ФПТиАД 2022 В 1

№1

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x-2)^2} = ? \quad , \quad \frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow x = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

$$x = A(x^2-4x+4) + B(x^2-x-2) + C(x+1)$$

$$x = (A+B)x^2 + x(C-4A-B) + 4A-2B+C$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-4A-B=1 \\ 4A-2B+C=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ C+3B=1 \\ C-6B=0 \end{cases} \quad 9B=1 \Rightarrow \boxed{B=1/9,\ A=-1/9 \\ C=2/3} \quad C=6B$$

$$\int = -\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x-2)^2} =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{9}\log|x+1| + \frac{1}{9}\log|x-2| - \frac{2}{3}\frac{1}{x-2} + C}$$

№2

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(4+(-1)^n)^n}{n} x^n \quad , \quad R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}} = 1/5$$

$$x = 1/5 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left(\frac{4+(-1)^n}{5}\right)^n \frac{1}{n} \geq \sum_{n=2j} \frac{1}{2j} \Rightarrow \text{расх-ся}$$

$$x = -1/5 \Rightarrow \sum \left(\frac{4+(-1)^n}{5}\right)^n \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=2j} \frac{1}{2j} - \sum_{n=2j+1} \frac{(3/5)^n}{n}$$

$\Rightarrow$ расх-ся

Ответ. $\boxed{-1/5 < x < 1/5}$

$\boxed{N3}$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & -3 & 18 & 7 & 9 & -12 \\ -20 & -4 & 26 & 10 & 16 & -22 \\ -14 & -3 & 19 & 8 & 12 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad p_A(x) - ?$$

если считать опред 6×6, то можно и уснуть!

Заметим, что A - блочная матрица $\Rightarrow$

$$p_A(x) = p_{A_1}(x)\, p_{A_2}(x), \quad A_1 = \begin{pmatrix} -13 & -3 & 18 \\ -20 & -4 & 26 \\ -14 & -3 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & -6 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$p_{A_1}(x) = \begin{vmatrix} -13-x & -3 & 18 \\ -20 & -4-x & 26 \\ -14 & -3 & 19-x \end{vmatrix} = (13+x)(4+x)(19-x)$$

$$+60\cdot 18 + 42\cdot 26 + 14\cdot 18(-4-x) + 78(-13-x) - 60(19-x) =$$

$$= (52 + 17x + x^2)(19-x) + 60\cdot 18 + 42\cdot 26 - 56\cdot 18 - 14\cdot 18x$$

$$-39\cdot 26 - 78x - 60(19-x) = (x^2+17x-8)(19-x) + 4\cdot 18 + 3\cdot 26$$

$$-14\cdot 18x - 78x = -x^3 + 19x^2 + 17\cdot 19x - 17x^2 - 8\cdot 19 + 8x$$

$$+72 + 78 - 14\cdot 18x - 78x = -x^3 - 2x^2 + x(17\cdot \overset{18+1}{19} + 8 - 14\cdot 18 - 78)$$

$$-2 = -x^3 + 2x^2 + x(\overbrace{\underbrace{17+8}_{25} + \underbrace{3\cdot 18}_{54}}^{79} - 78) - 2 = \boxed{-x^3 + 2x^2 + x - 2}$$

Соб. значение $x^3 \mp 2x^2 - x + 2 = 0$ $\qquad x^2(x-2) - (x-2) = 0$

$(x^2-1)(x-2) = 0$

$$\boxed{p_{A_1}(x) = (x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$p_{A_3}(x) = \begin{vmatrix} 4-x & 0 & -2 \\ 6 & 2-x & -6 \\ 4 & 0 & -2-x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 4-x & -2 \\ 4 & -2-x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)\left[(4-x)(-2-x)+8\right] = (2-x)\left[-8-4x+2x+x^2+8\right]$$

$$= (2-x)(x^2-2x) = -x(x-2)^2$$

итог $p_A(x) = x(x-2)^3(x-1)(x+1) =$

$$= x^6 - 6x^5 + 11x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2}$$

№4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 + 6x_5 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 8 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 7 & -2 & 7 \end{array}\right) -2 \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} +2 \\ -3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) -2 \to \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = -x_3 - 24x_5 + 21 \\ x_2 = 2x_3 + 8x_5 - 7 \\ x_4 = -2x_5 + 3 \end{cases} \quad x_3, x_5 \in \mathbb{R}} \Rightarrow \text{ответ}$$

№5

пусть число N в 9-ичной сист. счисления $27{,}006{,}000{,}052_9$. Найдите остаток от деления N на 5.

