ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2019, т. 307, с. 63–77

УДК 512.667

Спектральные алгебры и вырождение некоммутативной спектральной последовательности Ходжа–де Рама*

Д. Б. Каледин[а,б], **А. А. Коновалов**[б], **К. О. Магидсон**[б]

Поступило 03.06.2019; после доработки 23.06.2019; принято к публикации 11.10.2019

Посвящается светлой памяти И.Р. Шафаревича

Рассматривается теорема о вырождении некоммутативного обобщения спектральной последовательности Ходжа–де Рама, доказанная ранее первым автором. Приводится улучшенная и упрощенная версия ее доказательства, которая в явном виде использует спектральную алгебраическую геометрию. Также объясняется, почему для доказательства существенно необходимы методы алгебраической топологии.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4037

ВВЕДЕНИЕ

Для любой дифференциально-градуированной (DG) алгебры A над полем K существует спектральная последовательность *Ходжа–де Рама*

$$HH_\bullet(A)((u)) \Rightarrow HP_\bullet(A), \qquad \deg u = 2,$$

связывающая ее гомологии Хохшильда и периодические циклические гомологии. Концевичем и Сойбельманом в работе [7] была выдвинута гипотеза о том, что если $\operatorname{\mathsf{char}} K = 0$ и A гладкая и собственная, то эта спектральная последовательность вырождается. Гипотеза была доказана при некоторых ограничениях в [4] и в полной общности в [5]. Недавно немного другое доказательство было дано в работе [9].

Данная работа выросла из попыток обобщить эти результаты на другие ситуации, возникающие в приложениях (например, на случай $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированных DG-алгебр). Сделать это нам пока не удалось; однако мы считаем, что можем по меньшей мере упростить и прояснить доказательства из [4, 5]. Это является темой настоящей работы.

Хотя само утверждение теоремы о вырождении чисто гомологическое, все существующие доказательства используют стабильную теорию гомотопий. Это обстоятельство хорошо видно в работе [4], еще лучше — в доказательстве Мэтью и неявно присутствует и в [5] (где оно на самом деле было сознательно спрятано, чтобы не раздражать читателей, не любящих

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда “БАЗИС” (проект 18-1-6-95-1, Leader (Math)). Работа первого и второго авторов была выполнена также при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и проекта повышения конкурентоспособности ведущих российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров “5-100”.

[а] Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.

[б] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия.

E-mail: kaledin@mi-ras.ru (Д.Б. Каледин), kon_an_litsey@list.ru (А.А. Коновалов), kirill.salmi94@gmail.com (К.О. Магидсон).

топологию). Основную причину, по которой топология может быть полезна, можно резюмировать так.

Если алгебра A гладкая и собственная над K, то спектральная последовательность Ходжа–де Рама состоит из конечномерных K-векторных пространств, так что по стандартному критерию Делиня она вырождается тогда и только тогда, когда первый лист абстрактно изоморфен последнему. Более общо, гомологии Хохшильда $HH(A/R)$ определены для алгебры A над любым коммутативным кольцевым спектром R, и можно спросить, существует ли изоморфизм

$$HH(A/R)\otimes_R R^{tS^1}\cong HP(A/R), \qquad (*)$$

где R^{tS^1} обозначает тейтовские гомотопические неподвижные точки спектра R по тривиальному действию окружности S^1, а $HP(A/R)=HH(A/R)^{tS^1}$ — тейтовские неподвижные точки гомологий $HH(A/R)$ по стандартному действию окружности. Гомотопические группы $\pi_\bullet(R^{tS^1})$ могут быть вычислены с помощью спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха, которая начинается с $\pi_\bullet(R)((u))$. Если R — ориентируемый кольцевой спектр (например, обычное коммутативное кольцо), то эта спектральная последовательность вырождается, так что $R^{tS^1}\cong$ $\cong R((u))$. Но вообще говоря, вырождаться она не обязана и спектр R^{tS^1} может быть меньше, чем $R((u))$. В некоторых благоприятных ситуациях он может стать настолько маленьким, что $(*)$ существует по тривиальным причинам.

На практике мы не знаем, бывают ли такие “благоприятные ситуации”. Однако если мы рассмотрим циклическую группу $C_p\subset S^1$ простого порядка p, то имеется поразительный результат, известный как гипотеза Сигала: для спектра сфер $\mathbb{S}$ тейтовские неподвижные точки $\mathbb{S}^{tC_p}$ — это просто p-пополнение $\mathbb{S}_p$. Тем самым этот спектр настолько мал, насколько возможно (и, в частности, связен). Исходя из этого, разумно попытаться рассмотреть все простые числа по отдельности и свести утверждение о вырождении для каждого p к некоторому утверждению о тейтовских неподвижных точках $HH(A/R)^{tC_p}$, которое будет следовать из гипотезы Сигала.

По существу именно это и происходит в работах [4, 5]. Формально говоря, аргумент повторяет классическое доказательство Делиня–Иллюзи [2] и проводится сведением в положительную характеристику. Для сведения используется замечательная теорема Тоена: $A\cong A_R\otimes_R K$ для некоторой гладкой и собственной DG-алгебры A_R над конечно порожденным кольцом $R\subset K$, гладким над $\mathbb{Z}$. После этого для каждого поля вычетов k положительной характеристики p нужно доказать теорему для $A_k=A_R\otimes_R k$. В то время как, вообще говоря, вырождение Ходжа–де Рама в положительной характеристике неверно, оно остается верным при некоторых дополнительных условиях. В [4, 5] условия таковы: A поднимается на кольцо вторых векторов Витта $W_2(k)$, а когомологии Хохшильда $HH^i(A)$ обращаются в нуль при $i\geq 2p$. Однако что означает второе условие на самом деле, явно в [4] и неявно в [5], — это то, что A может быть поднята на некоторый кольцевой спектр, выступающий в роли топологического аналога $W_2(k)$. Вырождение тогда следует из некоторой обрезанной версии гипотезы Сигала для C_p, доказываемой по существу “руками”.

Мэтью в [9] накладывает похожие условия, но на гомологии Хохшильда, а не на когомологии, и причина этого в том, что он использует другую стратегию: вместо того чтобы строить подъем k-алгебры A до алгебры над спектром, он рассматривает ее саму по себе как алгебру над спектром сфер и затем использует в своем доказательстве глубокие результаты о топологических гомологиях Хохшильда. Трудно придумать, как этот подход можно улучшить, но зато в ретроспективе вполне очевидно, что можно сделать с подходом работы [5]. Вместо того чтобы ограничивать алгебру A на кольцо $R\subset K$, затем дополнительно локализовать R для того, чтобы сделать все поля вычетов k достаточно хорошими, а затем поднимать каждую A_k до алгебры над кольцевым спектром с помощью теории препятствий, следует сразу ограничить A на подходящий кольцевой спектр R, после чего алгебры A_k не надо будет никуда поднимать и не придется накладывать никаких условий. Набросок такого доказательства и дан в настоящей работе.

Очевидная проблема с таким упрощенным доказательством в том, что оно должно быть выполнено топологическими методами и для этого требуется подходящая техника. В данный момент более-менее ясно, что хотелось бы иметь некий модельно-независимый формализм "оснащенных категорий", как стабильных, так и нестабильных, и этот формализм должен быть снабжен компактным и удобным инструментарием, пригодным для практических приложений. В настоящий момент единственный существующий формализм — это формализм ∞-категорий в смысле Дж. Лури, который не является модельно-независимым (вместо того чтобы выбирать категорию моделей, приходится выбирать модель для категории). Что еще хуже, в нем не разделены четко модельно-зависимые и модельно-независимые части и его нельзя использовать как "черный ящик". Нет никакого удобного набора инструментов; напротив, математически строгая работа, написанная на ∞-категорном языке, неизбежно должна опираться на тысячи страниц основополагающих работ Лури и буквально через строку давать точные библиографические ссылки. В принципе, проделать все это можно; хороший пример тому — недавняя работа [10]. Однако более распространенная практика на сегодняшний день — не делать этого вовсе, полагаясь на гипотетическую способность читателя заполнить пробелы.

