



CONTROL SCIENCES

**Научно-технический
журнал**

6 номеров в год

ISSN 1819-3161

Издается с 2003 года

УЧРЕДИТЕЛЬ

**Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

Главный редактор

чл.-корр. РАН

Д.А. Новиков

**Заместители главного
редактора**

Л.П. Боровских, Ф.Ф. Пашенко

Редактор

Т.А. Гладкова

Выпускающий редактор

Л.В. Петракова

Издатель

ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.
Тел./факс (495) 334-92-00
E-mail: pu@ipu.ru
Интернет: <http://pu.mtas.ru>

Оригинал-макет
и электронная версия
подготовлены
ИП Прохоров О. В.

Отпечатано в ИПУ РАН
Заказ № 128

Подписано в печать
22.07.2014 г.

Журнал зарегистрирован
в Министерстве Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.

Журнал входит в Перечень ведущих
рецензируемых журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы
основные научные результаты
диссертаций на соискание ученой
степени доктора и кандидата наук

Подписные индексы:

80508 и **81708** в каталоге Роспечати;

38006 в объединенном каталоге
«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

5.2014

СОДЕРЖАНИЕ

Математические проблемы управления

Юсубов Ш.Ш. Об оптимальности особых по компонентам управлений
в системах Гурса — Дарбу 2

Анализ и синтез систем управления

Александров А.Г., Шатов Д.В. Частотное адаптивное управление
по заданной точности. 7

Афанасьев В.Н., Семион А.А. Регулятор с дискретно изменяемыми
параметрами. 14

Кочетков С.А., Уткин В.А. Вихревые алгоритмы в задаче управления
двигателем постоянного тока 20

Управление в социально-экономических системах

Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д. Микро- и макромодел
социальных сетей. Ч. 1. Основы теории 28

Егорова Л.Г. Эффективность торговых стратегий мелких трейдеров 34

Корноушенко Е.К. Многомодельный подход к массовой оценке много-
параметрических объектов 42

Гребенюк Е.А., Малинкина А.В. Применение методов эконометри-
ческого анализа данных для идентификации и датирования «пузырей»
на финансовых рынках. 50

Управление техническими системами и технологическими процессами

Гребенюк Г.Г., Никишов С.М. Определение критических повреждений,
нарушающих энергоснабжение заданного множества объектов распре-
делительной электрической сети 59

Информационные технологии в управлении

Аксенова Г.П. Матричный способ анализа тестовой реакции в програм-
мируемых логических интегральных схемах 65

Управление подвижными объектами и навигация

Сомова Т.Е. Применение имитации и анимации для полетной поддержки
систем управления информационных спутников 70

Хроника

Новое в автоматическом управлении производством 79

* * *

Contents & abstracts 84

РЕГУЛЯТОР С ДИСКРЕТНО ИЗМЕНЯЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹

В.Н. Афанасьев, А.А. Семион

Для класса динамических нелинейных объектов, подвергающихся неконтролируемым ограниченными возмущениям, предполагается возможность эквивалентного представления таких объектов в виде моделей с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния. Проблема управления формулируется в ключе дифференциальных игр, причем игра рассматривается с одним игроком, вторым же игроком является возмущение, действующее на объект. Линейность структуры преобразованной нелинейной системы и квадратичный функционал качества позволяют при синтезе оптимального управления перейти от необходимости поиска решений уравнения Гамильтона — Якоби — Айзекса к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Основной проблемой реализации полученных при синтезе управлений является невозможность (в общем случае) решения алгебраического уравнения типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния, в темпе функционирования объекта.

Ключевые слова: нелинейная непрерывная динамическая система, дифференциальные игры, уравнение Гамильтона — Якоби — Айзекса, уравнение Риккати.

ВВЕДЕНИЕ

Сложность многих современных систем управления зачастую не позволяет получить заранее полное описание процессов, протекающих в системе, и ее взаимодействия со средой. Достаточно часто математическая модель системы управления учитывает лишь допустимые области изменения параметров управляемой системы и характеристик ее отдельных элементов без конкретизации самих этих параметров и характеристик. Указанные области могут определяться, например, интервальными ограничениями, соответствующими заданным техническим допускам на систему. В этих условиях получить аналитическое решение оптимальной задачи управления не представляется возможным.

Проблема управления при решении таких задач для получения гарантирующего результата может быть сформулирована в терминах дифференциальных игр, причем игра рассматривается с одним игроком, вторым же игроком служит возмущение, действующее на объект.