$$N = 2\cdot 9^0 + 5\cdot 9^1 + 6\cdot 9^6 + 7\cdot 9^9 + 2\cdot 9^{10} \equiv 2 + 5(-1) + 6(-1)^6 + 7\cdot(-1)^9 + 2(-1)^{10} \pmod 5 \equiv 2 - 5 + 6 - 7 + 2 \equiv \boxed{3 \pmod 5}$$

№6

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right) \qquad 0 \le x \le \pi$$

т.к. $0 \le x \le \pi$ то $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}\cos x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \frac{\pi}{2}\sin x \le \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)\right) = \frac{\pi}{2}\cos x$$

$$\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin x$$

$\Rightarrow$ получаем $\cos x = 1 - \sin x \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 1$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ т.е. $\boxed{x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\text{т.е. 2 ответа}}$

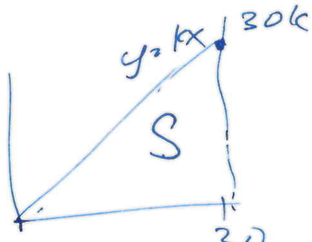
Зам: общее решение $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

№7

$$\#\{(x,y) \mid 1 \le y \le kx,\ 1 \le x \le 30\} = 300$$

$$\sum_{x=1}^{30} [kx] = 300$$

$k_1 = 2/3$



$S = 450k$. понятно что $S \approx$ кол-во целых точек $\Rightarrow$ $450k = 300$

$k = 2/3$

проверим

$$\sum_{x=1}^{30}\left[\frac{2x}{3}\right] = \sum_{\substack{x \equiv 0(3)\\ x = 3n}} + \sum_{\substack{x \equiv 1(3)\\ x = 3n+1}} + \sum_{\substack{x \equiv 2(3)\\ x = 3n+2}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{10}[2n] + \sum_{n=0}^{9}\left[2n + \frac{2}{3}\right] + \sum_{n=0}^{9}\left[2n + \frac{4}{3}\right]$$

$$= \sum_{1}^{10} 2n + \sum_{0}^{9} 2n + \sum_{0}^{9}(2n+1) = 2\cdot\frac{10\cdot 11}{2} + 2\cdot\frac{9\cdot 10}{2} + 2\,\frac{9\cdot 10}{2} + 10$$

$$= 110 + 180 + 10 = \boxed{300}$$

Итак, $\boxed{k = 2/3}$ подходит. Очевидно, что меньше нельзя, тк на прямой $y = \frac{2}{3}x$ лежат целочисл. точки. Осталось найти максимальное k.

Мы можем увеличивать k пока не попадем на след. целочисл. точку, те нам нужно ближайшее к $2/3$ рацион. число $\frac{p}{q}$ с $q \le 30$ $\frac{p}{q} > 2/3$

Но если так рассуждать, то надо перебрать ≈ 30 рац чисел

тк непонятно как упростить перебор.

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…	27	28	29	30
p	1	2	3	3	4									19	19	20	21
p/q	1	1	1	3/4	4/5									19/27	19/28	20/29	21/30

Оказывается, что ближе всех к $2/3$ число $\boxed{19/28}$

$\Rightarrow \boxed{k < \frac{19}{28}}$

Можно найти верхнюю границу и иначе.

Нам нужно найти такое k, чтобы $[kx] = [\frac{2}{3}x]$ для всех $x \le 30$

пусть $k = 2/3 + \delta$, мы разбиваем все x на
1) $x = 3n$
2) $x = 3n+1$
3) $x = 3n+2$

1) $[2n] = [(\frac{2}{3}+\delta)\cdot 3n] = [2n + \delta \cdot 3n]$

$\Rightarrow \delta \cdot 3n < 1 \quad \delta < \frac{1}{3n} \quad n \le 10 \Rightarrow \delta < 1/30$

2) $[2n + \frac{2}{3}] = [(2/3+\delta)(3n+1)] = [2n + \frac{2}{3} + \delta(3n+1)]$

$[2n + \frac{2}{3}] = 2n$

$\Rightarrow \frac{2}{3} + \delta(3n+1) < 1 \quad \delta < \frac{1}{3(3n+1)} \quad n \le 9 \Rightarrow \delta < \frac{1}{84}$

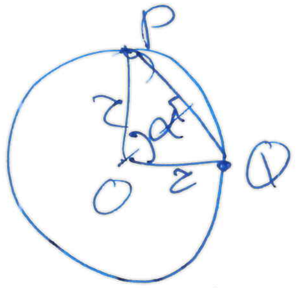
3) $2n+1 = [2n + \frac{4}{3}] = [(3n+2)(2/3+\delta)] = [2n + \frac{4}{3} + (3n+2)\delta] =$