Мы подчеркиваем, что это очень плохая практика, которая неизбежно приведет к катастрофе, и следуем ей. Наше единственное оправдание в том, что, в конце концов, теорема о вырождении уже доказана. Наша цель — прояснить доказательство и показать, как его улучшить, а не переделать его с полной строгостью. При этом конкретное, детальное и нетривиальное приложение вроде того, набросок которого мы даем, наглядно покажет, что уж точно должно стать частью стандартного набора инструментов для работы с оснащенными категориями, а может быть, и поможет в его создании. Для того чтобы подчеркнуть предварительный характер наших результатов, мы говорим об оснащенных категориях и функторах, а не о ∞-категориях, и еще раз подчеркиваем, что данная работа не более чем набросок.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Оснащенные категории. Для любой оснащенной категории $\mathcal{C}$ мы обозначаем через $\pi_0(\mathcal{C})$ подлежащую обычную категорию. Оснащенный функтор $\gamma\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ индуцирует функтор $\pi_0(\gamma)\colon \pi_0(\mathcal{C}) \to \pi_0(\mathcal{C}')$, который мы будем обозначать просто через γ, если это не ведет к путанице. Для любой оснащенной категории $\mathcal{C}$ и малой категории I оснащенные функторы из I в $\mathcal{C}$ образуют оснащенную категорию $\mathcal{C}^I$. Мы имеем естественный функтор сравнения

$$\pi_0\colon\ \pi_0(\mathcal{C}^I) \to \pi_0(\mathcal{C})^I, \tag{1.1}$$

и если $I = \mathbb{N}$ — вполне упорядоченное множество натуральных чисел, обычным образом рассматриваемое как малая категория, то функтор (1.1) существенно сюръективный и полный. Функтор $\gamma\colon I_0 \to I_1$ индуцирует оснащенный функтор обратного образа $\gamma^*\colon \mathcal{C}^{I_1} \to \mathcal{C}^{I_0}$. Оснащенная категория $\mathcal{C}$ называется *кополной*, если для любой малой категории I функтор обратного образа $\tau^*\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$, индуцируемый проекцией $\tau\colon I \to \mathsf{pt}$ на точку pt, допускает левый сопряженный оснащенный функтор $\mathsf{hocolim}_I\colon \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$. Объект $c \in \mathcal{C}$ в кополной категории $\mathcal{C}$ называется *компактным*, если функтор оснащенного вложения Йонеды $\mathrm{Hom}(c,-)$ коммутирует с $\mathsf{hocolim}_I$ для любых малых диаграмм I. Кополная оснащенная категория $\mathcal{C}$ называется *компактно порожденной*, если полная оснащенная подкатегория $\mathcal{C}^{\mathrm{pf}} \subset \mathcal{C}$, порожденная компактными объектами, является малой и для любого объекта $c \in \mathcal{C}$ мы имеем $c \cong \mathsf{hocolim}_I\, c_{\bullet}$ для некоторого оснащенного функтора $c_{\bullet}\colon I \to \mathcal{C}^{\mathrm{pf}}$ из фильтрованной малой категории I. Любая малая оснащенная категория $\mathcal{C}$ канонически вкладывается как полная строгая оснащенная подкатегория в свое Ind-*пополнение* $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$; это кополная компактно порожденная оснащенная категория, и любой $c \in \mathcal{C}$ компактен в $\mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{C}$.

Малые оснащенные категории сами по себе образуют оснащенную категорию $\mathcal{C}at$. Эта категория является кополной. Полная оснащенная подкатегория $\mathcal{C}at^{\leq 1} \subset \mathcal{C}at$, порожденная обычными малыми категориями, замкнута относительно фильтрованных гомотопических копределов (но не относительно всех копределов), а обрезание задает оснащенный функтор $\pi_0\colon \mathcal{C}at \to \mathcal{C}at^{\leq 1}$, сопряженный слева к вложению. Функтор π_0 коммутирует с фильтрованными гомотопическими копределами, а фильтрованные гомотопические копределы $\mathcal{C}at^{\leq 1}$ совпадают с классическими 2-копределами обычных категорий.

Мы будем говорить, что оснащенная категория $\mathcal{C}$ *каруби-замкнута*, если таковой является $\pi_0(\mathcal{C})$. Следующая лемма по существу принадлежит Б. Тоену.

Лемма 1.1. *Пусть дан оснащенный функтор $\gamma\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ между кополными оснащенными категориями, который сохраняет фильтрованные гомотопические копределы, и предположим, что $\pi_0(\gamma)$ консервативен, а $\mathcal{C}$ каруби-замкнута. Тогда $\mathcal{C}'$ каруби-замкнута.*

Доказательство. Предположим, что у нас есть объект $c \in \mathcal{C}'$ и идемпотентный эндоморфизм $p\colon c \to c$ в $\pi_0(\mathcal{C}')$, $p^2 = p$. Пусть $C\colon \mathbb{N} \to \mathcal{C}'$ — постоянный оснащенный функтор со значением c, и рассмотрим функтор $C(p)_0\colon \mathbb{N} \to \pi_0(\mathcal{C}')$, переводящий любое $n \in \mathbb{N}$ в c, с морфизмами перехода $C(p)_0(n) \to C(p)_0(n+1)$, равными p. Пусть $B_0\colon C(p)_0 \to \pi_0(C)$ — отображение, равное p для любого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку функтор (1.1) существенно сюръективный и полный для $I = \mathbb{N}$, мы можем поднять $C(p)_0$ до оснащенного функтора $C(p)\colon \mathbb{N} \to \mathcal{C}$, $\pi_0(C(p)) \cong C(p)_0$, и B_0 поднимается до отображения $B\colon C(p) \to C(p)$ оснащенных функторов. По сопряженности изоморфизм $c \cong C(p)(0)$ индуцирует отображение $A\colon C \to C(p)$. Поскольку $\mathcal{C}'$ кополна, $\mathsf{hocolim}_{\mathbb{N}}$ существует и функториален, и если мы положим $c(p) = \mathsf{hocolim}_{\mathbb{N}} C(p)$, то A и B индуцируют отображения

$$a\colon\ c = \mathsf{hocolim}_{\mathbb{N}} C \to c(p), \qquad b\colon\ c(p) \to c.$$

Снова по сопряженности мы имеем $b \circ a = p$. Если идемпотент p имеет образ c', т.е. мы имеем $c' \in \mathcal{C}'$ и отображения $a'\colon c \to c'$, $b'\colon c' \to c$ такие, что $b' \circ a' = p$ и $a' \circ b' = \mathsf{id}$ в $\pi_0(\mathcal{C}')$, то легко проверить, что композиция $a \circ b'\colon c' \to c(p)$ — изоморфизм, так что $a \circ b = \mathsf{id}$ в силу единственности образа идемпотента. Если нет, то, поскольку γ коммутирует с фильтрованными гомотопическими копределами, а $\mathcal{C}$ каруби-замкнута, мы по крайней мере видим, что $\gamma(a \circ b) = \gamma(a) \circ \gamma(b) = \mathsf{id}$ в $\pi_0(\mathcal{C})$. Но поскольку γ консервативен, отсюда следует, что $a \circ b$ обратим, а тогда

$$(a \circ b)^3 = a \circ (b \circ a)^2 \circ b = a \circ p^2 \circ b = a \circ p \circ b = (a \circ b)^2,$$

так что $a \circ b = \mathsf{id}$. $\square$

1.2. Спектральные алгебры. Мы обозначаем через $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ стабильную оснащенную категорию спектров. Она кополна, компактно порождена и каруби-замкнута (последнее несколько нетривиально, поскольку, например, категория непунктированных топологических пространств не является таковой). Она также имеет естественную структуру симметрической моноидальной категории, и оснащенные категории $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(\mathbb{S})$ и $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ соответственно E_1- и E_∞-алгебр в $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ также кополны. Стабильная оснащенная категория $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ (или, строго говоря, ее триангулированное обрезание $\pi_0(\mathcal{D}(\mathbb{S})))$ имеет естественную t-структуру, в которой $\mathcal{D}^{\leq 0}(\mathbb{S}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{S})$ состоит из связных спектров, и спектр называется *дискретным*, если он лежит в сердцевине естественной t-структуры. Функтор, переводящий E в $\pi_0(E)$, отождествляет сердцевину с категорией абелевых групп. Дискретная E_∞-алгебра $\mathcal{D}(\mathbb{S})$ — это то же самое, что ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Для любого положительного целого числа N пусть $\mathbb{S}(N^{-1})$ — локализация спектра сфер $\mathbb{S}$ в N. Заметим, что

$$\mathbb{Q} \cong \mathsf{hocolim}_N\, \mathbb{S}(N^{-1}), \tag{1.2}$$

где копредел берется по отношению порядка, данному делимостью, а $\mathbb{Q}$ — поле вещественных чисел, рассматриваемое как дискретная E_∞-алгебра в $\mathcal{D}(\mathbb{S})$.