Начало развития теории дифференциальных игр относят к 1965 г., когда была опубликована работа Р. Айзекса (на русском языке — в 1967 г.) [1].

В работах Н.Н. Красовского и его учеников метод дифференциальных игр разрабатывался не только для задач преследования и наведения, но и для задач минимаксного управления [2, 3] — управления с гарантирующим результатом. В подобных работах игра рассматривается с одним игроком, вторым же игроком является возмущение, действующее на объект. Основная проблема, возникающая при реализации теоретических положений дифференциальных игр, связана с трудностями поиска решений уравнения Гамильтона — Якоби — Айзекса — скалярного уравнения в частных производных. Поэтому в основных работах теории дифференциальных игр конфликтующие участники игры описываются линейными дифференциальными уравнениями и функционалы задаются квадратичными [4]. Популярными методами синтеза управляющих воздействий для нелинейных систем связаны с приемами линеаризации нелинейных уравнений с помощью рядов Тейлора, представления нелинейных уравнений в эквивалентной форме линейных уравнений, но с параметрами, зависящими от состояния, линеаризацией нелинейных систем обратной связью по состоянию или по выходу. В настоящей статье проблема управления формулируется для класса нелинейных объектов, представимых в виде объектов с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния (State Dependent Coefficients — SDC). Линейность

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2014/2015 гг.».



структуры преобразованной нелинейной системы и квадратичный функционал качества позволяют при синтезе оптимального управления перейти от необходимости поиска решений уравнения Гамильтона — Якоби — Айзекса к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния (State Dependent Riccati Equation — SDRE). Это и составляет основу SDRE-метода синтеза субоптимальных нелинейных систем управления [5, 6].

Несмотря на имеющиеся достаточно убедительные примеры применения SDRE-метода [7—11], остается множество проблем, связанных с ограничениями, налагаемыми на систему, неоднозначностью эквивалентных преобразований исходной системы, построением эффективных алгоритмов решений матричных уравнений Риккати с параметрами, зависящими от состояния, в темпе функционирования системы управления.

В данной статье задача управления нелинейным объектом, подвергающимся воздействию неконтролируемых возмущений, будет рассматриваться в более общем виде, а именно в терминах дифференциальной игры, что позволит обобщить ряд ранее опубликованных теоретических результатов и получить достаточно конструктивные решения в ряде постановок задач управления. Реализацию полученных при синтезе управлений предложено осуществлять решением уравнения Риккати с постоянными параметрами в счетном количестве точек траектории системы. Таким образом, параметры регулятора находятся для каждого промежутка времени между текущим значением состояния и следующим за ним.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть детерминированная нелинейная система описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(x) + D(x)w(t) + B(x)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \\ u(t) &\in U, \quad w(t) \in W, \quad t \in [t_0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(\cdot) \in C^1([t_0, T], R^n)$, $u(\cdot) \in C^1([t_0, T], R^r)$, $w(\cdot) \in C^1([t_0, T], R^k)$. Здесь $x(t)$ — состояние системы, $x(\cdot) \in \Omega_x$; $X_0 \in \Omega_x$ — множество возможных начальных условий системы; $y \in R^m$, m, n — выход системы; $u(t)$ — управление; $w(t)$ — возмущение; $f(x)$, $D(x)$ и $B(x)$ — непрерывные матрицы-функции. Предполагается, что для всех x система (1) управляема и наблюдаема [12, 13]. Кроме того, будем полагать, что функции $f(x)$, $D(x)$ и $B(x)$ достаточно гладкие такие, что из любых точек $(t_0, x_0) \in R_+ \times \Omega_x$

выходило бы одно и только одно решение уравнения (1) $x(t, t_0, x_0)$ и был бы единственным соответствующий выход системы $y(t) = Cx(t, x_0)$.

Предполагается, что неконтролируемое возмущение $w(t)$, которое может быть как детерминированным, так и стохастическим, характеризуется отношением:

$$|w(t)| \leq y(x(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

где $|w_i(t)| \leq \sigma_i(x(t))$, $i = \overline{1, k}$, $t \geq 0$, $\sigma_i(x(t)) \geq 0$ для всех $x(t) \in \Omega_x$ или в общем виде $w(t) \in W$.

