ,
- (4)  $X$  — раздутие дивизора  $W$  бистепени  $(1, 1)$  в  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  вдоль кривой  $C$  бистепени  $(2, 2)$  и композиция  $C \hookrightarrow W \rightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \xrightarrow{pr_i} \mathbb{P}^2$  является вложением для обеих проекций  $pr_1$  и  $pr_2$ .
- (5)  $X$  — дивизор мультистепени  $(1, 1, 1, 1)$  в  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

Выведем из этой теоремы следующий результат.

**Лемма 4.12.** Пусть  $G$  это 3-группа, а  $X$  это  $G\mathbb{Q}$ -многообразие Фано с горенштейновыми терминальными особенностями и с числом Пикара больше 1. Тогда группа  $G$  может быть порождена не более чем 4 образующими.

*Доказательство.* Переберем все случаи из списка в теореме 4.11.

Пусть  $\rho(X) = 2$  (пункт 1 теоремы 4.11). Тогда в силу леммы A.15 подрешетка  $\text{Pic}(X)^G$  двумерной решетки  $\text{Pic}(X)$  не может быть одномерна. Следовательно,  $X$  — не  $G$ -минимальное многообразие Фано.

Изучим 3-подгруппы группы автоморфизмов  $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  (пункт 2 теоремы 4.11). В этом случае решетка Пикара  $X$  это  $\mathbb{Z}^3$ . Автоморфизмы этой решетки это группа  $\text{GL}_3(\mathbb{Z}) \subset \text{GL}_3(\mathbb{C})$ , а любая 3-подгруппа  $\text{GL}_3(\mathbb{Z})$  циклическая в силу леммы A.14.

Теперь рассмотрим автоморфизм  $X$ , действующий тривиально на решетке  $\text{Pic}(X)$ . Тогда он должен сохранять каждый сомножитель произведения  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , следовательно он содержится в прямом произведении групп  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ . Таким образом в силу предложения A.6 и леммы A.2 группа  $G$  может быть порождена не более чем 4 образующими.

Пусть  $X$  — двойное накрытие  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  (пункт 3 теоремы 4.11), тогда  $G$  включается в следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow G/K \rightarrow 0$$

где  $K$  — ядро действия  $G$  на решетке Пикара.

Фактор-группа  $G/K$  должна точно действовать на трехмерной решетке Пикара  $\text{Pic}(X)$ , следовательно  $G/K \subset \text{GL}_3(\mathbb{Z})$ . В таком случае в силу леммы A.14 группа  $G/K$  циклическая.

Теперь изучим 3-группу  $K$ . Она сохраняет каждое линейное расслоение, в частности линейные системы  $|(pr_i \circ f)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}|$ . Поэтому любой автоморфизм  $K$  будет переводить слой  $f$  в слой  $f$ , следовательно  $K$  действует на  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Из построения группы  $K$ , это действие точно и тривиально на решетке Пикара  $\text{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ . Следовательно, как было показано выше, 3-группа  $K$  может быть порождена не более чем 3 образующими. Отсюда мы заключаем, что  $G$  может быть порождена не более чем 4 образующими.

Пусть  $X$  теперь раздутие  $W$  вдоль кривой  $C$  (пункт 4 теоремы 4.11). Из [7, Table 12.4] мы видим, что существует ровно три стягивания  $X$  на  $W$ , поэтому есть ровно три исключительных дивизора этих стягиваний  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$ . Таким образом, 3-группа  $G$  в  $\text{Aut}(X)$  включается в точную последовательность:

$$0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow G/K \rightarrow 0,$$

где  $K$  — нормальная подгруппа  $G$ , сохраняющая все три исключительных дивизора. Она содержится в  $\text{Aut}_C(W)$  — группе автоморфизмов  $W$ , сохраняющих кривую  $C$ , а  $G/K$  точно действует на множестве  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , следовательно вкладывается в  $S_3$ .

Теперь нам нужно оценить число образующих 3-группы  $K$ . Заметим, что  $\rho(W) = 2$ , поэтому в силу леммы A.15 группа  $K$  тривиально действует на решетке Пикара. С другой стороны, проекция  $W$  на любое  $\mathbb{P}^2$  дает нам изоморфизм  $W \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(T_{\mathbb{P}^2})$ . Поскольку  $K$  тривиально действует на решетке Пикара  $\text{Pic}(X)$ , то сохраняет структуру расслоения  $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(T_{\mathbb{P}^2}) \rightarrow \mathbb{P}^2$ .

Из точной последовательности (2.1) видим, что  $K$  это расширение 3-подгруппы  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$  и 3-подгруппы  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ . Применяя леммы A.6 и A.7 заключаем, что группа  $K$  может быть порождена не больше чем тремя образующими, и следовательно любая 3-подгруппа  $\text{Aut}(X)$  может быть порождена не более чем 4 образующими.

Наконец рассмотрим дивизор  $X$  степени  $(1, 1, 1, 1)$  в  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  (пункт 5 теоремы 4.11). Из таблицы [7, Table 12.5] видно, что существует ровно четыре разных стягивания  $X$  на  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . При этом 3-группа  $G$  не может действовать на множестве из четырех элементов (множестве исключительных дивизоров стягиваний), не сохраняя ни одного из них. Следовательно,  $G$  сохраняет некоторый исключительный дивизор, то есть  $X$  не  $G$ -минимально.  $\square$

**4.4. Многообразие Фано с  $\rho = 1$ .** Методы оценки количества образующих 3-подгрупп, действующих на многообразиях Фано индекса 1 и 2 различаются, в зависимости от рода и степени.

Для многообразий малых родов и степеней мы будем использовать для оценки отображение антиканонической линейной системой, в то время как для многообразий больших родов и степеней придется применять результаты, описывающие схемы Гильберта различных кривых, эквивариантные отображения в грассманианы и т.п.

4.4.1.  $|-K_X|$  не задает вложения.

**Лемма 4.13.** *Пусть  $X$  трехмерное многообразие Фано с терминальными горнштейновыми особенностями. Если линейная система  $|-K_X|$  имеет непустое базисное множество, то любая 3-подгруппа  $G \subset \text{Aut}(X)$  может быть порождена не более чем 3 образующими.*

*Доказательство.* В силу [24, Theorem 0.5] базисное множество  $B = \text{Bs}(|-K_X|)$  либо состоит из одной точки, либо изоморфно  $\mathbb{P}^1$ . Если  $B$  состоит из одной точки  $x$ , то любой автоморфизм обязан ее сохранять, следовательно в силу леммы 4.4 группа  $G$  может быть порождена не более чем 3 элементами.