Для любой E_1-алгебры $A \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(\mathbb{S})$ мы имеем кополную стабильную оснащенную категорию $\mathcal{D}(A)$ левых A-модулей, а для любой E_∞-алгебры R в $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ — стабильную симметрическую моноидальную оснащенную категорию R-модулей $\mathcal{D}(R)$ и кополные оснащенные симметрические моноидальные категории $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ и $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(R)$ соответственно E_1- и E_∞-алгебр в $\mathcal{D}(R)$. Морфизм $R \to R'$ между E_1- или E_∞-алгебрами индуцирует сопряженную пару из функтора тензорного произведения $\mathcal{D}(R) \to \mathcal{D}(R')$, $M \mapsto R' \otimes_R M$ и функтора ограничения $\mathcal{D}(R') \to \mathcal{D}(R)$. В E_∞-случае тензорное произведение симметрически моноидально, в то время как функтор ограничения слабо (lax) моноидален по сопряженности (в контексте ∞-категорий это [8, Corollary 7.3.2.7]); поэтому мы имеем индуцированную сопряженную пару функторов между $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ и $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R')$ и между $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(R)$ и $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(R')$. Во всех этих сопряженных парах функтор ограничения коммутирует с фильтрованными копределами, так что по сопряженности функтор тензорного произведения переводит компактные объекты в компактные.

Оснащенная категория $\mathcal{D}(R)$ компактно порождена, но верно большее. А именно, забывающий функтор $\mathcal{D}(R) \to \mathcal{D}(\mathbb{S})$ имеет левый сопряженный функтор свободного модуля $F\colon \mathcal{D}(\mathbb{S}) \to \mathcal{D}(R)$, $F(V) = V \otimes_{\mathbb{S}} R$, и объект $M \in \mathcal{D}(R)$ называется *конечно представленным*, если он является конечным гомотопическим копределом объектов вида $F(E)$, $E \in \mathcal{D}(\mathbb{S})^{\mathrm{pf}}$. Любой объект в $\mathcal{D}(R)$ является фильтрованным гомотопическим копределом конечно представленных. Поскольку фильтрованные гомотопические копределы коммутируют с конечными пределами, любой конечно представленный объект $\mathcal{D}(R)$ компактен и таковы же его ретракты. С другой стороны, поскольку изоморфизм $M \cong \mathsf{hocolim}_I\, M_i$ с фильтрованной I и компактным M обязан пропускаться через некоторый M_i, любой компактный объект является ретрактом конечно представленного. То же самое верно для $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$, $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(R)$ и $\mathcal{D}(A)$ для любого $A \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$. Более того, забывающий функтор консервативен и коммутирует с фильтрованными гомотопическими копределами, так что $\mathcal{D}(R)$ каруби-замкнута по лемме 1.1 и то же самое верно для $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$, $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(R)$ и $\mathcal{D}(A)$. Кроме того, мы имеем полные подкатегории $\mathcal{D}^{\leq 0}(\mathbb{S}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{S})$, $\mathcal{D}\mathcal{A}lg^{\leq 0}(\mathbb{S}) \subset \mathcal{D}\mathcal{A}lg(\mathbb{S})$, $\mathcal{D}\mathcal{C}omm^{\leq 0}(\mathbb{S}) \subset \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$, порожденные связными спектрами, которые также компактно порождены, и таковыми же являются $\mathcal{D}^{\leq 0}(R) \subset \mathcal{D}(R)$, $\mathcal{D}\mathcal{A}lg^{\leq 0}(R) \subset \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$, $\mathcal{D}\mathcal{C}omm^{\leq 0}(R) \subset \mathcal{D}\mathcal{C}omm(R)$ для любой связной E_∞-алгебры $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm^{\leq 0}(\mathbb{S})$.

Замечание 1.2. Компактные объекты в $\mathcal{D}(R)$ известны также как *совершенные R-модули*, что объясняет наши обозначения (хотя обычно пишут $\mathcal{D}^{\mathrm{pf}}(R)$ вместо $\mathcal{D}(R)^{\mathrm{pf}}$). Для алгебр стандартной терминологии нет. Тоен называет компактные алгебры гомотопически конечно представленными.

Для любого $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ и $A \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ кополная оснащенная категория $\mathcal{D}(A)$ совпадает с Ind-пополнением $\mathrm{Ind}(\mathcal{D}(A)^{\mathrm{pf}})$ своей полной подкатегории компактных объектов. Помимо компактности, существует еще одно полезное условие конечности для объектов категории A-модулей: A-модуль $M \in \mathcal{D}(A)$ называется *когерентным*, если он компактен как объект категории $\mathcal{D}(R)$. Заметим, что, в отличие от компактности, свойство быть когерентным сохраняется при ограничении вдоль любого морфизма алгебр. В действительности любой компактный объект в $\mathcal{D}(R)$ дуализируем, так что у нас есть алгебра эндоморфизмов $\mathrm{End}_R(M) \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ и M канонически является $\mathrm{End}_R(M)$-модулем. Тогда M тавтологически когерентен над $\mathrm{End}_R(M)$ и любая структура A-модуля на M индуцирована этой канонической структурой $\mathrm{End}_R(M)$-модуля посредством ограничения вдоль отображения $a\colon A \to \mathrm{End}_R(M)$ в $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$. Мы обозначаем через $\mathcal{D}(A)^{\mathrm{coh}} \subset \mathcal{D}(A)$ полную подкатегорию, порожденную когерентными модулями; заметим, что Ind-пополнение $\mathrm{Ind}(\mathcal{D}(A)^{\mathrm{coh}})$, вообще говоря, отличается от $\mathcal{D}(R)$.

Для любой E_∞-алгебры $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ можно поставить в соответствие E_1- или E_∞-алгебре R' над R оснащенную категорию $\mathcal{D}(R')^{\mathrm{pf}}$ компактных R-модулей. Это задает оснащенные функторы

$$\mathcal{D}^{\mathrm{pf}}\colon\ \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R), \mathcal{D}\mathcal{C}omm(R) \to \mathcal{C}at. \tag{1.3}$$

Самой $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ можно поставить в соответствие категории $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)^{\mathrm{pf}}$, $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(R)^{\mathrm{pf}}$. Это задает функторы

$$\mathcal{D}\mathcal{A}lg^{\mathrm{pf}}, \mathcal{D}\mathcal{C}omm^{\mathrm{pf}}\colon\ \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S}) \to \mathcal{C}at. \tag{1.4}$$

Нам будет нужен следующий фундаментальный факт.

Предложение 1.3. *Оснащенные функторы* (1.3) *и* (1.4) *коммутируют с фильтрованными гомотопическими копределами.*

Схема доказательства. Аргумент один и тот же во всех случаях. Для конечно представленных объектов $M = \mathsf{hocolim}_I\, F(E_i)$ (I конечно) доказательство является прямолинейной индукцией по кардинальности I. В общем случае используем характеризацию компактных объектов как ретрактов конечно представленных и замечаем, что, как мы уже доказали, необходимые ретракции должны появляться на конечном шаге. $\square$

2. ФОРМАЛЬНАЯ ГЛАДКОСТЬ

Для любой E_∞-алгебры $A \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$, любой E_∞-алгебры $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(A)$ и любого R-модуля $M \in \mathcal{D}(R)$ мы имеем расщепимое расширение с квадратом нуль $R \oplus M \in \mathcal{D}(A)$ E_∞-алгебры R при помощи M, и дифференцирования из R в M суть расщепления $R \to R \oplus M$ отображения аугментации $R \oplus M \to R$. Дифференцирования образуют оснащенный функтор $\mathrm{Der}\colon \mathcal{D}(R) \to \mathcal{D}(\mathbb{S})$, представленный *кокасательным модулем* $\Omega(R/A) \in \mathcal{D}(R)$. Если R компактна в $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(A)$, то $\Omega(R/A)$ компактен в $\mathcal{D}(R)$. Тот же самый модуль также контролирует нерасщепимые расширения. В частности, если нет никаких морфизмов $\Omega(R/A)$ в гомологический сдвиг $M[1]$ некоторого $M \in \mathcal{D}(R)$, то любое расширение с квадратом нуль

$$M \to R' \to R$$

в $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(A)$ допускает расщепление $R \to R'$. Кокасательный модуль $\Omega(-/A)$ в надлежащем смысле функториален и коммутирует с фильтрованными копределами: для любого оснащенного функтора $R_\bullet\colon I \to \mathcal{D}\mathcal{C}omm(A)$ с малой фильтрованной I и $R = \mathsf{hocolim}_I\, R_\bullet$ имеем оснащенный функтор из I в $\mathcal{D}(R)$ со значениями $\Omega(R_i/A) \otimes_{R_i} R$, а также естественный изоморфизм

$$\Omega(R/A) \cong \mathsf{hocolim}_I\, \Omega(R_\bullet/A) \otimes_{R_\bullet} R. \tag{2.1}$$

Замечание 2.1. В ∞-категорном контексте приведенный выше набросок соответствует рассуждениям из [8, Sects. 7.3, 7.4], но по какой-то причине логика там перевернута: вместо того чтобы сначала определить расширения с квадратом нуль (например, через естественную симметрическую моноидальную структуру на фильтрованной версии $\mathcal{D}(\mathbb{S})$), Лури сначала определяет дифференцирования. Конечный результат тот же самый.

