МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО И ε-ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С ГАУССОВСКИМИ ОШИБКАМИ

С.А. Булгаков, В.М. Хаметов

sbulgakov@hse.ru, vmkhametov@hse.ru
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Поступила 18.12.2019

Статья посвящена построению решения задачи оптимального в среднеквадратичском смысле стохастического восстановления измеримой квадратично интегрируемой относительно меры Лебега функции, заданной на конечномерном компакте. В ней обосновывается процедура оптимального восстановления, а также условия его несмещенности и состоятельности. Кроме того, предложена и обоснована процедура ε-оптимального стохастического восстановления.

УДК 519.254
DOI: 10.31145/2224-8412-2020-20-1-57-69

Введение

Данная статья посвящена построению моделей оптимально и ε-оптимального восстановления квадратично интегрируемых функций относительно меры Лебега и определенных на конечномерном компакте по наблюдениям с гауссовскими ошибками. В ней мы рассматриваем условия существования оптимальной и ε-оптимальной процедур восстановления по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

Под задачей стохастического восстановления функции из некоторого класса обычно понимают следующее: имеется возможность наблюдать значение этой функции с ошибками в любой точке области ее определения и требуется оценить (восстановить) ее по результатам наблюдений в соответствии с заданным критерием оптимальности. Следует отметить, что эта задача относится к задачам непараметрического (бесконечномерного) оценивания. Задачам непараметрического оценивания посвящено большое количество работ, например [1-4, 6, 7, 12-16].

Приведем краткий обзор результатов по теории стохастического восстановления функций.

Так, в [1, 2] предложен метод решения задачи восстановления, который основывается на теории поперечников Колмогорова и теореме Гливенко–Кантелли.

В [3, 4] содержится подробный обзор результатов по теории стохастического восстановления. В них для решения этой задачи использован минимаксный подход.

В [5, 18] рассматривается минимаксная постановка задачи стохастического восстановления для нелинейных функционалов, решение которой существенным образом опирается на результаты работы [3]. Важно отметить, что в этих работах содержится большое количество новых точно решаемых примеров. В [10] построены минимаксные оценки коэффициентов полиномиальной регрессии.

В [6, 7] применена теория планирования эксперимента для нахождения решения задачи стохастического восстановления.

В [13, 14, 16] предложены рекурсивные алгоритмы стохастического восстановления неизвестной функции и исследована их эффективность.

В [15] разработан метод построения проекционных оценок для восстановления квадратично интегрируемых плотностей распределения случайных величин.

В отличие от вышеприведенных работ, в этой статье для любой квадратично интегрируемой функции заданной на конечномерном компакте решается задача стохастического восстановления, оптимального в среднеквадратическом смысле. В ней мы устанавливаем условия существования решения этой задачи и приводим явный вид этой непараметрической оценки (теорема 1). Кроме того, здесь впервые устанавливаются условия ее несмещенности (теорема 3) и состоятельности (теорема 4).

Построенные в работе непараметрические оценки квадратично интегрируемых функций сложно реализовать на практике. Поэтому, приводится алгоритм построения ε-отптимальных конечномерных оценок (теорема 5).

1. Основные определения и обозначения. Постановка задачи стохастического восстановления

Пусть $x \in K$ – конечномерный компакт, $\mathcal{B}(K)$ – борелевская σ-алгебра на K, а $L_2(K)$ – множество измеримых функций $f: K \to \mathbb{R}^1$, квадратично интегрируемых относительно меры Лебега Λ на K, т.е. $\int_K f^2(x)dx < \infty$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – вероятностное пространство на котором задана измеримая функция $n: \mathbb{N}^+ \times \Omega \times K \to \mathbb{R}^1$, обозначаемая $n_m(x)$, такая что для любых $x \in K$ и $m \in \mathbb{N}^+$

$$\mathrm{E}n_m(x) = 0, \qquad \mathrm{E}\int_K n_m^2(x)dx = \sigma^2 < \infty, \tag{1}$$

и для любых $x \in K$ и $m \neq q$

$$\mathrm{E}n_m(x)n_q(x) = 0; \tag{2}$$

здесь через $\mathrm{E}(\cdot)$ обозначен интеграл Лебега относительно вероятностной меры P.

Предположим, что в любой точке $x \in K$ мы наблюдаем функцию $y_m(x)$, которая представляет собой сумму функций $f(x) \in L_2(K)$ и $n_m(x)$, т.е. наблюдаем функцию $f(x)$ с аддитивными ошибками $n_m(x)$

$$y_m(x) = f(x) + n_m(x), \tag{3}$$

где $m \in \mathbb{N}^+$ – номер наблюдения.