Пусть теперь  $B$  изоморфно  $\mathbb{P}^1$ . Группа  $G$  должна сохранять  $B$ , следовательно в силу леммы A.6 она сохраняет также некоторую точку  $x$  на  $B$ . Таким образом, в силу леммы 4.4 она может быть порождена не более чем 3 элементами.  $\square$

Для доказательства следующего утверждения нам потребуется некоторая дополнительная информация. Как известно, для любого подмногообразия  $Y$  в проективном пространстве, не содержащемся в гиперплоскостях, верно  $\text{codim}(Y) + 1 \leq \deg(Y)$ , и если выполняется равенство, то  $Y$  называется *многообразием минимальной степени*. Такие многообразия хорошо известны, их список приведен, например, в [7, Theorem 2.2.11]: это проективные пространства, квадрики, свитки, поверхности Веронезе или же конусы над свитками или поверхностью Веронезе. Напомним, что *свитком* называется образ проективизации расслоения  $\mathbb{P}(\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i))$ , где все  $a_i < 0$ , при отображении линейной системой  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i))}(1)|$ . В следующей лемме мы изучим 3-группы, действующие на многообразиях минимальной степени.

**Лемма 4.14.** *Пусть  $Y$  многообразие минимальной степени, и  $G$  любая 3-подгруппа в  $\text{Aut}(Y)$ . Тогда, если  $\dim(Y) = d$ , где  $d < 7$ , то  $G$  может быть порождена  $d$  элементами.*

*Доказательство.* Если  $Y$  это  $\mathbb{P}^d$ , то в силу предложения A.11 группа  $G$  может быть порождена  $d$  элементами.

Если  $Y$  это свиток, то, поскольку проекция из  $Y$  на  $\mathbb{P}^1$  канонически определена, группа  $G$  сохраняет структуру расслоения  $Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Следовательно, в силу леммы 2.2 и предложения A.11 видим, что  $G$  может быть порождено  $d$  элементами.

Теперь предположим, что  $Y$  — конус над свитком или поверхностью Веронезе. В таком случае, вершина конуса  $Z \subset Y$  это проективное пространство коразмерности  $c$  в  $Y$ . Раздвиг  $Y$  в  $Z$  получим  $\mathbb{P}^c$ -расслоение над  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{P}^2$  или же  $(d-c)$ -мерным свитком. Поскольку группа  $G$  сохраняла вершину конуса, то ее действие поднимется до действия на этом расслоении. Таким образом, лемма 2.2 и предложение A.11 снова влекут нужный нам результат.

Наконец предположим, что  $Y$  это  $d$ -мерная квадрика в  $\mathbb{P}^{d+1}$ . В силу леммы A.16 в этом случае группа  $G$  может быть порождена  $d$  элементами.  $\square$

Теперь изучим 3-группы, действующие на многообразиях Фано с антиканонической системой без базисного множества и не задающей вложения.

**Лемма 4.15.** *Пусть  $X$  трехмерное многообразие Фано с терминальными горнштейновыми особенностями. Если линейная система  $|-K_X|$  задает регулярное отображение, не являющееся вложением, то любая 3-подгруппа  $G \subset \text{Aut}(X)$  может быть порождена не более чем 3 образующими.*

*Доказательство.* В силу [7, Proposition 2.1.15], если отображение  $\phi_{|-K_X|}$  не имеет точек неопределенности, то его степень равна 1 или 2. В случае, если  $\phi_{|-K_X|}$  не вложение, образ  $X$  в  $\mathbb{P}^n$  при

двухлистном антиканоническом накрытии это многообразие минимальной степени с изолированными особенностями. Следовательно, в силу лемм 2.2 и 4.14 группа  $G$  может быть порождена 3 элементами.  $\square$

#### 4.4.2. Многообразие дель Пеццо.

**Следствие 4.16.** *Пусть  $X$  трехмерное многообразие дель Пеццо с не более чем горнштейновыми терминальными особенностями и  $\rho(X) = 1$ . Тогда любая 3-подгруппа  $\text{Aut}(X)$  может быть порождена не более чем 4 элементами.*

*Доказательство.* Если антиканоническая система  $|-K_X|$  не задает вложения в проективное пространство, то в силу лемм 4.13 и 4.15 группа  $G$  может быть порождена 3 своими элементами.

Если степень  $X$  равна 3, то линейная система  $|H|$  задает вложение  $X$  в  $\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(H)) \cong \mathbb{P}^4$  (см. [7, Corollary 2.1.14(i)]). Следовательно  $G$  вкладывается в  $\text{PGL}_5(\mathbb{C})$  и в силу предложения A.11 группа  $G$  также может быть порождена 4 элементами.

Если  $X$  это многообразие дель Пеццо степени 4, то в силу [7, Theorem 3.2.5] многообразие  $X$  это полное пересечение двух квадрик. Таким образом через  $X$  проходит одномерное семейство квадрик и в силу леммы A.6 группа  $G$  сохраняет одну из них. Следовательно  $G$  точно действует на четырехмерной квадрике, а значит в силу леммы A.16 группа  $G$  может быть порождена 4 элементами.

Если же  $X$  это  $G$ -многообразие дель Пеццо степени 5, то в силу [18, Theorem 1.7] оно гладкое. Следовательно, из [12, Proposition 4.4] получаем, что группа  $\text{Aut}(X)$  изоморфна  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ , а значит в силу предложения A.11 группа  $G$  циклическая.  $\square$

#### 4.4.3. Многообразие Фано индекса 1.

**Лемма 4.17.** *Пусть  $X$  это трехмерное многообразие Фано с горнштейновыми терминальными особенностями, числом Пикара 1 и рода  $g < 5$ . Тогда, если  $G$  это 3-подгруппа  $\text{Aut}(X)$ , то она может быть порождена 4 элементами.*

*Доказательство.* Если антиканоническая система  $|-K_X|$  не задает вложения в проективное пространство, то в силу лемм 4.13 и 4.15 группа  $G$  может быть порождена 4 своими элементами. Таким образом, в дальнейшем мы можем рассматривать многообразия Фано рода больше 2 и такие что  $|-K_X|$  задает вложение в  $(g+1)$ -мерное проективное пространство.

В таком случае, если род равен 3 и антиканоническая система задает вложение  $X$  в  $\mathbb{P}^4$ , то группа  $G$  вкладывается в  $\text{PGL}_5(\mathbb{C})$ , а значит в силу предложения A.11 может быть порождена 4 своими элементами.