Рассматривая возмущение $w(t)$ как действие некоторого игрока, противодействующего успешному выполнению задачи управления, сформулируем задачу управления в терминах дифференциальной игры двух игроков G_u и G_w . Управления $u(t) \in U$ и $w(t) \in W$ будут организовываться с помощью принципа обратной связи по состоянию.

Цель управления $u(t)$ при противодействии процесса $w(t)$ состоит в построении такого управляющего воздействия $\xi = (x(t), u(t), w(t))$, которое обеспечит выполнение заданного условия $|\Psi(x(T))| \leq d$, $d > 0$, $\Psi(x(T)) \in R^q$.

Введем функционал качества дифференциальной игры

$$\begin{aligned} J(x, u, w) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \{y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t) - \\ &\quad - w^T(t)Pw(t)\} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь матрица Q , по крайней мере, положительно полуопределенная, матрицы R и P — положительно определенные. Предполагается, что ограничения, наложенные на процессы $u(t)$ и $w(t)$, можно учесть соответствующим назначением матриц R и P . Относительно верхнего предела функционала (2) будем считать, что время T задано, но такое, что задача дифференциальной игры в период $[t_0, T]$ выполнена.

При таком назначении верхнего предела функционала (2) (интервала управления, в котором может быть завершена дифференциальная игра) задача построения управляющего процесса $\xi = (x(t), u(t), w(t))$ может рассматриваться как задача синтеза оптимального управления с бесконечным интервалом управления ($T \rightarrow \infty$) [12].

Допустимыми элементами $\xi = (x(t), u(t), w(t))$ в поставленной задаче будем считать функции класса $x(\cdot) \in C^1([t_0, T], R^n)$, $u(\cdot) \in C([t_0, T], R^r)$, $w(\cdot) \in C([t_0, T], R^k)$.

Определение. Будем называть управляющий процесс $\xi_r = (x_r(t), u_r(t), w_r(t))$, $t \in [t_0, T_r]$, $T_r \leq T$, гарантирующим выполнение задачи дифференци-

альной игры, заключающейся в достижении цели $|\Psi(x_r(T_r))| \leq d$, $d > 0$, если ξ_r доставляет локальный минимум функционалу (2) на решениях системы (1) при любых возмущениях $w(t)$, удовлетворяющих ограничению $|w(t)| \leq \sigma(x(t))$, $\forall t \geq 0$. ♦

Отметим что, $J(\xi_r) \geq J(\xi)$ для любых управляющих процессов $\xi = (x(t), u(t), w(t))$, $t \in [t, T_r]$, для которых $|\Psi(x_r(T_r))| - |\Psi(x(T_r))| \geq 0$.

В основе необходимого для дальнейших исследований преобразования математической модели объекта (1) лежит методология «расширенной линеаризации», называемой также как «параметризация системы коэффициентами, зависящими от состояния» (SDC-линеаризация) [10].

Предположение 1. Функции $f(x)$ и $\partial f(x)/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны по $x \in \Omega_x$ и $f(0) = 0$.

Предположение 2. Матрицы $D(x)$, $B(x)$ и $\partial D(x)/\partial x_i$, $\partial B(x)/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$, непрерывны по $x \in \Omega_x$ и $D(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$, $x \in \Omega_x$. ♦

При выполнении предположений 1 и 2 с помощью SDC-линеаризации исходную нелинейную систему (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A(x)x(t) + D(x)w(t) + B(x)u(t), \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t) = Cx(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $A(x)x(t) = f(x)$, $A(x)$, $D(x)$, $B(x)$: $x \in \Omega_x \rightarrow R^n$.

2. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СОСТОЯНИЯ

Предположение 3. Пусть $f(x)$, $D(x)$ и $B(x)$ достаточно гладкие функции такие, что функция $V(x)$, определенная как

$$V(x) \triangleq \inf_{u \in U} \sup_{w \in W} J(x, u, w), \quad (4)$$

дифференцируемая функция при любых допустимых стратегиях игроков G_w , $G_u \in L_2(0, \infty)$.