Поскольку $L_2(K)$ – сепарабельное гильбертово пространство, то в нем существует (вообще говоря неединственная) полная, ортонормированная система функций, которую мы обозначаем через $\{\varphi_i(x)\}_{i \geq 0}$, т.е. для любых $i\ j \in \mathbb{Z}^+$ функции $\varphi_i(x), \varphi_j(x) \in L_2(K)$ такие, что $\int_K \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij}$, здесь δ_{ij} – символ Кронекера, причем $\sum_{i=0}^{\infty} \int_K \varphi_i^2(x)dx < \infty$.

Известно [17], что любая $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(K)$-измеримая функция $g(\omega, x)$, со значениями в $\mathbb{R}^1$, такая что $\mathrm{E}\int_K |g(\omega, x)|^2 dx < \infty$ почти всюду относительно меры Лебега, допускает представление

$$g(\omega, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^g(\omega)\varphi_j(x),$$

где $\alpha_j^g(\omega) \triangleq \int_K g(\omega, x)\varphi_j(x)dx$ – случайные величины, которые являются коэффициентами Фурье функции $g(\omega, x) \in L_2(K)$ [9]. Обозначим:

$$y_m^i \triangleq \int_K y_m(x)\varphi_i(x)dx, \tag{4}$$

$$\alpha_i \triangleq \int_K f(x)\varphi_i(x)dx, \tag{5}$$

$$n_m^i \triangleq \int_K n_m(x)\varphi_i(x)dx. \tag{6}$$

Из (3)–(6) следует, что для любых *i, m* выполнено равенство

$$y_m^i = \alpha_i + n_m^i. \tag{7}$$

Отметим, что, в силу условий (1)–(2), для любого $m \geq 1$ имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[\alpha_i^2 + \mathrm{E}(n_m^i)^2\right] < \infty, \quad \mathrm{E}\sum_{i=0}^{\infty} (y_m^i)^2 < \infty. \tag{8}$$

Обозначим $\sigma_i^2 \triangleq \mathrm{E}(n_m^i)^2$. Без ограничения общности можно считать, что $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \sigma^2 < \infty$.

Очевидно, что для любых $f(x) \in L_2(K)$, $m \in \mathbb{Z}^+$ и $x \in K$ справедливы равенства:

$$f(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\varphi_i(x), \tag{9}$$

$$n_m(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} n_m^i\varphi_i(x) \quad — \mathrm{P} - \text{п. н.}, \tag{10}$$

$$y_m(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} y_m^i\varphi_i(x) \quad — \mathrm{P} - \text{п. н.} \tag{11}$$

Обозначим σ-алгебры

$$\mathcal{F}_m^{y^i} \triangleq \sigma\{y_1^i, \ldots, y_m^i\}, \qquad \mathcal{F}_m^y \triangleq \sigma\{y_1^i, \ldots, y_m^i, \forall i \geq 0\}.$$

Очевидно, что для любых $m \geq 1$ и $x \in K$ случайная функция $y_m(x)$ является $\mathcal{F}_m^y \otimes \mathcal{B}(K)$ – измеримой.

Теперь приведем определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Определение 1 *Пусть* $\hat{f}_m(x)$ *– любая* $\mathcal{F}_m^y \otimes \mathcal{B}(K)$*-измеримая функция, такая что* $E\int_K \left|\hat{f}_m(x)\right|^2 dx < \infty$*, которую будем называть <u>оценкой</u> функции* $f(x) \in L_2(K)$.

Множество таких оценок обозначим через $\mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})$. Очевидно, что $\mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})$ – сепарабельное гильбертово пространство.

В статье рассматривается задача построения оценки $\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})$ такой, что

$$\mathrm{E}\int_K \left[f(x) - \hat{f}_m(x)\right]^2 dx \to \inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})}, \tag{12}$$

– это критерий минимума среднеквадратической ошибки относительно меры $\Lambda\times P$.

Определим теперь, что мы будем понимать под ε^{β}-оптимальной и оптимальной оценками.

Определение 2 *Оценку* $\hat{f}_m^{\varepsilon}(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(P)$ *назовем* *<u>ε^{β}-оптимальной</u>, где* $\varepsilon\in(0{,}1)$ *– любое,* $\beta>0$*, если*

$$\inf_{\hat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})}\mathrm{E}\int_K\left[f(x)-\hat{f}_m(x)\right]^2dx=\mathrm{E}\int_K\left[f(x)-\hat{f}_m^{\varepsilon}(x)\right]^2dx+O(\varepsilon^{\beta}). \quad (13)$$

0-оптимальную оценку назовем оптимальной.

Замечание 1 *Под* $O(\varepsilon^{\beta})$ *понимается такая неслучайная функция* $\Phi(m,\varepsilon)$ *от* $m\in\mathbb{Z}^{+}$ *и* $\varepsilon\in(0{,}1)$ *со значениями в* $\mathbb{R}^1$*, у которой для любых* $m\in\mathbb{Z}^{+}$*,* $\varepsilon\in(0{,}1)$ *существует положительная константа* C *такая, что* $\frac{|\Phi(m,\varepsilon)|}{\varepsilon^{\beta}}\le C<\infty$*, где* $\beta>0$.