$= 2n+1 + [\frac{1}{3} + (3n+2)\delta] \Rightarrow \delta < \frac{2/3}{3n+2} \Rightarrow \delta < \frac{2}{87}$

$n < 9$

ФТиАД 2022 В1 5

№10 В



α - равномерно распр на $[0, \pi]$

$PQ = 2r\sin(\alpha/2) \Rightarrow$

$E(PQ) = \int_0^{\pi} 2r\sin(\frac{\alpha}{2})\frac{d\alpha}{\pi} =$

$= \frac{4r}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(x)dx = \boxed{\frac{4r}{\pi}}$

$E(PQ^2) = \int_0^{\pi} 4r^2\sin^2(\alpha/2)\frac{d\alpha}{\pi} = \frac{8r^2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = 2r^2$

$\boxed{D(PQ) = \cancel{\sqrt{2r^2 - \left(\frac{4r}{\pi}\right)^2}}} = \boxed{\left(2 - \frac{16}{\pi^2}\right)r^2}$

~~Заменил~~

№10

надо найти число вар-тов, когда у нас 3 „O" в ряд а 3 „X" не в ряд

1) 3 „O" по гориз. или по вертик.:

у нас 6 вар-тов горизонталей и вертикалей

из оставшихся 6 клеток „X" могут быть в любых трёх, кроме двух случаев, когда они в одном ряду

$\Rightarrow C_3^6 - 2 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} - 2 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} - 2 = 18$

итого здесь $6\cdot 18 = \boxed{108}$ вар-тов

2) 3 „O" стоят на диагонали

те 2 вар-та выбора диаг.

3 „X" стоят как угодно, те $C_6^3 = 20 \Rightarrow$ здесь $2\cdot 20 = \boxed{40}$ вар-тов

$\boxed{\text{Отв: } 148}$

АРТИАД 2022 В17

ФТиАД 2022 В2

N1

$$\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}\,dx = \frac{ax+b}{x^2+4x+8} + \int \frac{cx+d}{x^2+4x+8}\,dx$$

метод Остроградского

диффер рав-во

$$\frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2} = \frac{a(x^2+4x+8)-(2x+4)(ax+b)}{(x^2+4x+8)^2} + \frac{cx+d}{x^2+4x+8}$$

$\Downarrow$

$$2x+12 = a(x^2+4x+8) - (2ax^2+(2b+4a)x+4b) + (cx+d)(x^2+4x+8)$$

$\Rightarrow \boxed{c=0}$

$$2x+12 = x^2(a-2a+d) + x(4a-2b-4a+4d) + 8a-4b+8d$$

$$\begin{cases} d-a=0 \\ 4d-2b=2 \\ 8a-4b+8d=12 \end{cases} \quad a=d \quad \begin{cases} 4d-2b=2 \\ 16d-4b=12 \end{cases} \quad \begin{cases} 2d-b=1 \\ 4d-b=3 \end{cases} \Rightarrow 2d=2$$

$\boxed{d=1}$ $\boxed{b=1}$ $\boxed{a=1}$ $\boxed{c=0}$

$$\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}\,dx = \frac{x+1}{x^2+4x+8} + \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} =$$

$$= \boxed{\frac{x+1}{x^2+4x+8} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C}$$

N2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}_{a_n} x^n, \qquad (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1), \quad (2n)!! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (2n)$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \Rightarrow \boxed{R=1}$$

Осталось исследовать сх-сть в $x = \pm 1$

1) $x = 1$ те $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$, тк $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$

то по признаку Гаусса ряд ~~сх-ся~~ расходится

// $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$

2) $x = -1$ $\Rightarrow$ надо исследовать $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n a_n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_n$ - монотонна. Осталось понять $\lim a_n = 0$ или нет

$a_n \to 0$

$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} <$
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \\ \vdots \\ \frac{2n-3}{2n-2} < \frac{2n-2}{2n-1} \Leftrightarrow 4n^2 - 8n + 3 < 4n^2 - 8n + 4 \\ \frac{2n-1}{2n} < 1 \end{array} \right.$

$< \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{a_n}$

$\Rightarrow a_n < \frac{1}{\sqrt{2n}} \Rightarrow \lim a_n = 0 \Rightarrow$ по Лейбницу $\sum (-1)^n a_n$ ~~сх-ся~~ сх-ся