Предположение 4. Функция $V(x)$, определенная выражением (4), локально липшицева в Ω_x . ♦

Оптимальные стратегии с обратной связью в дифференциальной игре для игроков G_u и G_w в задаче, в которой время окончания переходного процесса большое по сравнению с динамикой системы, определяются выражениями [12]

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}B^T(x) \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T, \\ w(t) &= P^{-1}D^T(x) \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T, \end{aligned} \quad (5)$$

где вектор $\partial V(x)/\partial x$ определяется решением уравнения Гамильтона — Якоби — Айзекса

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} f(x) + \frac{1}{2} x^T C^T(t) Q C x(t) - \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \times \\ \times [B^T(x)R^{-1}B(x) - D^T(x)P^{-1}D(x)] \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T = 0 \end{aligned}$$

с граничным условием $V(0) = 0$ при управлениях (5), обеспечивающих устойчивость системе, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Исходная система с управлениями (5) определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(x) - [B^T(x)R^{-1}B(x) - \\ &- D^T(x)P^{-1}D(x)] \left\{ \frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} \right\}^T, \quad x(t_0) = x_0, \end{aligned} \quad (6)$$

Если определить $(\partial V(x)/\partial x(t))^T$ как $S(x)x(t)$, т. е. $(\partial V(x)/\partial x(t))^T = S(x)x(t)$, то, как показано в работе [10], субоптимальные законы управления $w(t)$ и $u(t)$ с обратной связью в рассматриваемой задаче определяются выражениями

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1}B(x)S(x)x(t), \\ w(t) &= P^{-1}D(x)S(x)x(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где положительно определенная матрица $S(x)$ является поточечным решением матричного уравнения типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния

$$\begin{aligned} S(x)A(x) + A^T(x)S(x) - S(x)[B^T(x)R^{-1}B(x) - \\ - D^T(x)P^{-1}D(x)]S(x) + C^TQC = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда уравнение системы (6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(x) - \Pi(x)S(x)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\Pi(x) = B^T(x)R^{-1}B(x) - D^T(x)P^{-1}D(x).$$

Отметим, что система (9) устойчива, если матрица $\Pi(x)$, по крайней мере, положительно полуопределена для $\forall x \in \Omega_x$. Это нетрудно показать, применяя вторую теорему Ляпунова. Введем функцию Ляпунова $V_1(x)$ такую, что

$$\begin{aligned} \omega_1\{|x|\} \leq V_1(x) \leq \omega_2\{|x|\}, \quad dV_1(x)/dt \leq -\omega_3\{|x|\}, \\ \forall x \in \Omega_x, \end{aligned}$$



где $\omega_i\{|x|\}$, $i = 1, 2, 3$, $\omega_i(0) = 0$, $\omega_i\{|x|\} > 0$, скалярные неубывающие функции. Как следует из второй теоремы Ляпунова, что если выполняется условие

$$\frac{dV_1(x)}{dt} = \frac{\partial V_1(x)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} \leq -\omega_3\{|x|\}, \quad (10)$$

то система устойчива. Принимая во внимание выражение (9), перепишем условие (10):

$$\frac{\partial V_1(x)}{\partial x} \{f(x) - \Pi(x)S(x)x(t)\} \leq -\omega_3\{|x|\}. \quad (11)$$

Назначим функцию $V_1(x)$ в виде $V_1(x) = x^T(t)S(x)x(t)$ и $\omega_3\{|x|\}$ в виде $\omega_3\{|x|\} = x^T(t)C^TQCx(t)$.

После ряда трансформаций неравенство (11) будем иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_1(x) &= -x^T S(x) [B^T(x)R^{-1}B(x) - D^T(x)P^{-1}D(x)] \times \\ &\times S(x)x(t) = -x^T S(x) \Pi(x) S(x)x(t) \leq 0, \quad \forall x, \end{aligned}$$

что означает, что матрица $\Pi(x) = [g_2(x)R^{-1}g_2^T(x) - g_1(x)P^{-1}g_1^T(x)]$ должна быть для всех $x \in \Omega_x$, по крайней мере, положительно полуопределенной.

Таким образом, обеспечение положительной определенности матрицы $\Pi(x)$ благодаря соответствующему назначению в функционале качества (2) матриц штрафа P и R является ключевым для выполнения задачи управления в постановке дифференциальной игры, что гарантирует [2] успешное выполнение исходной задачи управления неопределенным нелинейным объектом.

Рассмотрим вопрос об использовании доступной информации о неконтролируемом возмущении. Эту информацию уместно использовать при назначении в функционале качества (2) матрицы штрафа P . Если имеется такое σ_i^* , что $\sigma_i^* \geq \sigma_i(x(t))$, $i = \overline{1, k}$, то диагональные элементы матрицы P для наименее благоприятного случая можно назначить в виде $p_{ii} = 1/\sigma_i^*$, т. е. $P = P(\sigma^*) = P^*$. Тогда, с учетом последнего, матрица R должна назначаться так, чтобы выполнялось условие положительной полуопределенности матрицы $\Pi(x)$, $\forall x \neq 0$.