Для любой E_∞-алгебры $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ и любого множества S мы имеем свободный R-модуль $R[S] \in \mathcal{D}(R)$, порожденный S. Мы говорим, что $M \in \mathcal{D}(R)$ является *проективным*, если он является ретрактом свободного R-модуля $R[S]$, и *конечно порожденным проективным*, если S можно выбрать конечным. Конечно представленные проективные модули компактны, и, наоборот, компактные проективные модули конечно порождены.

Определение 2.2. Пусть $A \in \mathcal{D}Comm(\mathbb{S})$ — связная E_∞-алгебра. Тогда E_∞-алгебра $R \in \mathcal{D}Comm(A)$ называется *формально гладкой*, если она связна и компактна в $\mathcal{D}Comm(A)$ и $\Omega(R/A)$ является проективным R-модулем.

Если $A = \mathbb{Q}$ — поле вещественных чисел, то $\mathcal{D}(\mathbb{Q})$ — производная категория комплексов $\mathbb{Q}$-векторных пространств, $\mathcal{D}Comm(\mathbb{Q})$ — категория коммутативных DG-алгебр над $\mathbb{Q}$ и $A \in \mathcal{D}Comm(\mathbb{Q})$ формально гладкая тогда и только тогда, когда она является конечно порожденной и гладкой $\mathbb{Q}$-алгеброй, расположенной в гомологической степени 0. Формально гладкие алгебры над $\mathbb{S}$ описать не так просто. Однако заметим, что если $R \in \mathcal{D}Comm(\mathbb{S})^{\mathrm{pf}}$ формально гладкая, то коммутативное кольцо $\pi_0(R)$ должно быть по меньшей мере конечно порождено.

Предложение 2.3. *Для любого поля K характеристики 0 существует изоморфизм $K \cong \mathsf{hocolim}_I R_\bullet$ для некоторой малой фильтрованной I и оснащенного функтора $R_\bullet\colon I \to \mathcal{D}Comm(\mathbb{S})^{\mathrm{pf}}$, значения которого R_i, $i \in I$, формально гладки в смысле определения 2.2.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{D}Comm(\mathbb{S})$ компактно порождена, мы можем предположить, что $K \cong \mathsf{hocolim}_I R_\bullet$ для некоторой фильтрованной I и $R_\bullet\colon I \to \mathcal{D}Comm(\mathbb{S})^{\mathrm{pf}}$. Более того, поскольку K связна и $\mathcal{D}Comm^{\leq 0}(\mathbb{S})$ также компактно порождена, мы можем предположить, что все алгебры R_i связны. Проверки требует то, что мы можем выбрать их формально гладкими. Для этого достаточно проверить, что любое отображение $r\colon R \to K$ из компактной связной $R \in \mathcal{D}(\mathbb{S})^{\mathrm{pf}}$ пропускается через формально гладкую E_∞-алгебру C.

В самом деле, любое конечно порожденное подкольцо $C_0 \subset K$ лежит в конечно порожденной гладкой $\mathbb{Q}$-алгебре $C \subset K$. Поскольку R связна, у нас есть отображение аугментации $a\colon R \to \pi_0(R)$, и $r = b \circ a$ для некоторого отображения $b\colon \pi_0(R) \to K$. Значит, $\pi_0(R)$ конечно порождено и, взяв $C_0 = \operatorname{Im} b$, видим, что r пропускается через конечно порожденную гладкую $\mathbb{Q}$-подалгебру $C \subset K$. Но тогда из предложения 1.3 следует, что $\mathcal{D}Comm^{\mathrm{pf}}$ коммутирует с фильтрованными гомотопическими копределами и, в частности, коммутирует с копределом (1.2). Тогда $C = C_N \otimes_{\mathbb{S}[N^{-1}]} \mathbb{Q}$ для некоторого положительного числа N. Более того, поскольку C формально гладка над $\mathbb{Q}$, мы имеем отображения $a\colon \Omega(C/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}[S]$, $b\colon \mathbb{Q}[S] \to \Omega(C/\mathbb{Q})$, $b \circ a = \mathsf{id}$, для некоторого конечного множества S и вновь в силу предложения 1.3 можем предположить, увеличивая N, что a и b индуцированы такими отображениями

$$a_N\colon \Omega(C_N/\mathbb{S}(N^{-1})) \to \mathbb{S}(N^{-1})[S], \qquad b_N\colon \mathbb{S}(N^{-1})[S] \to \Omega(C_N/\mathbb{S}(N^{-1})),$$

что $b_N \circ a_N = \mathsf{id}$. Поэтому C_N формально гладкая над $\mathbb{S}(N^{-1})$ и, значит, также над $\mathbb{S}$, поскольку $\mathbb{S} \to \mathbb{S}(N^{-1})$ — это локализация. Наконец, поскольку R компактна, мы можем опять увеличить N так, что отображение $R \to C \cong \mathsf{hocolim}_N C_N$ пропускается через C_N, что и завершает доказательство. □

Теперь для любого простого p через $\mathbb{S}_p \in \mathcal{D}Comm(\mathbb{S})$ обозначим p-пополнение спектра сферы $\mathbb{S}$ с естественными отображениями $\mathbb{S}_p \to \mathbb{F}_p$, а для любой степени $q = p^n$ числа p через $\mathbb{S}_q$ обозначим n-кратное накрытие Галуа $\mathbb{S}_p$ с отображением $\mathbb{S}_q \to \mathbb{F}_q$ (поскольку $\mathbb{F}_q$ этально над $\mathbb{F}_p$, кокасательный комплекс $\Omega(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$ обращается в нуль, так что $\mathbb{S}_q$ существует и единственно).

Лемма 2.4. *Предположим, что у нас есть алгебра $R \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$, формально гладкая в смысле определения 2.2. Тогда для любого конечного поля $k = \mathbb{F}_q$ любое отображение $a\colon R \to k$ пропускается через каноническое отображение $\mathbb{S}_q \to k$.*

Доказательство. Пополненная сфера $S = \mathbb{S}_q$ является гомотопическим пределом оснащенного функтора $S_\bullet\colon \mathbb{N}^o \to \mathcal{D}Comm(\mathbb{S})$, $n \geq 1$, где $S_1 = k$ и каждая S_{n+1} является расширением с квадратом нуль алгебры S_n при помощи связного k-модуля $M \in \mathcal{D}(k)$. Поскольку функтор (1.1) для $I = \mathbb{N}$ полный и существенно сюръективный, достаточно продолжить $a_1 = a\colon R \to S_1 = k$ до согласованной системы факторизаций $a_n\colon R \to S_n$, $n \geq 2$. Это можно сделать по индукции: на каждом шаге препятствие к поднятию a_n до a_{n+1} лежит в группе $\mathrm{Hom}_R(\Omega(R/\mathbb{S}), M[1]) \cong \mathrm{Hom}_k(\Omega(R/\mathbb{S}) \otimes_{\mathbb{S}} k, M[1])$, а, так как $\Omega(R/\mathbb{S}) \otimes_{\mathbb{S}} k$ проективен и M связен, эта группа тривиальна. $\square$

3. ТЕОРЕМА ТОЕНА

Зафиксируем E_∞-алгебру $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ и предположим, что у нас есть E_1-алгебра $A \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$. Тогда A сама может быть рассмотрена не только как левый A-модуль $A \in \mathcal{D}(A)$, но и как правый R-модуль $A \in \mathcal{D}(R)$, а также как диагональный A-бимодуль $A \in \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}} \otimes_R A)$, где A^{o} обозначает противоположную E_1-алгебру.

Определение 3.1. Алгебра $A \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ называется *собственной* (*гладкой*), если A компактна как объект категории $\mathcal{D}(R)$ (соответственно $\mathcal{D}(A^{\mathrm{o}} \otimes_R A)$).

Гладкость и собственность функториальны по R, так что, переводя R в оснащенную категорию $\mathcal{D}\mathcal{A}lg^{\mathrm{sat}}(R)$ гладких и собственных E_1-алгебр в $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$, мы получаем оснащенный функтор

$$\mathcal{D}\mathcal{A}lg^{\mathrm{sat}}\colon \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S}) \to \mathcal{C}at. \tag{3.1}$$

Следующая красивая теорема по существу принадлежит Тоену.

Теорема 3.2. *Функтор* (3.1) *коммутирует с фильтрованными гомотопическими копределами.*

Строго говоря, Тоен в [12] рассматривает только ситуацию, когда R — коммутативное кольцо; мы напомним его доказательство, чтобы увидеть, что оно работает для спектральных алгебр без каких-либо изменений.

Определение 3.3. Предположим, что нам даны E_∞-алгебра $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ и две E_1-алгебры $A, B \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$, и введем обозначение $\mathcal{D}(A, B) = \mathcal{D}(A \otimes_R B)$. Тогда объект $M \in \mathcal{D}(A, B)$ *когерентен*, если он компактен как B-модуль.