$\boxed{\text{Ответ: } -1 \le x < 1}$

$\boxed{N\,3}$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $p_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & -2 & 2 \\ 6 & -3-x & 4 \\ 3 & -2 & 3-x \end{vmatrix} =$

$= (4-x)(-3-x)(3-x) \mp 24 \mp 24 - 6(-3-x) + 8(4-x) +$
$+ 12(3-x) = (4-x)(-9+x^2) \mp 48 + 18 + 6x + 32 - 8x +$
$+ 36 - 12x = -36 + 4x^2 + 9x - x^3 + 2 + 36 - 14x =$
$= -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$, $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

	1	-4	5	-2
1	1	-3	2	0

$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 3x + 2) = 0$

$(x-1)^2(x-2) = 0$

ФТиАФ ... B2.2

$p_A(x) = (x-1)^2(x-2)$, $p_A(A) = 0$ по Т. Гам.-Кэли

но необязательно, что $\mu_A(x) = p_A(x)$ $\mu_A(x) \mid p_A(x)$

$\Rightarrow \mu_A(x)$ может быть $(x-1)(x-2)$ ~~или~~

(очевидно, что $x-2$, $(x-1)^2$ не аннулируют A)

проверим $(A-I)(A-2I) = \Theta$ или нет

$$\underset{\parallel}{(A-I)}(A-2I)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\mu_A(x) = (x-1)(x-2)}$$

N4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 13x_3 + 4x_4 - 16x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -5 & 1 & -6 \\ 5 & 10 & -13 & 4 & -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \cdot(-5) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot(-2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(+3)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 7x_4 - 2x_5 \\ x_3 = 3x_4 - 2x_5 \end{cases}}$$

Ф.С.Р.:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-2	1	0	0	0
7	0	3	1	0
-2	0	-2	0	1

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= (-2, 1, 0, 0, 0) \\ v_2 &= (7, 0, 3, 1, 0) \\ v_3 &= (-2, 0, -2, 0, 1) \end{aligned}}$$

ФТиАД 2022 В2 3

№5

$$(a\sqrt[3]{2}+b\sqrt{3})^{1000}=\sum_{k=0}^{1000} C_{1000}^{k}(a\sqrt[3]{2})^{k}(b\sqrt{3})^{1000-k}\in Q$$

$\Longleftrightarrow k \vdots 6$

если $k \vdots 3$
$1000-k \vdots 2 \Longleftrightarrow k \vdots 2$ то подходит $0, 6, \dots 996$

т.к. $166\cdot 6 = 996$ $\quad \frac{k}{6} = 0, 1, \dots 166$ т.е. 167

если $1000 \Rightarrow 2022$

$2022 = 6\cdot 337 \Rightarrow$ подходит $0, 6, \dots 2022$

$\frac{k}{6} = 0, 1, \dots 337 \Rightarrow$ 338

Ответ

$$(a\sqrt[3]{2}+b\sqrt{3})^{2022}=\sum_{k=0}^{6\cdot 337} C_{2022}^{k}(a\sqrt[3]{2})^{k}(b\sqrt{3})^{2022-k}$$

k должно дел-ся на 6 $\Rightarrow \frac{k}{6} = 0, 1, \dots 337 \Rightarrow \boxed{338}$

Ответ

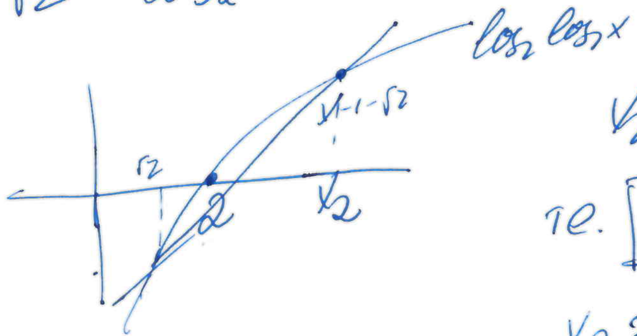
№6

$x^{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2^x}$, $\quad x_1 = \sqrt{2}$

$2^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\log_2 x = 2^x \log_2\sqrt{2} = 2^{x}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \cancel{\log_2 x = 2^{x-1}}$

$2^{\sqrt{2}}\log_2 x = 2^{x-1} \Rightarrow \log_2(2^{\sqrt{2}}\log_2 x) = x-1 \Rightarrow$

$\sqrt{2} + \log_2\log_2 x = x - 1 \qquad \log_2\log_2 x = x-1-\sqrt{2}$



$x_2 < 4$ т.к. $\log_2\log_2 4 = \log_2 2 < 3-\sqrt{2}$
$\log_2 2 = 1$

т.е. $\boxed{2 < x_2 < 4}$

$x_2 \approx 3{,}1355\dots$

$\boxed{\begin{array}{l} 2k < x_2 < 2k+2 \\ k=1 \end{array}}$

Ответ

$\boxed{N 7}$

$f(n) = \frac{d(n)}{\sqrt[3]{n}}$ $\arg\max_n \frac{d(n)}{\sqrt[3]{n}}$ - ?