Начальные условия системы $x(0)$ следует принять во внимание при назначении матрицы Q , т. е., с учетом того, что эта матрица должна быть, по крайней мере, положительно полуопределенной, то $Q = Q(x(0))$.

3. РЕГУЛЯТОР С ДИСКРЕТНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

3.1. Стратегии дифференциальной игры

Как видно, реализация субоптимальных управлений вида (7) в задачах дифференциальных игр в нелинейной постановке задачи требует решения уравнения (8) в темпе функционирования объекта. Для задач достаточно большой размерности решение этого уравнения, матрицы которого являются функциями состояния объекта, представляется сложной проблемой.

Сделаем предположение о построении регулятора с дискретно изменяющимися параметрами. Разобьем интервал $[t_0, T]$ на N отрезков. Начало каждого отрезка имеет номер i_0, i_1, \dots, i_{N-1} , которому соответствует состояние системы x_0, x_1, \dots, x_{N-1} . Значения состояния системы x_i , соответствующие началу каждого из отрезков, определяют значения параметров матриц $A(x_i), D(x_i), B(x_i)$. Эти матрицы используются для вычисления положительно определенной матрицы $S(x_i)$:

$$\begin{aligned} S(x_i)A(x_i) + A^T(x_i)S(x_i) - S(x_i)[B^T(x_i)R^{-1}B(x_i) - \\ - D^T(x_i)P^{-1}D(x_i)]S(x_i) + C^TQC = 0. \quad (12) \end{aligned}$$

Таким образом, матрица $S(x_i)$ вычисляется в интервале $[t_0, T]$ в счетном количестве значений траектории x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Вычисленное значение матрицы в i -й момент используется в регуляторе на всем интервале $\gamma_i - \gamma_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Управления на каждом интервале $\gamma_{j-1} - \gamma_j$, $j = 1, \dots, N$, определяются выражениями

$$\begin{aligned} w_i(t) &= P^{-1}D^T(x)S(x_i)x(t), \\ u_i(t) &= -R^{-1}B^T(x)S(x_i)x(t). \quad (13) \end{aligned}$$

Траектория движения объекта с управлениями (16) определяется решением уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= f(x) - [B(x)R^{-1}B^T(x) - D(x)P^{-1}D^T(x)] \times \\ &\times S(x_i)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Отметим, что интервал $[t_0, T]$ зависит от возможностей устройства, реализующего вычисление матрицы $S(x_i)$ по формуле (12).

Очевидно, что при $\tau = t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, т. е. при уменьшении интервалов разбиения, $\lim_{\tau \rightarrow 0} S(x(t_i)) \rightarrow S(x(t_{i+1}))$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

3.2. Задача управления с разомкнутым контуром по возмущениям

Рассмотрим влияние возмущений на результат управления объектом, используя его модель (3). Пусть в качестве возмущений, действующих на входе объекта, будет белый шум $w(t)$ с характеристиками

$$M[w(t)] = 0, \quad M[w(t)w^T(\tau)] = W\delta(t - \tau), \\ M[x(t_0)w^T(t)] = 0$$

и пусть решение уравнения, описывающее исходную систему с изменяющимися от интервала к интервалу значениями параметров регулятора, описывается выражением

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = f(\hat{x}) - B(\hat{x})R^{-1}B^T(\hat{x})S(\hat{x}_i)\hat{x}(t) + \\ + D(\hat{x})w(t), \quad \hat{x}(t_0) = x_0, \\ y(t) = C\hat{x}(t), \quad i = 0, \dots, N - 1,$$

где матрица $S(\hat{x}_i)$ вычисляется в каждый момент i в соответствии с уравнением

$$S(\hat{x}_i)A(\hat{x}_i) + A^T(\hat{x}_i)S(\hat{x}_i) - \\ - S(\hat{x}_i)V(\hat{x}_i)R^{-1}B^T(\hat{x}_i)S(\hat{x}_i) + C^TQC = 0$$

и сохраняет свое значение в регуляторе $u(t) = -R^{-1}B^T(\hat{x})S(\hat{x}_i)\hat{x}(t)$ до следующего момента $i + 1$.