Если род  $X$  равен 4 и  $|-K_X|$  задает вложение  $X$  в  $\mathbb{P}^5$ , то в силу [7, Proposition 4.1.12] многообразие  $X$  является пересечением квадрики и кубики. Таким образом,  $G$  точно действует на четырехмерной квадрике, проходящей через  $X$ . Следовательно, в силу леммы A.16, группа  $G$  может быть порождена 4 своими элементами.  $\square$

**Лемма 4.18.** *Пусть  $X$  это трехмерное многообразие Фано с горнштейновыми терминальными особенностями, числом Пикара 1 и рода  $g = 5$ . Тогда, если  $G$  это 3-подгруппа  $\text{Aut}(X)$ , то она может быть порождена 4 элементами.*

*Доказательство.* В силу [7, Proposition 4.1.12] многообразие  $X$  изоморфно пересечению трех квадрик  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$  в  $\mathbb{P}^6$ . Группа  $G$  действует на антиканонической системе  $|-K_X|$ , и это действие задает вложение  $G$  в  $\text{PGL}(H^0(X, \mathcal{O}(K_X)))^\vee$ . Рассмотрим силовскую 3-подгруппу  $\tilde{G}$  прообраза группы  $G$  в  $\text{GL}(H^0(X, \mathcal{O}(K_X)))^\vee$ . Группа  $\tilde{G}$  имеет представление в семимерном векторном пространстве  $H^0(X, \mathcal{O}(K_X))^\vee$ . Так как  $\tilde{G}$  это 3-группа, то в  $H^0(X, \mathcal{O}(K_X))^\vee$  найдется четырехмерное  $\tilde{G}$ -инвариантное подпредставление. Следовательно, в  $\mathbb{P}^6$  найдется инвариантное относительно  $G$  подпространство  $\Pi \cong \mathbb{P}^3$ .

Пересечение  $Y = \Pi \cap X$  непусто и не совпадает с  $\Pi$ , поскольку  $X$  не изоморфно  $\mathbb{P}^3$  и неприводимо. Более того,  $Y$  это  $G$ -инвариантное подмножество  $X$ . В силу леммы A.17 в группе  $G$

найдется подгруппа  $H$  индекса не более 3, сохраняющая некоторую точку  $y$  на  $Y$ . Из леммы 4.4 следует, что группа  $H$  может быть порождена не более чем 3 своими элементами. Следовательно, в силу леммы A.1 группа  $G$  может быть порождена не более чем 4 своими элементами.  $\square$

**Лемма 4.19.** *Пусть  $X$  это трехмерное многообразие Фано с горнштейновыми терминальными особенностями, числом Пикара 1 и рода  $g = 6$ . Тогда, если  $G$  это 3-подгруппа  $\text{Aut}(X)$ , то она может быть порождена 4 элементами.*

*Доказательство.* В самом деле, мы можем считать, что антиканоническая линейная система задает вложение  $X$  в  $\mathbb{P}^6$  (иначе пользуемся леммой 4.13 или 4.15 и выводим, что у  $G$  не больше 3 образующих). Обозначим за  $Y$  пересечение всех квадрик, содержащих  $X$  (ср. [20, Example 4.3.3]). В таком случае, если  $Y$  не совпадает с  $X$ , то оно четырехмерно и имеет минимальную степень (см., например, доказательство [26, Предложение 2.3]). Поскольку  $G$  действует на всей линейной системе  $|-K_X|$ , ее действие сохраняет  $Y$ , значит  $G \subset \text{Aut}(Y)$ . Следовательно, в силу леммы 4.14 группа  $G$  может быть порождена 4 элементами.

Теперь мы можем считать, что  $X$  это пересечение квадрик. В таком случае, если мы возьмем кривую, высекаемую на  $X$  двумя гиперплоскими сечениями, она также будет пересечением квадрик. Нетрудно убедиться, что ее род равен 6, следовательно в силу [5, Proposition 2.12] это общая по Клиффорду кривая и в силу [5, Proposition 2.15] многообразие  $X$  это многообразие Гущеля–Мукая [5, Definition 2.1], то есть существует либо вложение  $X \hookrightarrow \text{Gr}(2, 5)$ , либо же двулистное накрытие  $X \rightarrow \text{Gr}(2, 5)$ . Отображение в грассманиан в любом случае задано некоторым канонически определенным расслоением и потому является  $G$ -инвариантным. Следовательно, так как  $G$  это 3-группа, в силу леммы 2.2 она в обоих случаях вкладывается в  $\text{Aut}(\text{Gr}(2, 5))$ .

В силу предложения 2.5 группа  $\text{Aut}(\text{Gr}(2, 5))$  изоморфна  $\text{PGL}_5(\mathbb{C})$ . Следовательно, в силу предложения A.11 группа  $G$  может быть порождена не более чем 4 образующими.  $\square$

**Лемма 4.20** (ср. [21, Lemma 7.6]). *Пусть  $X$  терминальное горнштейново  $G\mathbb{Q}$ -многообразие Фано с  $\rho(X) = 1$ , индекса 1 и рода  $g(X) = 8, 9$  или 12. Тогда, если  $G$  это 3-группа, то  $X$  является  $\mathbb{Q}$ -факториальным многообразием.*

*Доказательство.* Действуя так же, как в доказательстве леммы [21, Lemma 7.6] можно показать, что если  $X$  не  $\mathbb{Q}$ -факториально, то оно бирационально горнштейнову терминальному многообразию Фано  $Y$  со следующим условием на степень канонического класса:

$$-K_Y^3 \geq 2g(X) - 2 + (3 - 1)(4g(X) - 6) \geq 66.$$

Но в силу [7, Tables 12.6–12.7] степень любого гладкого многообразия Фано не превышает 64. Кроме того, степень канонического класса не меняется при сглаживании Намикавы [13], следовательно, мы получили противоречие. Значит  $X$  это  $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие.  $\square$

Изучим некоторые особые многообразия Фано с числом Пикара  $\rho = 1$ , индекса 1 и рода  $g \geq 8$ .