Тоен использует термин "псевдосовершенный" вместо "когерентный", но наш вариант короче. Он также согласован с предыдущей терминологией: для любого $A \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ мы имеем $\mathcal{D}(A, R) = \mathcal{D}(A \otimes_R R) = \mathcal{D}(A)$, и это отождествление отождествляет когерентные объекты. Для любых $A, B \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg$ мы обозначим через $\mathcal{D}(A, B)^{\mathrm{coh}} \subset \mathcal{D}(A, B)$ полную оснащенную категорию, порожденную когерентными объектами. Заметим, что для любой A диагональный бимодуль $A \in \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, A) = \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}} \otimes_R A)$ всегда когерентен.

Лемма 3.4. *E_1-алгебра $A \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ является гладкой* (*собственной*) *тогда и только тогда, когда для любой $B \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ мы имеем $\mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, B)^{\mathrm{coh}} \subset \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, B)^{\mathrm{pf}}$* (*соответственно $\mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, B)^{\mathrm{pf}} \subset \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, B)^{\mathrm{coh}}$*).

Доказательство. Для доказательства собственности заметим, что свободный правый A-модуль $A \in \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}})$ компактен, так что если $\mathcal{D}(A^{\mathrm{o}})^{\mathrm{pf}} \subset \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}})^{\mathrm{coh}}$, то A когерентен, т.е. компактен над R. Наоборот, свойство быть когерентным замкнуто относительно ретрактов и конечных гомотопических копределов, так что достаточно проверить, что если A собственная, то $A^{\mathrm{o}} \otimes_R S \otimes_R B$ когерентна для любого компактного $S \in \mathcal{D}(R)$, что очевидно.

Для доказательства гладкости напомним, что $A \in \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, A)$ лежит в $\mathcal{D}(A^{\mathrm{o}} \otimes_R A)^{\mathrm{coh}}$, так что если $\mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, A)^{\mathrm{coh}} \subset \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, A)^{\mathrm{pf}}$, то этот объект компактен. Наоборот, заметим, что для любой B, любого когерентного $M \in \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, B)$ и любого компактного $N \in \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, A)$ объект $N \otimes_A M \in \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, B)$ компактен. Действительно, это достаточно проверить для $N = A^{\mathrm{o}} \otimes_R S \otimes_R A$ с некоторым компактным $S \in \mathcal{D}(R)$, и тогда $N \otimes_A M \cong A \otimes_R S \otimes_R M$. Но тогда если A гладкая, то любой когерентный M изоморфен $A \otimes_A M$ в $\mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, B)$ и поэтому также компактен. $\square$

Лемма 3.5. *Гладкая и собственная E_1-алгебра $A \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ компактна.*

Доказательство. Для любых двух алгебр $A, B \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ рассмотрим Hom-пространство $\mathrm{Hom}(A, B)$ в оснащенной категории $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$. Оно включается в функториальный гомотопически декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A,B) & \longrightarrow & \mathrm{Iso}(\mathcal{D}(A^{\mathrm{o}},B)^{\mathrm{coh}}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathsf{pt} & \longrightarrow & \mathrm{Iso}(\mathcal{D}(B)^{\mathrm{pf}}) \end{array}$$

где Iso — оснащенный группоид изоморфизмов объектов в оснащенной категории, правый вертикальный функтор — это забывающий функтор, а нижняя стрелка — это вложение объекта $B \in \mathcal{D}(B)$. Если A гладкая и собственная, мы можем заменить когерентные объекты компактными по лемме 3.4, а затем вспомнить, что $\mathcal{D}^{\mathrm{pf}}$ коммутирует с фильтрованными гомотопическими пределами согласно предложению 1.3. Поскольку фильтрованные гомотопические копределы коммутируют с конечными пределами, это доказывает, что $\mathrm{Hom}(A, -)$ также коммутирует с фильтрованными гомотопическими копределами. $\square$

Лемма 3.6. *Компактная алгебра $A \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ является гладкой.*

Доказательство. Для любого бимодуля $M \in \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, A)$ мы имеем расщепимое расширение с квадратом нуль $A \oplus M \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$, а его расщепления $A \to A \oplus M$ соответствуют отображениям $I_A \to M$ из некоммутативной версии $I_A \in \mathcal{D}(A^{\mathrm{o}} \otimes_R A)$ кокасательного модуля. Этот модуль I_A включается в точный треугольник

$$I_A \to A^{\mathrm{o}} \otimes_R A \to A \to$$

в триангулированной категории $\pi_0(\mathcal{D}(A^{\mathrm{o}}, A))$, так что он компактен тогда и только тогда, когда таковым является A. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. По лемме 3.5 мы имеем полное вложение $\mathcal{D}\mathcal{A}lg^{\mathrm{sat}}(R) \subset \subset \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)^{\mathrm{pf}}$ для любой $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$, так что, в частности, $\mathcal{D}\mathcal{A}lg^{\mathrm{sat}}(R)$ — малая категория и, стало быть, $\mathcal{D}\mathcal{A}lg^{\mathrm{pf}}$ коммутирует с фильтрованными гомотопическими копределами в силу предложения 1.3. Поэтому для любого оснащенного функтора $R_\bullet\colon I \to \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ из малой фильтрованной I и $R \cong \mathsf{hocolim}_I R_\bullet$ функтор

$$\mathsf{hocolim}_I\, \mathcal{D}\mathcal{A}lg^{\mathrm{sat}}(R_\bullet) \to \mathcal{D}\mathcal{A}lg^{\mathrm{sat}}(R)$$

полный и строгий, так что нам только остается проверить, что он существенно сюръективен. Другими словами, мы можем предположить, что $A_i \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R_i)^{\mathrm{pf}}$ такова, что $A = A_i \otimes_{R_i} R$ собственна, и нам нужно проверить, что для некоторого отображения $i \to i'$ уже $A_{i'} = A_i \otimes_{R_i} R_{i'}$ собственна (в то время как гладкость гарантирована леммой 3.6).

Поскольку A собственна, а $\mathcal{D}^{\mathrm{pf}}$ коммутирует с конечными фильтрованными копределами, мы можем предположить что как R-модуль A изоморфна $M_{i'} \otimes_{R_{i'}} R$ для некоторого $i' \in I$ и $M_{i'} \in \mathcal{D}(R_{i'})$. Поскольку I фильтрована, мы можем выбрать $i'' \in I$ с отображениями $i \to i''$, $i' \to i''$ и затем, заменяя I на $i'' \setminus I$, предположить, что I имеет начальный объект o, $A_o \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R_o)$ компактна и мы имеем изоморфизм R-модулей $A_o \otimes_{R_o} R \cong M_o \otimes_{R_o} R$ для некоторого $M_o \in \mathcal{D}(R_o)^{\mathrm{pf}}$. Положим $A_i = A_o \otimes_{R_o} R_i$, $M_i = M_o \otimes_{R_o} R_i$, $i \in I$. Поскольку A — когерентный A-модуль, структура A-модуля на нем индуцирована ограничением вдоль морфизма действия $a\colon A \to \mathrm{End}_R(A)$. После ограничения $\mathrm{End}_R(A)$ становится R_o-алгеброй, и отображение a сопряжено к $a_o\colon A_o \to \mathrm{End}_R(A)$ в категории $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R_o)$. Но

$$\mathrm{End}_R(A) \cong \mathrm{End}_{R_o}(M_o) \otimes_{R_o} R \cong \mathsf{hocolim}_I\, \mathrm{End}_{R_i}(M_i)$$

и, поскольку $A_o \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R_o)$ компактна, отображение a_o пропускается через некоторое отображение $A_o \to \mathrm{End}_{R_i}(M_i)$, $i \in I$, сопряженное к отображению $a_i\colon A_i \to \mathrm{End}_{R_i}(M_i)$ в $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R_i)$. Тогда с помощью ограничения M_i приобретает структуру когерентного A_i-модуля и, поскольку A_i компактна, $M_i \in \mathcal{D}(A_i)$ компактен по леммам 3.6 и 3.4. Поэтому у нас есть два компактных A_i-модуля, а именно M_i и сам A_i, и изоморфизм $A_i \otimes_{R_i} R \cong M_i \otimes_{R_i} R$ в $\mathcal{D}(A)$. Поскольку $\mathcal{D}^{\mathrm{pf}}$ коммутирует с фильтрованными гомотопическими копределами по предложению 1.3, этот изоморфизм индуцирован изоморфизмом $A_{i'} \cong M_{i'}$ в $\mathcal{D}(A_{i'})$ для некоторого $i' \in I$. Но $M_{i'} \in \mathcal{D}(A_{i'})$ не только компактен, но и когерентен, так что $A_{i'}$ должна быть собственной. $\square$