Уравнение для ковариационной матрицы $\hat{X}(t) = M[\hat{x}(t_0)\hat{x}^T(t_0)]$ состояния объекта будет описываться соотношением [3]:

$$\frac{d}{dt} \hat{X}(t) = \left\{ A(\hat{x}) - B(\hat{x})R^{-1}B^T(\hat{x}) \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} S_i \right] \right\} + \\ + \hat{X}(t) \left\{ A(\hat{x}) - B(\hat{x})R^{-1}B^T(\hat{x}) \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} S_i \right] \right\}^T + \\ + D(\hat{x})WD^T(\hat{x}), \\ \hat{X}(t_0) = M[x(t_0)x^T(t_0)].$$

Отметим, что при $\tau = t_{i+1} - t_i \rightarrow 0, i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ значения параметров матрицы $\hat{X}(t)$ будут стремиться к значениям матрицы $X(t)$, т. е. $\hat{X}(t) \rightarrow X(t)$, которая определяется решением уравнения

$$\dot{X}(t) = \{A(x) - B(x)R^{-1}B^T(x)S(x)\}X(t) + \\ + X(t)\{A(x) - B(x)R^{-1}B^T(x)S(x)\}^T + D(x)WD^T(x), \\ X(t_0) = M[x(t_0)x^T(t_0)].$$

4. ПРИМЕР

Рассмотрим пример из работы [14] (координатное управление спутником), усложнив его введением параметрических возмущений. Исследуемый нелинейный объект описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1(t)}{3}x_2(t)x_3(t) \\ -a_2(t)x_1(t)x_3(t) \\ a_3(t)x_1(t)x_2(t) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} b_1(t)u_1(t) \\ b_2(t)u_2(t) \\ b_3(t)u_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{pmatrix} w(t),$$

$$x_1(0) = 40, \quad x_2(0) = 30, \quad x_3(0) = 20.$$

Номинальные значения параметров объекта: $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 1, b_1 = 25, b_2 = 5, b_3 = 20, d_1(t) = d_2(t) = d_3(t) = 1$.

Возмущение: $w(t) = 15\omega(t)$, где $\omega(t)$ — белый шум. Функционал

$$J(x, u, \omega) = \frac{1}{2} \int_0^T \{ \|x(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2 - \|w(t)\|_P^2 \} dt,$$

$$Q = \text{diag}[|x_1(0)|, |x_2(0)|, |x_3(0)|], \quad R = 1, \quad P = 1.$$

SDC-представление исходной системы:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_2(t) \\ -x_3(t) & 0 & 0 \\ 0 & x_1(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 25u_1(t) \\ 5u_2(t) \\ 20u_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} w(t).$$