**Лемма 4.21.** *Если  $X$  особое горнштейново трехмерное  $G\mathbb{Q}$ -многообразие Фано с числом Пикара  $\rho = 1$ , индекса 1 и рода  $g = 8, 9$  или 12, и  $G$  это 3-подгруппа в  $\text{Aut}(X)$ , то  $G$  может быть порождена 4 элементами.*

*Доказательство.* В силу леммы 4.20 многообразие  $X$  является  $\mathbb{Q}$ -факториальным. Следовательно, в силу [27, Theorem 1] на нем не менее 1 и не более 5 особенностей, то есть длина орбиты любой особенности не превышает 3. Пользуясь леммой 4.6 получаем необходимый результат.  $\square$

Теперь изучим гладкие трехмерные многообразия Фано с  $\rho = 1$ , индекса 1 и рода  $g \geq 7$ . Для этого полезно воспользоваться следующим результатом. Пусть  $X$  гладкое трехмерное многообразие Фано с очень обильной линейной системой  $|-K_X|$ . Обозначим за  $S(X)$  схему Гильберта коник на  $X$  (коник в антиканоническом вложении). Нам будет нужен следующий набор фактов об этих двух схемах [11, Theorem 1.1.1, Lemma 4.2.1, Lemma 4.3.4, Corollary 4.3.5]:

**Предложение 4.22.** Если  $X$  трехмерное гладкое многообразие Фано индекса 1 и  $g(X) \geq 6$ , то  $S(X)$  гладкая поверхность и

- (i) если  $g = 7$ , то  $S(X)$  — симметрический квадрат гладкой кривой  $C$  рода 7;
- (ii) если  $g = 9$ , то  $S(X)$  — проективизация двумерного векторного расслоения над кривой рода 3;
- (iii) если  $g = 10$ , то  $S(X)$  — якобиан  $\text{Jac}(C)$  кривой  $C$  рода 2 ;
- (iv) если  $g = 12$ , то  $S(X) \cong \mathbb{P}^2$ .

Кроме того, группа  $\text{Aut}(X)$  точно действует на  $S(X)$ , а в случае рода 7 и на кривой  $C$ .

Из предложения 4.22 выведем следующее утверждение:

**Лемма 4.23.** Пусть  $X$  гладкое трехмерное многообразие Фано с числом Пикара 1, индекса 1 и рода  $g = 7, 9, 10$  или 12. Тогда любая 3-подгруппа  $G \subset \text{Aut}(X)$  может быть порождена 4 элементами.

*Доказательство.* В самом деле, в силу предложения 4.22 группа автоморфизмов  $X$ , а значит и  $G$  вкладывается в  $\text{Aut}(S(X))$ .

В случае  $g = 12$  группа  $\text{Aut}(S(X))$  изоморфна  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ , следовательно в силу предложения A.11 группа  $G$  может быть порождена 2 элементами.

В случае  $g = 10$  поверхность  $S(X)$  это якобиан кривой рода 2 и группа  $G$  сохраняет его поляризацию. Следовательно, в силу леммы 3.4 группа  $G$  может быть порождена 2 элементами.

В случае  $g = 9$  в силу леммы 3.5 группа  $G$  может быть порождена 4 элементами.

Если  $g = 7$ , то в силу предложения 4.22 существует вложение  $\text{Aut}(X) \subset \text{Aut}(C)$ , где  $C$  кривая рода 7. В силу (3.3) видим, что

$$|G| \leq 16 \cdot (g(C) - 1) = 96 < 3^5,$$

следовательно группа  $G$  может быть порождена 4 образующими.  $\square$

Разберем теперь оставшиеся несколько случаев.

**Лемма 4.24.** Если  $X$  — гладкое многообразие Фано с  $r = 1$  и  $g = 8$ , то любая 3-подгруппа  $G$  в группе автоморфизмов  $X$  может быть порождена 4 образующими.

*Доказательство.* Как показано в [11, Section B.6] существует каноническое построение по многообразию Фано  $X$  индекса 1 и рода 8 многообразия дель Пеццо  $Y$  степени 3. Таким образом, действие группы  $G$  на  $X$  продолжается до возможно не точного действия  $G$  на  $Y$ . Поскольку, в силу [11, Proposition B.6.3] схема Гильберта  $S(Y)$  прямых на  $Y$  изоморфна схеме Гильберта  $\Sigma(X)$  коник на  $X$ , и действие  $G$  на  $\Sigma(X)$  точно в силу предложения 4.22, то действие  $G$  на  $Y$  точно. Следовательно, в силу следствия 4.16 группа  $G$  может быть порождена 4 элементами.  $\square$

**4.5. Доказательство теоремы 1.5.** Замечание 3.2 доказывает первый пункт теоремы 1.5. Докажем второй пункт, для этого рассмотрим несколько случаев.

Если  $X_0$  это  $G$ -расслоение Мори, то в силу леммы 4.1 группа  $G$  может быть порождена 4 образующими. Далее можем считать, что  $X_0$  это  $G$ -минимальное трехмерное многообразие Фано.

Если  $X_0$  имеет негоренштейновы особенности и не является многообразием со свойствами, описанными в пункте (a), то в силу следствия 4.9 группа  $G$  может быть порождена 4 своими элементами. Далее можем считать, что особенности  $X_0$  горенштейновы.

Если  $X_0$  это многообразие Фано и ранг группы Пикара  $\text{Pic}(X_0)$  больше 1, то в силу леммы 4.11 группа  $G$  может быть порождена 4 элементами.

Если  $X_0$  это многообразие Фано с  $\rho = 1$  индекса больше 3, то  $X_0$  это квадрака или же проективное трехмерное пространство, следовательно в силу лемм A.11 и 4.14 группа  $G$  может быть порождена 3 элементами.

Если  $X_0$  это многообразие дель Пеццо, что в силу следствия 4.16 группа  $G$  может быть порождена 4 элементами.

Если  $X_0$  это горенштейново многообразие Фано индекса 1 и рода меньше 7, то зависимости от рода в силу лемм 4.17, 4.18 и 4.19 группа  $G$  может быть порождена 4 элементами.

Если  $X_0$  это горенштейново особое многообразие Фано индекса 1 и родов 8, 9 и 12, то в силу леммы 4.21 группа  $G$  может быть порождена 4 элементами.

Если  $X_0$  это гладкое многообразие Фано индекса 1 и рода больше 6, то в силу лемм 4.23 и 4.24 группа  $G$  может быть порождена 4 элементами.

Наконец, если  $X_0$  это особое многообразие Фано индекса 1 и родов 7 или 10 и количество особенностей на нем не равно 9 или 18, то в силу следствия 4.8 группа  $G$  также может быть порождена 4 элементами. Это завершает доказательство теоремы 1.5.