4. ДИАГОНАЛЬ ТЕЙТА

Напомним, что для любой $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ и любого множества S мы обозначаем через $R[S]$ прямую сумму копий R, занумерованных элементами $s \in S$. Более общо, для любого топологического пространства X мы обозначаем через $R[X] \in \mathcal{D}(\mathbb{S})$ спектр R-гомологий пространства X. Если $X = G$ — компактная группа Ли, то $R[G]$ есть E_1-алгебра в $\mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ по отношению к умножению Понтрягина, а отображение проекции $G \to \mathsf{pt}$ индуцирует E_1-морфизм аугментации $R[G] \to R$. Ограничение вдоль этой аугментации дает тавтологическое вложение $a\colon \mathcal{D}(R) \to \mathcal{D}(R[G])$, имеющее сопряженные справа и слева $M \mapsto M_{hG}$ и $M \mapsto M^{hG}$ соответственно, известные как *гомотопический фактор* и *гомотопические неподвижные точки*. Если R — дискретное кольцо и группа G конечна, то $\mathcal{D}(R[G])$ — производная категория R-линейных представлений группы G, гомотопический фактор — это гомологии группы, а гомотопические неподвижные точки — ее когомологии. В общем случае диагональное вложение $G \to G \times G$ наделяет $\mathcal{D}(R[G])$ структурой симметрической моноидальной категории, тавтологическое вложение a — симметрический моноидальный функтор, а функтор гомотопических неподвижных точек слабо моноидален по сопряженности. В частности, R^{hG} естественным образом является E_∞-алгеброй в $\mathcal{D}(R)$, а функтор гомотопических неподвижных точек продолжается до функтора

$$\mathcal{D}(R[G]) \to \mathcal{D}(R^{hG}), \qquad M \mapsto M^{hG}. \tag{4.1}$$

Поскольку группа G предполагается компактной, алгебра $R[G]$ собственная, так что мы имеем полное вложение

$$\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{pf}} \subset \mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{coh}} \tag{4.2}$$

и индуцированное вложение

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{pf}}) = \mathcal{D}(R[G]) \subset \mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{coh}}. \tag{4.3}$$

Однако $R[G]$ обычно не гладкая, так что вложения (4.2), (4.3) эквивалентностями не являются. Тем самым имеем нетривиальный оснащенный фактор Вердье

$$\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{sing}} = \mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{coh}}/\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{pf}}.$$

Подкатегория $\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{coh}} \subset \mathcal{D}(R[G])$ является симметрической моноидальной, а подкатегория $\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{pf}} \subset \mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{coh}}$ — симметрический моноидальный идеал, так что $\mathcal{D}^{\mathrm{sing}}(R[G])$ также является симметрической моноидальной естественным образом. На уровне Ind-пополнений вложение (4.3) индуцирует полуортогональное разложение

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{coh}}) = \langle \mathrm{Ind}(\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{sing}}), \mathcal{D}(R[G])\rangle. \tag{4.4}$$

Стабильные оснащенные категории $\mathrm{Ind}(\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{coh}})$, $\mathrm{Ind}(\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{sing}})$ симметрические моноидальные, и такова же проекция

$$l\colon\ \mathrm{Ind}(\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{coh}}) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{sing}}) \tag{4.5}$$

на первую компоненту разложения (4.4). Функтор аугментации $\mathcal{D}(R) \to \mathcal{D}(R[G])$ в композиции с (4.3) и проекцией l дает симметрический моноидальный функтор $\mathcal{D}(R) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{sing}})$, который имеет правый сопряженный функтор *тейтовских неподвижных точек*

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{sing}}) \to \mathcal{D}(R), \qquad M \mapsto M^{tG}. \tag{4.6}$$

Допуская некоторую вольность в обозначениях, мы будем писать $M^{tG} = l(M)^{tG}$ для любого M в категории $\mathrm{Ind}(\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{coh}})$ (и, в частности, для любого когерентного $M \in \mathcal{D}(R[G])$). Функтор (4.6) слабо симметрический моноидальный по сопряженности, так что R^{tG} является E_∞-алгеброй в $\mathcal{D}(R)$, и, так же как в (4.1), (4.6) канонически продолжается до оснащенного функтора

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{sing}}) \to \mathcal{D}(R^{tG}), \qquad M \mapsto M^{tG}. \tag{4.7}$$

Для любого $M \in \mathcal{D}(R[G])^{\mathrm{coh}}$ разложение (4.4) индуцирует точный треугольник

$$M_{hG}[d] \xrightarrow{t} M^{hG} \to M^{tG} \to, \tag{4.8}$$

где $d = \dim G$ — размерность группы G, а t — естественное отображение следа, индуцированное двойственностью Пуанкаре на G (если группа G конечна, то t — это просто усреднение по группе).

Иногда тейтовские неподвижные точки можно выразить как локализацию обычных неподвижных точек относительно некоторых элементов в гомотопических группах R^{hG}. Основной пример здесь — это единичная окружность $G = S^1$. Если (и только если) $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ ориентируема как обобщенная теория когомологий (например, если R дискретна), мы имеем $\pi_\bullet(R^{hS^1}) \cong \pi_\bullet(R)[u]$, где u — единственный образующий когомологической степени 2. В этом случае $\pi_\bullet(R^{tG}) = \pi_\bullet(R)[u, u^{-1}]$ и для любого $M \in \mathcal{D}(R[S^1])^{\mathrm{coh}}$ мы имеем

$$M^{tS^1} \cong M^{hS^1} \otimes_{R^{hS^1}} R^{tS^1} \cong \mathsf{hocolim}_n\, M^{tS^1}[2n], \tag{4.9}$$

где копредел берется по отношению к действию $u\colon M^{hS^1} \to M^{hS^1}[2]$ образующей $u \in \pi_{-2}(R^{hS^1})$.

Другой пример — это циклическая группа $G = C_p \subset S^1$ порядка $p \geq 3$, а R — кольцо, в котором умножение на p равно нулю. В этом случае $\pi_\bullet(R^{hC_p}) \cong R\langle \varepsilon, u\rangle$, где u имеет когомологическую степень 2, ε имеет когомологическую степень 1 и эти два элемента коммутируют между собой. Тейтовские неподвижные точки R^{tC_p} снова получаются обращением u, и для любого когерентного $M \in \mathcal{D}(R[C_p])$ мы снова имеем

$$M^{tC_p} \cong \mathsf{hocolim}_n\, M^{hC_p}[2n], \tag{4.10}$$

где копредел берется относительно действия u.

Если R неориентируемо, то $\pi_\bullet(R^{tS^1})$ выражается через спектральную последовательность Атьи–Хирцебруха, которая начинается с $\pi_\bullet(R)[u]$, но эта спектральная последовательность не вырождается и образующий u не выживает до последнего листа. Общий метод для вычисления R^{tS^1} нам неизвестен. Ситуация с циклическими группами похожая, но имеется следующий поразительный результат.

Лемма 4.1. *Пусть $R = \mathbb{S}_q$, $q = p^n$, есть n-кратное этальное накрытие p-пополнения сферы для некоторого $n \geq 1$ и некоторого простого p. Для любого $M \in \mathcal{D}(R)$ рассмотрим $M^{\otimes_R p}$ как объект категории $\mathcal{D}(R[C_p])$ относительно действия длинным циклом. Тогда имеется отображение*

$$M \to (M^{\otimes_R p})^{tC_p}, \tag{4.11}$$

функториальное по M, и это отображение является изоморфизмом, если M компактен. □

Это версия гипотезы Сигала (см. [10, Sect. III.1] и приведенные там ссылки). Николаус и Шольце называют (4.11) *диагональю Тейта*. Существенная часть доказательства — это случай $M = R$ (когда $M^{\otimes_R p}$ равно R с тривиальным действием группы C_p).

Наше доказательство вырождения Ходжа–де Рама основано на одном непосредственном следствии леммы 4.1. Заметим, что для любого отображения $R_0 \to R_1$ в $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ ограничение вдоль аугментации коммутирует с функтором тензорного произведения $- \otimes_{R_0} R_1$, так что по сопряженности мы получаем функториальное отображение

$$M^{tG} \otimes_{R_0^{tG}} R_1^{tG} \to (M \otimes_{R_0} R_1)^{tG} \tag{4.12}$$

для любого когерентного M в $\mathcal{D}(R_0[G])$, где M^{tG} рассматривается как R_0^{tG}-модуль посредством (4.7).