$n = \prod_{p|n} p^{\nu_p(n)}$, то $d(n) = \prod_{p|n}(1+\nu_p(n)) \Rightarrow$

$f(n) = \prod_{p|n} \frac{1+\nu_p(n)}{p^{\nu_p(n)/3}}$ для упрощение вычислений

будем искать максимум у $f^3(n) = \prod_{p|n} \frac{(1+\nu_p(n))^3}{p^{\nu_p(n)}}$

Теперь для каждого p надо найти оптимальное ν

1) $\boxed{p=2}$ $\max \frac{(1+\nu)^3}{2^\nu}$ - ? $g_2(x) = \frac{(1+x)^3}{2^x}$

$g_2' = \frac{3(1+x)^2}{2^x} - \frac{(1+x)^3}{2^x}\log 2 = \frac{(1+x)^2}{2^x}((1+x)\log 2 - 3)$

$x_{max} = \frac{3}{\log 2} - 1 \approx 3{,}32..$ те надо сравнить

$g_2(3)$ и $g_2(4)$, $g_2(3) = 8$, $g_2(4) = \frac{125}{16} < g_2(3)$

$\Rightarrow \boxed{\nu = 3}$

2) $\boxed{p=3}$ $g_3(x) = \frac{(1+x)^3}{3^x}$, $x_{max} = \frac{3}{\log 3} - 1 \approx 1{,}73..$

$g_3(1) = \frac{8}{3}$, $g_3(2) = 3 > g_3(1) \Rightarrow \boxed{\nu = 2}$

3) $\boxed{p=5}$ $x_{max} = \frac{3}{\log 5} - 1 = 0{,}86.$

$g_5(1) = \frac{8}{5} > 1 \Rightarrow$ выгодно брать

4) $p=7$ $g_7(1) = \frac{8}{7} > 1$

5) $p \geq 11$ $g_p(1) = \frac{8}{p} < 1$ те невыгодно брать

$\Rightarrow n_{max} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = \boxed{2520}$

ФТиАД 2022В25

№8

$$\frac{y'}{\cos^2 y} - 3\operatorname{tg} y = -1$$ замена $z = \operatorname{tg} y$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy/dx}{\cos^2 y} \Rightarrow z' - 3z = -1$$

однород урав: $z' - 3z = 0$ $\quad \int \frac{dz}{z} = \int 3dx \Rightarrow \ln z = 3x + C$

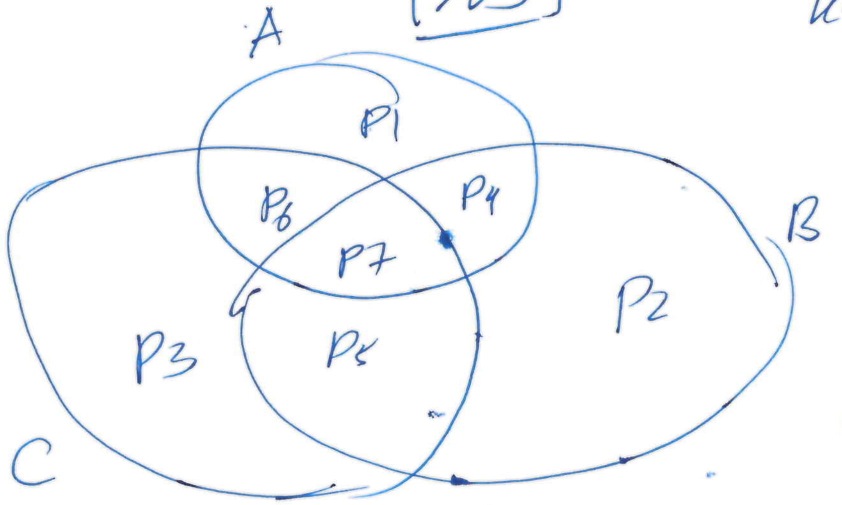
$$z = C \cdot e^{3x}$$

метод вариации постоянной $z = u(x) e^{3x}$

$u' e^{3x} = -1 \qquad u' = -e^{-3x} \Rightarrow u = \frac{e^{-3x}}{3} + C \Rightarrow$

$$z = \frac{1}{3} + Ce^{3x} \Rightarrow \boxed{y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3} + Ce^{3x}\right)}$$

№9



Как нужно $P_1 + P_2 + P_3$ - ?