**Замечание 4.25.** Из теоремы 1.5 следует, что если существует 3-подгруппа  $G$  в группе  $\text{Bir}(X)$ , которую нельзя породить менее чем 5 элементами, то она регулярно действует на одном из многообразий со свойствами, описанными в пунктах (a) и (b) теоремы 1.5. В самом деле, в силу предложения 2.4 конечная подгруппа  $G$  группы бирациональных автоморфизмов  $X$  регулярно действует на некоторой его бирациональной модели  $\tilde{X}$ . Применяя эквивариантную программу минимальных моделей к  $\tilde{X}$ , получаем терминальное  $G$ -расслоение Мори  $X_0$  с регулярным и точным действием  $G$ . Поскольку  $G$  не может быть порождено менее чем 5 элементами, многообразие  $X_0$  это многообразие со свойствами, описанными в пунктах (a) или (b) теоремы 1.5. Это рассуждение дает также альтернативное доказательство первого пункта теоремы 1.5, поскольку в силу следствий 4.8 и 4.9 любая 3-группа, точно действующая на многообразиях со свойствами, описанными в пунктах (a) и (b), может быть порождена пятью своими элементами.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А. 3-ГРУППЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

**А.1. Образующие.** Нас интересует минимальное количество элементов, порождающих группы. Несколько раз мы столкнемся с ситуацией, когда мы сможем оценить количество образующих подгруппы небольшого индекса. В таком случае следующее утверждение позволит нам сделать оценку количества образующих самой группы:

**Лемма А.1.** Пусть  $G$  любая  $p$ -группа, рассмотрим ее подгруппу  $H$  индекса  $p^n$ . Если  $H$  может быть порождена  $t$  элементами, то  $G$  порождается  $n + t$  образующими.

*Доказательство.* Доказываем утверждение индукцией по  $n$ . Если  $n = 0$ , то группа  $H$  совпадает с  $G$  и утверждение очевидно.

Теперь зафиксируем произвольное  $n$ . Выберем какой-нибудь элемент  $g \in G$ , не лежащий в  $H$ , и рассмотрим подгруппу  $H' \subset G$ , порожденную всеми элементами  $H$  и элементом  $g$ . Тогда

$$[G : H'] < [G : H],$$

то есть  $H'$  — подгруппа индекса  $p^{n-1}$  или даже меньше. По индукции группа  $G$  порождается своей подгруппой  $H'$  и еще не более чем  $n - 1$  элементом, а группа  $H'$  может быть порождена  $t$  образующими  $H$  и еще одним элементом  $g$ . Следовательно, группа  $G$  может быть порождена не более чем  $n + t$  образующими.  $\square$

Также нам понадобится похожее утверждение в случае, когда  $G$  можно представить в виде расширения двух групп:

**Лемма А.2.** Пусть конечную группу  $G$  можно представить, как расширение группы  $G_2$  с помощью группы  $G_1$ , и каждая из групп  $G_i$  может быть порождена  $n_i$  элементами. Тогда группа  $G$  может быть порождена  $n_1 + n_2$  элементами.

*Доказательство.* Выберем  $x_1, \dots, x_{n_1}$  и  $y_1, \dots, y_{n_2}$  — наборы образующих групп  $G_1$  и  $G_2$ . Обозначим за  $\tilde{x}_i$  образ  $x_i$  в  $G$  и для каждого  $y_i$  выберем какой-нибудь прообраз  $\tilde{y}_i$  в  $G$ . Покажем теперь, что любой элемент  $z$  в  $G$  выражается через  $\tilde{x}_i$  и  $\tilde{y}_j$ .

В самом деле, образ  $z$  в  $G_2$  выражается через образующие:  $\prod y_i^{d_i}$ . Тогда произведение элементов  $z \cdot (\prod \tilde{y}_i^{d_i})^{-1}$  отображается в единицу при проекции в  $G_2$ , а значит выражается через  $\tilde{x}_i$ . Таким образом мы можем выразить любой элемент  $G$  с помощью  $n_1 + n_2$  образующих.  $\square$

В общем случае, если группа  $H$  лежит в группе  $G$ , то, зная количество образующих  $G$ , мы почти ничего не можем заключить про количество элементов, порождающих  $H$ . Так, например, любая конечная группа вкладывается в группу перестановок  $\mathfrak{S}_N$ , которую, как известно, можно породить двумя элементами: транспозицией и циклом длины  $N$ . Однако, из предыдущей леммы мы можем вывести следующее описание количества образующих подгруппы прямого произведения групп:

**Лемма А.3.** Пусть  $H \subset \prod_{i=1}^N G_i$ . Предположим, что для каждого значения  $i$  любая подгруппа группы  $G_i$  может быть порождена не более чем  $n_i$  элементами. Тогда  $H$  может быть порождена не более чем  $\sum_{i=1}^N n_i$  элементами.

*Доказательство.* Докажем это утверждение по индукции. Если  $N = 1$ , то утверждение тривиально. Предположим, что утверждение верно для  $N - 1$  и докажем его для  $N$ . Обозначим за  $\text{pr}_N$  проекцию на последний сомножитель произведения групп:

$$\text{pr}_N : \prod_{i=1}^N G_i \rightarrow G_N$$

Тогда группы  $\text{pr}_N(H) \subset G_N$  и  $\text{Ker}(\text{pr}_N) \cap H \subset \prod_{i=1}^{N-1} G_i$  могут быть порождены не более чем  $n_N$  и  $\sum_{i=1}^{N-1} n_i$  элементами соответственно. С другой стороны  $H$  включается в точную тройку:

$$1 \rightarrow \text{Ker}(\text{pr}_N) \cap H \rightarrow H \rightarrow \text{pr}_N(H) \rightarrow 1$$

В силу леммы А.2 заключаем, что группа  $H$  может быть порождена не более чем  $\sum_{i=1}^N n_i$  элементами.  $\square$

**А.2. Группа Гейзенберга.** Обозначим за  $\mathcal{H}_3$  группу из 27 элементов с тремя образующими  $x, y$  и  $z$  и соотношениями

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 = z^3 = 1; \\ xyx^{-1}y^{-1} &= z. \end{aligned}$$

Эта группа называется группой Гейзенберга, ее можно породить двумя элементами  $x$  и  $y$  и ее центр порожден элементом  $z$ . Таким образом она включается в точную тройку

$$1 \rightarrow \text{C}_3\langle z \rangle \rightarrow \mathcal{H}_3 \rightarrow \text{C}_3\langle x, y \rangle \rightarrow 1,$$

где группа  $\text{C}_3\langle x, y \rangle$  изоморфна прямому произведению циклических групп  $\text{C}_3 \times \text{C}_3$ . Группу  $\mathcal{H}_3$  можно реализовать как подгруппу  $\text{SL}_3(\mathbb{C})$ , порожденную следующими матрицами:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{pmatrix},$$

где  $\zeta$  это примитивный корень из 1. При этой реализации центр группы  $\mathcal{H}_3$  будет лежать в группе скалярных матриц. Обозначим за  $N(\mathcal{H}_3)$  нормализатор группы Гейзенберга в  $\text{SL}_3(\mathbb{C})$ . В таком случае верен следующий факт.