Следствие 4.2. *Пусть R таково, как в лемме* 4.1, *и пусть $k = \mathbb{F}_q$, $q = p^n$, — расширение Галуа степени n простого поля $\mathbb{F}_p$ с естественным отображением $R \to k$. Тогда для любого компактного $M \in \mathcal{D}(R)$ и $M_k = M \otimes_R k$ отображение*

$$M_k \otimes_k k^{tC_p} \to (M^{\otimes_k p})^{tC_p}, \tag{4.13}$$

полученное композицией (4.11) *и* (4.12), *является изоморфизмом.*

Доказательство. Обе стороны функториальны по M, и оба функтора являются стабильными оснащенными функторами, так что они коммутируют с конечными гомотопическими копределами и ретрактами. Поэтому достаточно рассмотреть случай $M = R$, в котором утверждение очевидно следует из леммы 4.1. $\square$

5. ВЫРОЖДЕНИЕ ХОДЖА–ДЕ РАМА

5.1. Циклические гомологии. Для любой E_∞-алгебры $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$ и любой E_1-алгебры $A \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ над R *гомологии Хохшильда* A над R определяются как R-модуль $HH(A/R) = A^{\mathrm{o}} \otimes_{A^{\mathrm{o}} \otimes_R A} A$. Чтобы описать его более явно, можно использовать бар-резольвенту, заменяющую A на почленно свободный симплициальный A-бимодуль; это дает канонический оснащенный функтор $(A/R)^{\Delta}_{\sharp} \colon \Delta^{\mathrm{o}} \to \mathcal{D}(R)$ и отождествление

$$HH(A/R) \cong \mathsf{hocolim}_{\Delta^{\mathrm{o}}} (A/R)^{\Delta}_{\sharp}.$$

Хорошо известно, что $HH(A/R)$ могут быть продолжены до объекта в $\mathcal{D}(R[S^1])$. Чтобы построить S^1-действие, заметим, что $(A/R)^{\Delta}_{\sharp}$ продолжается до циклической категории Конна Λ из работы [1]: мы имеем вложение $j \colon \Delta^{\mathrm{o}} \to \Lambda$ и оснащенный функтор $(A/R)_{\sharp} \colon \Lambda \to \mathcal{D}(R)$ такой, что $j^*(A/R)_{\sharp} \cong (A/R)^{\Delta}_{\sharp}$. Для любого оснащенного функтора $E \colon \Lambda \to \mathcal{D}(R)$ определяем

$$HH(E) = \mathsf{hocolim}_{\Delta^{\mathrm{o}}} j^* E, \qquad HC(E) = \mathsf{hocolim}_{\Lambda} E,$$

и легко доказать, что HH продолжается до функтора $\widetilde{HH} \colon \mathcal{D}(R)^{\Lambda} \to \mathcal{D}(R[S^1])$ (наиболее ясная конструкция этого продолжения дана в работе [3]). На самом деле можно сказать больше: классифицирующее пространство $|\Lambda|$ нерва категории Λ канонически изоморфно классифицирующему пространству BS^1 окружности, а $\mathcal{D}(R[S^1])$ естественно отождествляется с полной подкатегорией в $\mathcal{D}(R)^{\Lambda}$, порожденной локально постоянными оснащенными функторами. Функтор $\widetilde{HH}$ является левым сопряженным к вложению $\mathcal{D}(R[S^1]) \subset \mathcal{D}(R)^{\Lambda}$. Поэтому $HC(E) \cong HH(E)_{hS^1}$, и этот спектр называется циклическими гомологиями. Периодические циклические гомологии $HP(E)$ определяются как

$$HP(E) = HH(E)^{tS^1},$$

а обозначения $HP((A/R)_{\sharp})$ и $HC((A/R)_{\sharp})$ сокращают до $HP(A/R)$ и $HC(A/R)$ соответственно. Если R дискретно (в частности, ориентируемо), то $R^{hS^1} \cong R[u]$, $R^{tS^1} \cong R[u, u^{-1}]$ и для любой алгебры $A \in \mathcal{D}Alg(R)$ мы имеем спектральные последовательности

$$HH(A/R)[u^{-1}] \Rightarrow HC(A/R), \qquad HH(A/R)((u)) \Rightarrow HP(A/R), \tag{5.1}$$

известные как *спектральные последовательности Ходжа–де Рама.*

Для любого числа $n \geq 1$ имеем циклическую подгруппу $C_n \subset S^1$, и ее действие на HH можно увидеть напрямую в терминах категории Λ. Чтобы это сделать, рассматривают категорию Λ_n, снабженную *функтором пореберного подразбиения* $i_n \colon \Lambda_n \to \Lambda$ и проекцией $\pi_n \colon \Lambda_n \to \Lambda$. Проекция π_n является бирасслоением в группоидах со слоем $\mathsf{pt}_n = \mathsf{pt}/C_n$ — связным группоидом с единственным объектом и группой автоморфизмов C_n. На уровне классифицирующих пространств $|i_n| \colon |\Lambda_n| \to |\Lambda|$ — гомотопическая эквивалентность, а расслоение $|\pi_n| \colon |\Lambda_n| \cong |\Lambda| \to |\Lambda|$ получается однократным распетливанием короткой точной последовательности

$$1 \to C_n \to S^1 \to S^1 \to 1 \tag{5.2}$$

абелевых компактных групп Ли. Вложение $j \colon \Delta^o \to \Lambda$ включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Delta^o \arrow[d, "j"] & \Delta^o \times \mathsf{pt}_n \arrow[l, "\overline{\pi}_n"'] \arrow[r] \arrow[d, "j_n"] & \Delta^o \arrow[d, "j"] \\
\Lambda & \Lambda_n \arrow[l, "\pi_n"'] \arrow[r, "i_n"] & \Lambda
\end{tikzcd}$$

где левый квадрат декартов, а $\overline{\pi}_n \colon \Delta^o \times \mathsf{pt}_n \to \Delta^o$ — проекция на первый фактор. Классическая лемма о пореберном подразбиении из [11] показывает, что для любого $E \in \mathcal{D}(R)^\Lambda$ естественное отображение

$$\mathsf{hocolim}_{\Delta^o} j_n^* i_n^* E \to \mathsf{hocolim}_{\Delta^o} j^E = HH(E) \tag{5.3}$$

— изоморфизм, но при этом его область определения естественным образом лежит в $\mathcal{D}(R)^{\mathsf{pt}_n} \cong$ $\cong \mathcal{D}(R[C_n])$.

Эта конструкция особенно полезна в случае, когда $n = p$ — нечетное простое, а R — кольцо, в котором p равно нулю. А именно, для любого R и $M \in \mathcal{D}(R[S^1])$ точная последовательность (5.2) дает отождествление

$$(M^{hC_p})^{hS^1} \cong M^{hS^1}. \tag{5.4}$$

Если R — кольцо, в котором p равно нулю, то на левой части имеются два эндоморфизма периодичности степени 2: u приходит из C_p, а u' приходит из $S^1 = S^1/C_p$. Спектральная последовательность Серра–Хохшильда для (5.2) показывает, что первый эндоморфизм u согласован с изоморфизмом периодичности u на правой стороне, так что (5.4) вместе с (4.9) и (4.10) дает отображение

$$M^{tS^1} \to (M^{tC_p})^{hS^1}. \tag{5.5}$$

Более того, все та же спектральная последовательность Серра–Хохшильда показывает, что u' на самом деле обращается в нуль, так что $(M^{tC_p})^{tS^1} = 0$ и мы имеем $(M^{tC_p})^{hS^1} \cong (M^{tC_p})_{hS^1}[1]$ по (4.8). Поскольку гомотопические факторы коммутируют с гомотопическими копределами, мы заключаем, что (5.5) — изоморфизм. Это позволяет сводить вопросы о M^{tS^1} к вопросам о M^{tC_p}.

5.2. Теорема о вырождении. Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему о вырождении Ходжа–де Рама. Сначала предположим, что у нас есть кольцо k, в котором нечетное простое p равно нулю, а также алгебра $A \in \mathcal{D}Alg(k)$. Рассмотрим оснащенный функтор $(A/k)_\sharp \colon \Lambda \to \mathcal{D}(k)$ и его пореберное подразбиение $j_n^* i_n^* (A/k)_\sharp$, данное в (5.3). Тогда у нас есть естественное отображение

$$\mathsf{hocolim}_{\Delta^o}(j_n^* i_n^*(A/k)_\sharp)^{tC_p} \to \big(\mathsf{hocolim}_{\Delta^o}(j_n^* i_n^*(A/k)_\sharp)\big)^{tC_p} \tag{5.6}$$

в $\mathcal{D}(k[S^1])$, область значений которого отождествляется с $HH(A/k)^{tC_p}$ в силу (5.3).