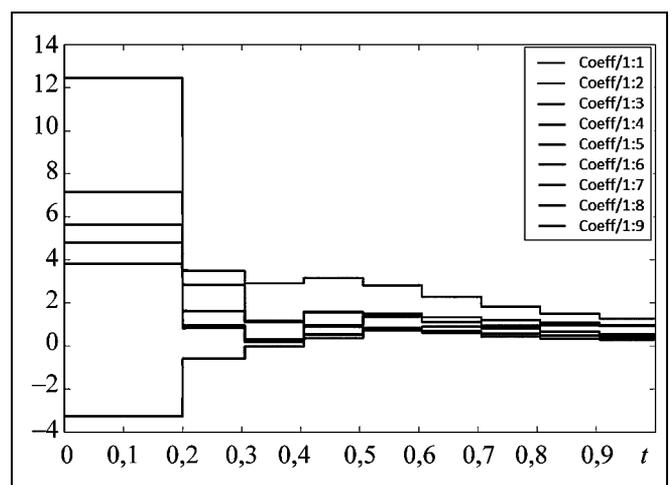


Рис. 1. График изменения коэффициентов регулятора

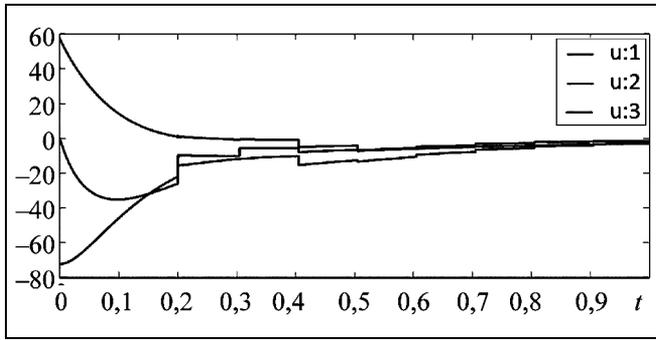


Рис. 2. График изменения управления

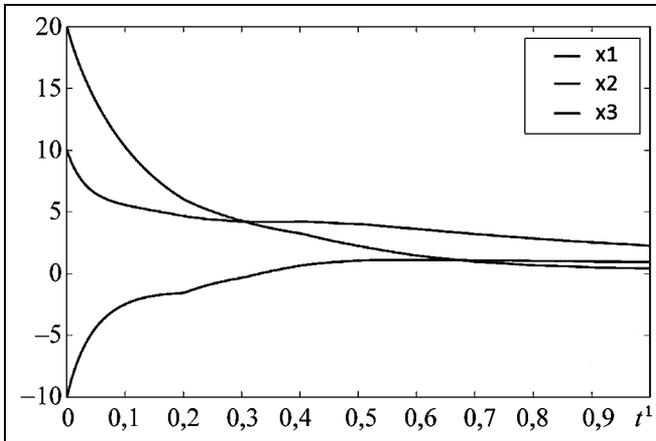


Рис. 3. График изменения состояний системы

Без учета нахождения значения матрицы $S(x_0)$ регулятор описывается уравнением

$$u(t_{i+1}, t_{i+2}) = -R^{-1}g_2(x)S(x_i)x(t),$$

где матрица $S(\hat{x}_i)$ отыскивается на отдельных интервалах переходного процесса решением уравнения

$$S(x_i)A(x_i) + A^T(x_i)S(x_i) - S(x_i)[g_2^T(x_i)R^{-1}g_2(x_i) - g_1^T(x_i)P^{-1}g_1(x_i)]S(x_i) + C^TQC = 0,$$

в котором

$$A(x_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_2(t_i) \\ -x_3(t_i) & 0 & 0 \\ 0 & x_1(t_i) & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Графики переходных процессов в системе представлены на рис. 1–3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод реализации алгоритма управления нелинейным неопределенным динами-

ческим объектом с помощью решения уравнения Риккати с квазипостоянными значениями параметров на отдельных этапах переходного процесса. С увеличением вычислительной мощности процессоров интервалы, для которых вычисляются параметры регулятора, могут уменьшаться, приближая решение задачи управления нелинейным объектом к оптимальному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
2. Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. Задачи управления с гарантированным результатом. — Свердловск, 1986. — 64 с.
3. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. — М.: Наука, 1991. — 216 с.
4. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. — 1971. — Т. 7, № 3. — С. 436–445.
5. Афанасьев В.Н. Концепция гарантированного управления в задачах управления неопределенным объектом // Изв. РАН: Теория и системы управления. — 2010. — № 1. — С. 16–23.
6. Afanasiev V.N. Guaranteed control of feedback linearizable nonlinear object // American Institute of Physics. Conference Proc. of 9-th Intern. Conf. on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Science. — 2012. — Vol. 1493/1. — P. 13–19.
7. Mrasek C.P. SDRE autopilot for dual controlled missiles // Proc. 17th IFAC Sympos. on Automatic Control in Aerospace. Toulouse, France, 2007.
8. Friedland B. Quasi Optimal Control and the SDRE method // Ibid.
9. Salnci M.U., Gokbilen B. SDRE missile autopilot design using sliding mode control with sliding surfaces // Ibid.
10. Çimen Tayfun. On the Existence of Solutions Characterized by Riccati Equations to Infinite-Time Horizon Nonlinear Optimal Control Problems // Proc. 18th World Conf. IFAC, Milano (Italy) 28.08. — 2.09. 2011. — P. 9620–9626.
11. Ruderman M., Weigel D., Hoffmann F., Bertram T. Extended SDRE control of 1-DOF robotic manipulator with nonlinearities // Ibid. — P. 10940–10945.
12. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высшая школа, 2003. — 615 с.
13. Афанасьев В.Н. Управление нелинейными объектами с параметрами, зависящими от состояния // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 4. — С. 43–56.
14. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 487 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Афанасьев Валерий Николаевич — д-р техн. наук, зав. кафедрой, ✉ afanval@mail.ru,

Семион Александр Александрович — студент 5-го курса, ✉ spin7ion@gmail.com,

Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета — Высшей школы экономики.