**Лемма А.4** ([8, §8.5]). Фактор нормализатора группы Гейзенберга  $N(\mathcal{H}_3)$  в  $\text{SL}_3(\mathbb{C})$  по подгруппе  $\mathcal{H}_3$  изоморфен  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ .

Максимальная 3-подгруппа  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$  изоморфна циклической группе  $\text{C}_3$ . Обозначим за  $\widetilde{\mathcal{H}}_3$  максимальную 3-подгруппу  $N(\mathcal{H}_3)$ . Тогда она включается в точную тройку:

$$1 \rightarrow \mathcal{H}_3 \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}_3 \rightarrow \text{C}_3 \rightarrow 1$$

Кроме того, верен следующий факт



**Лемма А.5.** *Образ группы  $\widetilde{\mathcal{H}}_3 \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$  при проекции на группу  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  изоморфен  $\mathcal{H}_3$ .*

*Доказательство.* Обозначим стандартную проекцию  $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$  за  $\pi$ . Центр группы  $\mathcal{H}_3$  в  $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$  состоит из скалярных матриц и отображается в 1 при проекции  $\pi$ . Ввиду этого наблюдения группа  $W = \pi(\mathcal{H}_3) \cong \mathcal{C}_3^2$  абелева, то есть является двумерным векторным пространством над  $\mathbb{F}_3$ . Выберем базис  $w_1$  и  $w_2$  в  $W$ . Образующая  $m \in \mathcal{C}_3$  силовой 3-подгруппы  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$  в этом базисе будет действовать матрицей:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этого можно заключить, что  $\pi(\widetilde{\mathcal{H}}_3)$  неабелева группа порядка 27 и каждый ее элемент имеет порядок 3. Следовательно она изоморфна группе Гейзенберга.  $\square$

**А.3. Следствия из линейной алгебры.** Для начала опишем 3-подгруппы  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ . Чтобы сделать это, заметим, что вложение конечной группы  $G$  в  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  задает двумерное точное представление  $G$ . Любое неприводимое представление  $G$  должно иметь размерность, делящую порядок группы. Значит, любое двумерное представление  $p$ -группы при  $p \neq 2$  это сумма одномерных. Из этого мы можем вывести следующее хорошо известное утверждение:

**Лемма А.6.** *Пусть  $p$  — простое число отличное от 2. Тогда любая  $p$ -подгруппа  $G$  в  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  абелева и имеет не более двух образующих:*

$$G \cong \mathbb{C}_{p^n} \times \mathbb{C}_{p^m}$$

Кроме того, любая  $p$ -подгруппа  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$  циклическая и при действии на проективной прямой имеет неподвижную точку.

Теперь перейдем к изучению 3-подгрупп комплексных групп Ли большего ранга.

**Лемма А.7.** *Если  $G$  это 3-подгруппа в  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ , то ее можно породить 2 элементами. Если  $G$  это 3-подгруппа в  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ , то ее можно породить 3 элементами.*

*Доказательство.* Первое утверждение доказывается аналогично [2, Section 6.4]. Чтобы оценить количество образующих 3-подгруппы  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$  воспользуемся точной последовательностью

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) \rightarrow 1.$$

Ядро отображения  $\pi|_G$  содержится в  $\mathbb{C}^*$  и следовательно является циклической группой. Образ  $\pi(G)$  это 3-подгруппа  $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ , следовательно может быть порождено 2 элементами. В силу леммы А.2 получаем нужный результат.  $\square$

Особый интерес для нас представляют максимальные 3-подгруппы  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ . Чтобы подробнее изучить их приведем следующее важное утверждение, описывающее  $p$ -подгруппы компактной группы Ли для всех простых значений  $p$ :

**Теорема А.8** ([3, Theorem 1], [2, Section 6.4]). *Если  $\mathcal{G}$  компактная группа Ли и  $G$  ее  $p$ -подгруппа, то найдется тор  $T \subset \mathcal{G}$ , так что  $G$  лежит в нормализаторе этого тора  $N(T)$ . В частности, если  $\mathcal{G}$  это  $\mathrm{SL}_p(\mathbb{C})$  или  $\mathrm{PGL}_p(\mathbb{C})$ , то факторгруппа  $G/(G \cap T)$  содержится в группе  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , порожденной матрицей перестановки.*

**Следствие А.9.** *Если 3-подгруппа  $G \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$  не может быть порождена менее чем 3 элементами, то либо она содержит абелеву подгруппу  $\mathcal{C}_3^3$ , либо в некотором базисе она содержит следующие две матрицы (здесь  $\zeta$  это примитивный кубический корень из 1, а  $\lambda_i$  это корни из 1 степеней  $3^{k_i}$ ):*

$$(A.10) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}$$

В последнем случае ранг пересечения  $G$  с тором  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$  равен 2.

*Доказательство.* Группа  $G \cap T$  абелева, если ее ранг равен 3, то  $G$  содержит  $C_3^3$ . Поскольку  $G$  не может быть порождена 2 элементами, ранг  $G \cap T$  не меньше 2. Предположим, что ранг  $G \cap T$  равен 2.

Тогда в силу теоремы A.8 видим, что в некотором базисе группа  $G$  порождена некоторой подгруппой группы  $T$  диагональных матриц в  $GL_3(\mathbb{C})$  и элементом  $\sigma$ . Сопряжения этой матрицей действуют на торе  $T$  перестановками координат.

Пусть  $t$  некоторый нетривиальный элемент  $G \cap T$ . Если элемент  $\sigma t \sigma^{-1}$  не пропорционален  $t$ , то элементы  $\sigma$  и  $t$  порождают абелеву подгруппу ранга 3 в торе  $T$ , что противоречит нашему предположению. Значит,  $\sigma t \sigma^{-1}$  пропорционально  $t$  и следовательно  $G$  может содержать лишь скалярную матрицу или же вторую матрицу из (A.10). Поскольку ранг  $G \cap T$  равен 2, они обе должны присутствовать.  $\square$

Это утверждение позволяет оценить количество образующих 3-подгрупп в  $GL_n(\mathbb{C})$  для больших значений  $n$ .