Лемма 5.1. *Предположим, что алгебра A гладкая. Тогда отображение* (5.6) *является изоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку A гладкая, диагональный бимодуль A компактный, а значит, является ретрактом какого-то члена глупой фильтрации своей бар-резольвенты. Поэтому для некоторого $n \geq 1$ гомотопические копределы $\mathsf{hocolim}_{\Delta^o}$ в (5.6) являются ретрактами гомотопических копределов $\mathsf{hocolim}_{\Delta^o_{\leq n}}$ по полной подкатегории $\Delta^o_{\leq n} \subset \Delta^o$, порожденной вполне упорядоченными множествами из не более чем n элементов. Но категория $\Delta^o_{\leq n}$ конечна, а тейтовские неподвижные точки $(-)^{tC_p}$, будучи стабильным функтором, коммутируют с конечными гомотопическими копределами. $\square$

Замечание 5.2. Если A не является гладкой, (5.6) не является изоморфизмом, но его область определения по-прежнему имеет инвариантный смысл, а именно $\mathsf{hocolim}_\Lambda(i_n^*(A/k)_\sharp)^{tC_p}$ суть так называемые *копериодические циклические гомологии* $\overline{HP}(A/k)$ — новый локализующий инвариант DG-алгебр, введенный и изученный в работе [6]. В работе Мэтью [9] аналога леммы 5.1 нет, а копериодические циклические гомологии в явном виде не появляются. По-видимому, причина этого в том, что он использует топологические гомологии Хохшильда $THH(A)$, и можно показать, что для DG-алгебры A над конечным полем k гомологии $THH(A)$ превращаются в $\overline{HP}(A/k)$ после обращения образующей периодичности Бокстеда. Мы вернемся к этому в других работах.

Далее, пусть $k = \mathbb{F}_q$, $q = p^n$, — конечное поле характеристики p и положим $R = \mathbb{S}_q$, как в следствии 4.2.

Лемма 5.3. *Пусть дана гладкая и собственная алгебра $A \in \mathcal{D}(R)$ и $A_k = A \otimes_R k$. Тогда существует изоморфизм*

$$HP(A/k) \cong HH(A/k) \otimes_k k[u, u^{-1}]. \tag{5.7}$$

Доказательство. Рассмотрим оснащенный функтор $(A/R)_\sharp \colon \Lambda \to \mathcal{D}(R)$, его пореберное подразбиение $i_p^*(A/R)_\sharp$ и его ограничение $j_p^* i_p^*(A/R)_\sharp$ на $\Delta^o \times \mathsf{pt}_p \subset \Lambda_p$. Имеем естественное отождествление $j_p^* i_p^*(A/R)_\sharp \cong (\overline{\pi}_p^* j^*(A/R)_\sharp)^{\otimes_R p}$, в силу которого отображение диагонали Тейта (4.11) индуцирует отображение $j^*(A/R)_\sharp \to (j_p^* i_p^*(A/R)_\sharp)^{tC_p}$. Более того, в [10, Sect. III.2] показано, что это отображение продолжается до отображения

$$(A/R)_\sharp \to \pi_{p*}^t i_p^*(A/R)_\sharp, \tag{5.8}$$

где $\pi_{n*}^t \colon \mathcal{D}(R)^{\Lambda_p} \to \mathcal{D}(R)^\Lambda$ — относительная версия тейтовских неподвижных точек для бирасслоения $\pi_p \colon \Lambda_p \to \Lambda$. Тогда, как в следствии 4.2, морфизм (5.8) индуцирует отображение

$$(A_k/k)_\sharp \otimes_k \pi_{p*}^t \to \pi_{p*} i_p^*(A_k/k)_\sharp \tag{5.9}$$

и, поскольку A_k собственная, это отображение является изоморфизмом. Но A_k также гладкая и по лемме 5.1 изоморфизмы (5.5) и (5.6) дают изоморфизм (5.7). $\square$

Замечание 5.4. Для того чтобы получить следствие 4.2 и лемму 5.3, вся сила леммы 4.1 не нужна. На самом деле для любого комплекса k-векторных пространств $M_\bullet$ можно снабдить $(M_\bullet^{\otimes_k p})^{tC_p}$ такой естественной C_p-эквивариантной $\mathbb{Z}$-индексированной возрастающей фильтрацией $\beta_\bullet$, что ее присоединенные градуированные факторы gr_n^β изоморфны сдвигам $M_\bullet[n]$, а фактор-отображение $\beta_0(M_\bullet^{\otimes_k p})^{tC_p} \to M_\bullet$ допускает каноническое $\mathbb{S}$-линейное расщепление. Если $M_\bullet$ имеет вид $M_\bullet = M \otimes_{\mathbb{S}} k$ для спектра M, расщепление может быть выбрано k-линейным и это дает изоморфизмы (4.13) и (5.9). Этот подход использован явно в [4] и неявно в [5] (где спектр M сам по себе вообще не упоминается, а используются только препятствия к его существованию). Конструкция с использованием леммы 4.1, очевидно, более прямая и концептуально ясная, но за это мы платим тем, что нам приходится использовать гипотезу Сигала как черный ящик. Было бы интересно проверить, не может ли техника работ [6, 5] пролить свет на содержимое этого черного ящика.

Теорема 5.5. *Пусть дана гладкая и собственная алгебра $A \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(K)$ над полем K характеристики* 0. *Тогда спектральная последовательность Ходжа–де Рама для $HP(A/K)$ вырождается.*

Доказательство. По предложению 2.3 и теореме 3.2 можно выбрать формально гладкую E_∞-алгебру $R \in \mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S})$, снабженную морфизмом $a\colon R \to K$, и гладкую и собственную алгебру $A_R \in \mathcal{D}\mathcal{A}lg(R)$ такую, что $A_R \otimes_R K \cong A$. Локализуя R, если необходимо, мы можем предположить, что она лежит в $\mathcal{D}\mathcal{C}omm(\mathbb{S}(2^{-1}))$. Отображение a тогда пропускается через конечно порожденное кольцо $R_0 = \pi_0(R)$, и если мы положим $A_{R_0} = A_R \otimes_R R_0$, то достаточно доказать, что спектральная последовательность Ходжа–де Рама для $HP(A_{R_0}/R_0)$ вырождается. Поскольку A_R гладкая и собственная, A_{R_0} также является гладкой и собственной, так что группы гомологий Хохшильда $HH_\bullet(A_{R_0}/R_0)$ являются конечно порожденными R_0-модулями. Тогда по лемме Накаямы, чтобы доказать, что все дифференциалы в спектральной последовательности обращаются в нуль, достаточно показать, что для любого поля вычетов k кольца R_0 и $A_k = A_{R_0} \otimes_{R_0} k$ спектральная последовательность Ходжа–де Рама для $HP(A_k/k)$ вырождается. Но поскольку это спектральная последовательность конечномерных k-векторных пространств, а k — конечное поле нечетной характеристики, по леммам 5.1 и 2.4 ее первый и последний листы имеют одну и ту же размерность. □

Благодарности. Мы благодарны А. Ефимову, Т. Николаусу, А. Приходько, А. Фонареву и Л. Хессельхольту за полезные обсуждения. Мы также благодарны Научно-исследовательскому институту математических наук (MSRI, Беркли, США), где была выполнена часть этой работы. Мы выражаем особую благодарность А. Мэтью, который щедро делился с нами своими идеями и опытом и, в частности, помог с доказательством предложения 2.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Connes A.* Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n // C. r. Acad. sci. Paris. Sér. 1. 1983. V. 296. P. 953–958.
2. *Deligne P., Illusie L.* Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham // Invent. math. 1987. V. 89. P. 247–270.
3. *Drinfeld V.* On the notion of geometric realization // Moscow Math. J. 2004. V. 4, N 3. P. 619–626.
4. *Kaledin D.* Non-commutative Hodge-to-de Rham degeneration via the method of Deligne–Illusie // Pure Appl. Math. Q. 2008. V. 4, N 3. P. 785–875.
5. *Kaledin D.* Spectral sequences for cyclic homology // Algebra, geometry, and physics in the 21st century: Kontsevich Festschrift. Basel: Birkhäuser, 2017. P. 99–129. (Prog. Math.; V. 324).
6. *Kaledin D.* Co-periodic cyclic homology // Adv. Math. 2018. V. 334. P. 81–150.
7. *Kontsevich M., Soibelman Y.* Notes on A_∞-algebras, A_∞-categories and non-commutative geometry. I: E-print, 2006. arXiv: math/0606241 [math.RA].
8. *Lurie J.* Higher algebra: Preprint. Princeton, NJ: Inst. Adv. Stud., 2017. https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf
9. *Mathew A.* Kaledin's degeneration theorem and topological Hochschild homology: E-print, 2017. arXiv: 1710.09045 [math.KT].
10. *Nikolaus T., Scholze P.* On topological cyclic homology: E-print, 2017. arXiv: 1707.01799 [math.AT].
11. *Segal G.* Configuration-spaces and iterated loop-spaces // Invent. math. 1973. V. 21. P. 213–221.
12. *Toën B.* Anneaux de définition des dg-algèbres propres et lisses: E-print, 2006. arXiv: math/0611546 [math.AT].