Знаем:

$P_7 = 5 = P(A \cap B \cap C)$

$P_4 = P(A \cap B) - P_7 = 20 - 5 = 15$

$P_5 = P(B \cap C) - P_7 = 20 - 5 = 15$

$P_6 = P(A \cap C) - P_7 = 10 - 5 = 5$

$P_1 = P(A)^{=60} - P_4 - P_6 - P_7 = 35$

$P_2 = \cancel{P(B) = P_2 - P}\; P(B)^{=40} - P_4 - P_5 - P_7 = 5$

$P_3 = P(C) - P_5 - P_6 - P_7 = 30 - 15 - 5 - 5 = 5$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } 45\%}$

$\boxed{№10}$

Решение 1:

$p_1 = \{1, 2\} \dots$ $p_{29} = \{29, 30\}$ — последов. пары

$X_i = \begin{cases} 1 & p_i \in A \\ 0 & p_i \notin A \end{cases}$

число пар в A это $\sum_1^{29} X_i \Rightarrow$ надо найти

$E(X_1 + \dots + X_{29}) = \sum_1^{29} E(X_i)$

$E(X_i) = \dfrac{C_{28}^3}{C_{30}^5} = \dfrac{28!}{3!\cdot 25!} \cdot \dfrac{25!\,5!}{30!} = \dfrac{120}{6\cdot 29\cdot 30} = \dfrac{2/3}{29}$

$\Rightarrow E\left(\sum_1^{29} X_i\right) = 29 \cdot \dfrac{2/3}{29} = \boxed{2/3}$

Решение 2:

честно считаем кол-во вар-тов мн-ве A с 1, 2, 3, 4 последов. парами

всего возможных A C_{30}^5

1) в A 4 пары тогда это $\{a, a+1, a+2, a+3, a+4\}$, $1 \le a \le 26$

т.е. 26 вар-тов

2) в A 3 пары тогда $\{a, a+1, a+2, a+3, b\}$
$\{b, a, a+1, a+2, a+3\}$
$\{a, a+1, a+2, b, b+1\}$
$\{b, b+1, a, a+1, a+2\}$

если аккуратно все долго считать, то получим $4\cdot C_{26}^2$ вар-тов

3) 2 пары тут $C_4^2 \cdot C_{26}^3$

4) 1 пара тут $C_4^3 \cdot C_{26}^4$

$\Rightarrow E = \dfrac{1}{C_{30}^5}\left[4\cdot C_{26}^1 + 3\cdot 4\cdot C_{26}^2 + 2\cdot C_4^2 \cdot C_{26}^3 + 1\cdot C_4^3 \cdot C_{26}^4\right] = 2/3$

ФПИАД2023В27

ФПТИ АД 2022 В3

№1

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+2)^{5/2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Замена Абеля} \\ t = (\sqrt{x^2+x+2})' = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$4t^2(x^2+x+2) = 4x^2+4x+1 = 4(x^2+x+2)-7$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2+x+2 = \frac{-7}{4t^2-4}}$$

т.к. $t\cdot\sqrt{x^2+x+2} = x+\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$dt\sqrt{x^2+x+2} + \frac{(2x+1)t\,dx}{2\sqrt{\ }} = dx$$

$$dt\sqrt{x^2+x+2} + t^2dx = dx \Rightarrow \underbrace{\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{dt}{1-t^2}} \Big\}$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+x+2)^2}\frac{dx}{\sqrt{\ }} = \int \frac{(4t^2-4)^2}{49}\cdot\frac{dt}{1-t^2} = \frac{16}{49}\int(1-t^2)dt$$

$$= \frac{16}{49}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C = \boxed{\frac{16}{49}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}} - \frac{1}{24}\frac{(2x+1)^3}{(x^2+x+2)^{3/2}}\right)+C}$$

№2

Найти мн-во сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4+(-1)^n)^n}{n}x^n$

$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ - радиус сх-сти

$\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{(4+(-1)^n)^n}{n}} = 5 \Rightarrow \boxed{R = 1/5}$ Но надо исследовать сх-сть в $x = \pm 1/5$

1) $x = 1/5$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4+(-1)^n}{5}\right)^n\frac{1}{n} = \underbrace{\sum_{n=2j}\frac{1}{2j}}_{\text{расх-ся}} + \sum_{n=2j+1}\left(\frac{3}{5}\right)^n\frac{1}{n}$