**Предложение A.11.** Пусть  $n$  это натуральное число меньше 9. Тогда, если  $G$  это 3-подгруппа в  $GL_n(\mathbb{C})$ , то ее можно породить  $n$  элементами. Если  $G$  это 3-подгруппа в  $PGL_n(\mathbb{C})$ , то ее можно породить  $n - 1$  элементом.

*Доказательство.* Пусть  $G$  это 3-подгруппа в  $GL_n(\mathbb{C})$ . Эта группа имеет представление в векторном  $n$ -мерном пространстве. Так как  $n < 9$ , это представление раскладывается в прямую сумму нескольких одномерных и трехмерных представлений, а значит

$$(A.12) \quad G \subset \prod_{i=1}^{n-3k} G'_i \times \prod_{j=0}^k G''_j,$$

где  $G'_i$  это циклические 3-группы, а  $G''_j$  некоторые 3-подгруппы  $GL_3(\mathbb{C})$ . Значит в силу лемм A.3 и A.7 группа  $G$  может быть порождена не более чем  $n$  элементами.

Рассмотрим теперь некоторую 3-подгруппу  $G \subset PGL_n(\mathbb{C})$ . Обозначим ее прообраз в  $GL_n(\mathbb{C})$  за  $\tilde{G}$ . Если  $\tilde{G}$  может быть порождена  $n - 1$  элементом, то то же верно для  $G$ . Потому предположим, что  $\tilde{G}$  не может быть порождена менее чем  $n$  элементами. В силу следствия A.9 либо  $G$  содержит абелеву подгруппу тора ранга  $n$ , либо же  $\tilde{G} = G' \times G''$ , кроме того,  $G' \subset GL_3(\mathbb{C})$  и  $G'' \subset GL_{n-3}(\mathbb{C})$  и  $G'$  содержит матрицы (A.10), а пересечение  $G'$  с тором имеет ранг 2.

В этом случае, группа  $G'$  порождена скалярной матрицей и матрицами (A.10). Следовательно, ее образ в  $PGL_3(\mathbb{C})$  может быть порожден 2 элементами. При этом группа  $G''$ , а значит и ее образ в  $PGL_{n-3}(\mathbb{C})$ , может быть порождена  $n - 3$  элементами. В силу леммы A.3 получаем результат.  $\square$

Из этого утверждения мы можем вывести еще один полезный результат:

**Следствие A.13.** Если  $G \subset PGL_n(\mathbb{C})$  это 3-подгруппа, которую нельзя породить менее чем  $k$  образующими, и  $n < 9$ , то  $G$  содержит абелеву подгруппу  $A$  ранга  $k$ .

*Доказательство.* Это утверждение верно для образов диагонального тора в  $GL_n(\mathbb{C})$ , равно как и для образов групп, порожденных матрицами (A.10) и скалярными матрицами в  $GL_3(\mathbb{C})$ . Следовательно, это верно и для образа любой 3-подгруппы  $GL_n(\mathbb{C})$ .  $\square$

**Лемма A.14.** Любая 3-подгруппа в группе  $GL_2(\mathbb{Z})$  или  $GL_3(\mathbb{Z})$  — циклическая группа.

Этот результат уже показан в статье [25], поэтому несмотря на то, что его можно вывести из предложения A.11, мы опустим это рассуждение.

**Лемма A.15.** Пусть 3-группа  $G$  точно действует на решетке  $\Lambda \cong \mathbb{Z}^2$ . Тогда решетка инвариантов  $\Lambda^G$  не может быть одномерна.

*Доказательство.* Группа  $G$  лежит в группе автоморфизмов решетки  $\Lambda$ , то есть в  $GL_2(\mathbb{Z})$ . Следовательно, в силу леммы A.14 группа  $G$  циклическая и изоморфна  $C_{3^n}$ . Обозначим ее образующую за  $\gamma$ . У  $\gamma$  есть два собственных значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Если в решетке  $\Lambda$  есть нетривиальные инварианты, то одно из значений, например,  $\lambda_1$  равно 1. С другой стороны, произведение  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ , значит  $\lambda_2 = 1$ . Следовательно, если  $\Lambda^G \neq 0$ , то  $\Lambda^G = \Lambda$ .  $\square$

**А.4. Квадрики.** В этом разделе собраны простые утверждения, касающиеся квадрик. Для начала оценим количество образующих 3-группы, действующей на квадрик.

**Лемма А.16.** Пусть  $X$  это  $d$ -мерная квадрика в  $\mathbb{P}^{d+1}$ , где  $d < 7$ , а  $G$  это 3-подгруппа в группе автоморфизмов  $X$ . Тогда  $G$  может быть порождена  $d$  элементами.

*Доказательство.* Если  $X$  гладкая квадрика, то  $G$  это 3-подгруппа в  $\text{PSO}_{d+2}(\mathbb{C})$ . Предположим, группу  $G$  нельзя породить менее, чем  $m$  элементами. Тогда в силу следствия А.13 найдется абелева подгруппа  $A \subset G$  ранга  $m$ . Абелева подгруппа в  $\text{PSO}_{d+2}(\mathbb{C})$  это подгруппа тора этой группы, и его размерность равна  $\lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor$ . Таким образом, получаем, что для  $d > 0$  имеется неравенство

$$m \leq \left\lfloor \frac{d+2}{2} \right\rfloor \leq d.$$

Теперь предположим, что  $X$  это особая квадрика, то есть конус с вершиной  $Z$  над гладкой квадрикой. После раздутия этой вершины получаем  $G$ -инвариантное расслоение на проективные пространства над квадрикой. Следовательно, результат следует из леммы 2.2 и предложения А.11.  $\square$

Теперь покажем, что количество образующих 3-группы, точно действующей на пересечении нескольких квадрик, также можно оценить.

**Лемма А.17.** Рассмотрим многообразие  $Y$  — непустое пересечение не более чем трех квадрик в  $\mathbb{P}^3$ , не совпадающее ни с одной из них. Пусть  $G$  это 3-группа, действующая на  $Y$ , тогда найдется подгруппа  $H$  индекса не более 3 в  $G$ , сохраняющая некоторую точку  $y \in Y$ .

*Доказательство.* Размерность  $Y$  может принимать значения от 0 до 2. Если  $\dim(Y) = 0$ , то  $Y$  это объединение не более чем 8 точек. Поскольку мощность орбиты любой точки является степенью тройки, то для любой точки  $y \in Y$  стабилизатор  $\text{Stab}(y) \subset G$  это подгруппа индекса не больше 3.