2) $x = -1/5 \Rightarrow$ $\underbrace{\sum_{n=2j}\frac{1}{2j}}_{\text{расх-ся}} - \underbrace{\sum_{n=2j+1}\left(\frac{3}{5}\right)^n\frac{1}{n}}_{\text{сх-ся абс.}}$ $\Rightarrow$ все расходятся

$\boxed{\text{Отв: } -1/5 < x < 1/5}$

ФПТИ АД 2022 В3-1

$\boxed{№2}$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{n^2x^2e^{-n^2x^2}}_{a_n(x)}$ найти область сущес-ь и исследовать на непрерывность.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n(x)}=0,\ x\neq 0 \Rightarrow$ по радикальному Коши ряд сх-ся на $\mathbb{R}$

$a_n(x)\geq 0$

очевидно, $f(0)=0$, $f(x)$ - четна

но т.к. $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} a_n(x)\geq a_n(1/n)=\frac{1}{e} \Rightarrow$ ряд не является равномерно сх-ся на $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ $f(x)$ не обязательно непрерывна на $\mathbb{R}$

но давайте д-жем её равн. сх-сть на $(0,\infty)$

$E_m=[1/m,\infty)$ - хуг

$a_n'(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}-2n^4x^3e^{-n^2x^2}$
$=2n^2x(1-n^2x^2)e^{-n^2x^2}$

если $n>m$ то

$\Rightarrow a_n(x)$ убывают на E_m

$a_n(x)\leq a_n(1/m)=\underbrace{\frac{n^2}{m^2}e^{-n^2/m^2}}_{\text{сх-ся}} \Rightarrow$ по Вейерштрассу

$\sum a_n(x)$ сх-я равномерно на E_m

$\Rightarrow f(x)$ - непрерывна на E_m для любого m
$\Rightarrow$ непрерывна на $(0,\infty)$, аналогично и на $(-\infty,0)$

$\Rightarrow$ осталось понять $x_0=0$ очевидно что это точка разрыва т.к.

если бы $f(x)$ непрерывна в x_0 то и непрерывна на $[-1,1]$

$a_n(x)$ - непрер, $a_n(x)\geq 0 \Rightarrow$ по Т. Дини $\sum a_n(x)\rightrightarrows f(x)$
на $[-1,1]$ но это не так, противоречие!

ОПТиАД 2022 В3 2

Зам: можно взять $x_k = 1/k$ ⇒

$f(\frac{1}{k}) \geq u_k(1/k) = \frac{1}{e}$ т.е. по послед $\{x_k\}$, $\lim x_k = 0$: $f(x_k) \not\to 0 = f(0)$

⇒ в $x_0 = 0$ — ∃ $f(x)$ разрыв

Ответ: $f(x)$ — сущ. на $\mathbb{R}$, непрерывна на $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

№3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A_1, A_2, A_3, A_4

пусть $\mu_{A_0}(x)$ — аннул. мн. A_0, тогда $\mu_A(x) = \text{НОК}(\mu_{A_i}(x))$

$\mu_{A_1}(x) = (x-2)^2$, $\mu_{A_2}(x) = \begin{vmatrix} x-4 & -2 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-4)(x-3) - 2$

$= x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$

$\mu_{A_3}(x) = x^2$, $\mu_{A_4}(x) = x - 5$

$\Rightarrow \mu_A(x) = \text{НОК}\left((x-2)^2, (x-2)(x-5), x^2, x-5\right) =$

$= \boxed{x^2(x-2)^2(x-5)}$ ← ответ.

№4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +1 \\ +2 \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +1 \\ -1 \\ -3 \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

ФПИАД2022В3-3

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3/5 & 1/5 & -3/5
\end{array}\right) \quad -3,\ -1,\ -2
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -9/5 & -3/5 & 14/5 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & -1/5 & -2/5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -6/5 & -2/5 & 11/5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3/5 & 1/5 & -3/5
\end{array}\right)
$$

ответ.