Если  $\dim(Y) = 1$ , то  $Y$  это объединение кривых  $C_1 \cup \dots \cup C_k$  в  $\mathbb{P}^3$ , суммарная степень которых равна 4.

$$\deg(C_1) + \dots + \deg(C_k) = 4.$$

Если  $Y$  особая кривая, то на ней может быть не более 6 особых точек. Группа  $G$  сохраняет непустое множество особых точек, следовательно стабилизатор любой из них имеет индекс не более 3.

Если  $Y$  это гладкая неприводимая кривая, то это пересечение двух общих гладких квадрик. Следовательно, через  $Y$  проходит одномерное семейство квадрик, причем ровно четыре квадрики в этом семействе особы. Группа  $G$  сохраняет семейство и множество вырожденных квадрик в нем. Рассмотрим подгруппу  $H \subset G$ , переводящую каждую вырожденную квадрику в себя. Так как квадрик всего 4, группа  $H$  имеет индекс не более 3 в  $G$ . Так как  $H$  сохраняет 4 вырожденные кривые в одномерном пучке квадрик, она тривиально действует на всем семействе, а значит поточечно сохраняет и все пространство  $\mathbb{P}^3$  и, в частности, любую точку на  $Y$ .

Наконец, если  $\dim(Y) = 2$ , то это квадрика в  $\mathbb{P}^3$ . Если она особа, то это конус и его вершина это либо точка, либо прямая. В любом случае в силу предложения А.6 группа  $G$  сохраняет точку на  $Y$ . Если же  $Y$  это гладкая квадрика, то  $Y \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Поскольку  $G$  это 3-группа, то она вкладывается в  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ , следовательно, в силу предложения А.6 на  $Y$  найдется точка, которую  $G$  переводит в себя.  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Beauville: p-elementary subgroups of the Cremona group, J. Algebra, 314(2): 553–564, 2007.
- [2] A. Borel: Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes, (French) Tohoku Math. J., (2) 13, 216–240, 1961.
- [3] A. Borel, J-P. Serre: Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts, Comm. Math. Helv., 27, 128–139, 1953.
- [4] W.-L. Chow: On the geometry of algebraic homogeneous spaces, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 50, No. 1 (Jan., 1949), 32–67.

- [5] O. Debarre, A.G. Kuznetsov: Gushel–Mukai varieties: classification and birationalities, *Algebraic Geometry*, 5 (1), 15–76, 2018.
- [6] I. Dolgachev and V. Iskovskikh: Finite subgroups of the plane Cremona group, *Algebra, Arithmetic, and Geometry In Honor of Yu. I. Manin*, Progr. Math., 269–270, Birkhauser, 2009.
- [7] V.A. Iskovskikh, Y. Prokhorov.: Fano varieties, *Encyclopaedia Math. Sci. Algebraic geometry*, V, Springer, 1999.
- [8] W. Feit: The current situation in the theory of finite simple groups. *Congres intern. math.*, Tome 1, 55–93, 1970.
- [9] Y. Kawamata: Boundedness of  $\mathbb{Q}$ -Fano threefolds, In *Proceedings of the International Conference on Algebra*, Part 3 (Novosibirsk, 1989), *Contemp. Math.* 131, 439–445, Providence, RI, 1992.
- [10] M. Hall: *The theory of groups*, Chelsea Pub. Co., New York, 2nd edition, 1976.
- [11] A. Kuznetsov, Yu. Prokhorov, C. Shramov: Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds, *Jpn. J. Math.*, 13 no. 1, 109–185, 2018.
- [12] Sh. Mukai: Curves, K3 surfaces and Fano 3-folds of genus  $\leq 10$ , *Algebraic geometry and commutative algebra*, Vol. I, 357–377, Kinokuniya, Tokyo, 1988.
- [13] Yo. Namikawa: Smoothing Fano 3-folds. *J. Algebraic Geom.*, 6(2): 307–324, 1997.
- [14] Vl. Popov: Jordan groups and automorphism groups of algebraic varieties. In I. Cheltsov, C. Ciliberto, H. Flenner, J. McKernan, Y. G. Prokhorov, and M. Zaidenberg, editors, *Automorphisms in birational and affine geometry*. *Levico Terme, Italy, October 2012*, volume 79 of *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 185–213. 2014.
- [15] Yu. Prokhorov: 2-elementary subgroups of the space Cremona group. In *Automorphisms in birational and affine geometry*, volume 79 of *Springer Proc. Math. Stat.*, 215–229. Springer, Cham, 2014.
- [16] Yu. Prokhorov: p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3, *Classification of algebraic varieties*, EMS Ser. Congr. Rep., 327–338. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.
- [17] Yu. Prokhorov, C. Shramov: Jordan property for groups of birational selfmaps, *Compositio Math.*, 150(12): 2054–2072, 2014.
- [18] Yu. Prokhorov: *G*-Fano threefolds, I, *Adv. Geom.*, Volume 13, no. 3, 389–418, 2013.
- [19] Yu. Prokhorov: *G*-Fano threefolds, II, *Adv. Geom.*, Volume 13, no. 3, 419–434, 2013.
- [20] Yu. Prokhorov: Rationality of Fano threefolds with terminal Gorenstein singularities, I, arXiv:1907.05678.
- [21] Yu. Prokhorov, C. Shramov: p-subgroups in the space Cremona group, *Math. Nachr.*, 291, no. 8-9, 1374–1389, 2018.
- [22] M. Reid: Young person’s guide to canonical singularities, *Proceeding of Symposia of Pure Mathematics*, Volume 48, 1987.
- [23] A. Schweizer: On the exponent of the automorphism group of a compact Riemann surface, *Arch. Math. (Basel)*, Volume 107, no. 4, 329–340, 2016.
- [24] K. Shin: 3-Dimensional Fano Varieties with Canonical Singularities, *Tokyo Journal of Math.*, Volume 12, Number 2, 1989, 375–385.
- [25] K. Tahara: On the finite subgroups of  $GL(3, \mathbb{Z})$ , *Nagoya Math. Journal*, Vol. 41, 1971, 169–209.
- [26] В. А. Исковских: Трехмерные многообразия Фано. II, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, том 42, выпуск 3, страницы 506–549, 1978.
- [27] Ю. Г. Прохоров: О числе особых точек трехмерных факториальных многообразий Фано, *Матем. заметки*, 101:6, 949–954, 2017.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ, ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, УЛ. УСАЧЕВА, д. 6, 119048 МОСКВА; ÉCOLE POLYTECHNIQUE, FRANCE, CMLS, ROUTE DE SACLAY, 91128 PALAISEAU.

*E-mail address:* sasha.kuznetsova.57@gmail.com