N5

$F(768)-F(384)=\boxed{\frac{1}{192}}$

$F(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n} d$

$F(n)=\sum_{d|n}\frac{1}{d}=\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^{\nu_p(n)}}\right)$, $n=\prod_{p|n}p^{\nu_p(n)}$

$768=2^8\cdot 3$, $384=2^7\cdot 3 \Rightarrow$

$F(768)=\prod_{p|768}(\ )=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^8}\right)$

$F(384)=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^7}\right) \Rightarrow$

$F(768)-F(384)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{1}{3\cdot 2^6}=\boxed{\frac{1}{192}}$ ← Ответ

N6

$a_0=\frac{1}{4}$, $a_{k+1}=2a_k-2a_k^2 = 2a_k(1-a_k) \Rightarrow$ $\lim a_k=A$ то $A=2A-2A^2$, $2A^2=A$, $A=1/2$

но надо обосновать наличие предела

заметим, что если $a_k<1/2$ то $2a_k-2a_k^2<1/2 \Leftrightarrow$

$2a_k^2-2a_k+1/2>0 \Leftrightarrow \left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2>0$ т.е. по инд $\boxed{a_k<1/2}$

$\{a_k\}$ возрастает, надо найти $\min_k\left\{k: a_k-\frac{1}{2}\geq-\frac{1}{2^{1000}}\right\}$

$a_k\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{1000}}$

Заметим, что $a_0 = \frac{1}{4}$, $a_1 = \frac{3}{8}$, $a_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8} = \frac{15}{32}$, ...

и ~~зап~~ предположим, что $a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\alpha_k}}$, $\alpha_0 = 2$

по индукции:

$$a_{k+1} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\alpha_k}}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\alpha_k}}\right) = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{2\alpha_k}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2\alpha_k - 1}}$$

т.е. $\alpha_{k+1} = 2\alpha_k - 1$ осталось найти миним k такое, что $\alpha_k \geq 1000$

$\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 9$, $\alpha_4 = 17$, $\alpha_5 = 33$,
$\alpha_6 = 65$, $\alpha_7 = 129$, $\alpha_8 = 257$, $\alpha_9 = 513$, $\boxed{\alpha_{10} = 1025}$

(можно было заметить, что $\alpha_k = 2^k + 1$)

$\boxed{\text{Ответ } k = 10}$

$\boxed{N7}$ см Вариант 1

Ответ: $7/3 \leq k < 19/28$

$\boxed{N8}$

$$e^{y^2}\left(2yy' + \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{x^2}, \quad z = e^{y^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = 2ye^{y^2}\cdot y' \Rightarrow z' + \frac{2z}{x} = \frac{1}{x^2}$$

Однородное ур: $z' + \frac{2z}{x} = 0$ $\quad \int\frac{dz}{z} = -\int\frac{2dx}{x}$

$\log z = -2\log x + C$

$z = \frac{C}{x^2} \Rightarrow$ вариация постоянной дает

$z = \frac{u(x)}{x^2} \Rightarrow \frac{u'}{x^2} \cancel{+ \frac{2u}{x^3}} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow u' = 1 \Rightarrow u = x + C$

$z = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2} \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{\log\left(\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}\right)}}$

ОРТиНД2022В35

$\boxed{№ 9}$

A_1 – нет красных мячей, A_2 – нет белых мячей, A_3 – нет синих

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) - p(A_1 \cap A_2) -$$
$$- p(A_2 \cap A_3) - p(A_1 \cap A_3) + \underbrace{p(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{0}$$

т.е. вытащили 5 мячей бел. или кр

$$p(A_1) = \frac{C_{60}^{5}}{C_{90}^{5}} = p(A_2) = p(A_3)$$

$$p(A_i \cap A_j) = \frac{C_{30}^{5}}{C_{90}^{5}} \Rightarrow$$

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{3\left(C_{60}^{5} - C_{30}^{5}\right)}{C_{90}^{5}} = \frac{3 \cdot 85! \cdot 5!}{90!}\left(\frac{60!}{55! \cdot 5!} - \right.$$
$$\left. - \frac{30!}{25! \cdot 5!}\right) = \frac{\cancel{3}}{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot \cancel{90}_{30}}\left(56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot 60 - 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30\right) =$$

$$= \frac{56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot 2}{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89} - \frac{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29}{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89} =$$

$$86 = 2 \cdot 43, \quad 87 = 3 \cdot 29, \quad 88 = 8 \cdot 11$$

$$= \frac{1}{43 \cdot 29 \cdot 11 \cdot 89}\left(\frac{\cancel{56}^{7} \cdot \cancel{57}^{19} \cdot 58 \cdot 59 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{8}} - \frac{\cancel{26}^{13} \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 8}\right)$$

$$= \frac{1}{43 \cdot 29 \cdot 11 \cdot 89}\left(7 \cdot 19 \cdot 58 \cdot 59 - 13 \cdot 9 \cdot \frac{7 \cdot 29}{2}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{2779}{7654} = 0{,}36307\ldots}$$

$\boxed{№ 10}$ см В2

ФПМИ 2022 В3.6