Целью данной статьи является:

1) нахождение условий, при выполнении которых существуют оптимальные и ε^{β}-оптимальные оценки любой неизвестной функции $f(x)\in L_2(K)$ по наблюдениям за ней с гауссовскими ошибками;

2) исследование статистических свойств построенных оценок.

2. Представление оценок функции из L_2 (K) и критериев (12), (13)

2.1 Поскольку $\hat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})$, то $\Lambda\times$Р-почти всюду она допускает представление

$$\hat{f}_m(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\hat{\alpha}_{im}\varphi_i(x), \quad (14)$$

где $\hat{\alpha}_{im}$ – $\mathcal{F}_m^{y^i}$-измеримая случайная величина, $i\in\mathbb{Z}^{+}$, которая является коэффициентом Фурье оценки $\hat{\hat{f}}_m(x)$, т.е.

$$\hat{\alpha}_{im}\triangleq\int_K\hat{f}_m(x)\varphi_i(x)dx. \quad (15)$$

Определение 3 ([16]) *Оценка (14) функции* $f(x)\in L_2(K)$*, где* $\{\varphi_j(x)\}_{j\ge0}$ *– полная ортонормированная система функций в* $L_2(K)$*, называется <u>проекционной</u>.*

Из (14), следует соотношение

$$\mathrm{E}\int_K\left|\hat{f}_m(x)\right|^2dx=\mathrm{E}\sum_{i=0}^{\infty}\hat{\alpha}_{im}^2\,, \quad (16)$$

которое является обобщением известного равенства Парсеваля [8].

Обозначим $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathrm{P})$ – множество бесконечномерных случайных векторов $\hat{\alpha}_m \triangleq (\hat{\alpha}_{0m}, \hat{\alpha}_{1m}, \dots)$, таких, что: i) $\hat{\alpha}_{im}$ — $\mathcal{F}_m^{y^i}$-измеримы, ii) $\mathrm{E}\sum_{i=0}^{\infty} |\hat{\alpha}_{im}|^2 < \infty$. Очевидно, что $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathrm{P})$ – гильбертово пространство. Из равенства (16) следует утверждение.

Предложение 1 $\mathbb{M}_{2,m}(P)$ *изоморфно* $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(P)$.

2.2 Представление критерия оптимальности (12).

Поскольку система $\{\varphi_i(x)\}_{i\geq 0}$ – полная ортонормированная, то из (9), (14) и (16) для любого m≥1 следуют равенства

$$\mathrm{E}\int_K \left[f(x) - \hat{f}_m(x)\right]^2 dx = \mathrm{E}\sum_{i=0}^{\infty} [\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{E}[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2,$$

где $\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})$ – некоторая проекционная оценка.

Отсюда, в силу предложения 1, имеем

$$\inf_{\hat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})} \mathrm{E}\int_K \left[f(x) - \hat{f}_m(x)\right]^2 dx = \inf_{\hat{\alpha}_m\in\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathrm{P})} \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{E}[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2. \quad (17)$$

Пусть $L_{2m} \triangleq L_2(\Omega, \mathcal{F}_m^{y^i}, \mathrm{P})$ – множество $\mathcal{F}_m^{y^i}$-измеримых квадратично интегрируемых случайных величин. Из (17) следует неравенство

$$\inf_{\hat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})} \mathrm{E}\int_K \left[f(x) - \hat{f}_m(x)\right]^2 dx \geq \sum_{i=0}^{\infty} \inf_{\hat{\alpha}_{im}\in L_{2m}} \mathrm{E}[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2 .$$

Ясно, что оценка $\hat{\alpha}_{im}^0$ является оптимальной тогда и только тогда, когда

$$\inf_{\hat{\alpha}_{im}\in L_{2m}} \mathrm{E}[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2 = \mathrm{E}\left[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0\right]^2. \quad (18)$$

Таким образом, если существует $\hat{\alpha}_{im}^0$, то

$$\inf_{\hat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})} \mathrm{E}\int_K \left[f(x) - \hat{f}_m(x)\right]^2 dx \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{E}\left[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0\right]^2.$$

Отсюда, в силу теоремы Фубини и последнего неравенства, имеем

$$\begin{aligned}\inf_{\hat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})} \mathrm{E}\int_K \left[f(x) - \hat{f}_m(x)\right]^2 dx \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{E}\left[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0\right]^2 = \\ = \inf_{\{\hat{\alpha}_m\}\in\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathrm{P})} \mathrm{E}\sum_{i=0}^{\infty} [\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2 = \mathrm{E}\int_K \left[f(x) - \hat{f}_{im}^0(x)\right]^2 dx,\end{aligned} \quad (19)$$

где $\hat{f}_{im}^0(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\alpha}_{im}^0 \varphi_i(x)$. Следовательно, доказано следующее утверждение.

Предложение 2 *Для любого m≥1 оптимальная проекционная оценка* $\hat{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)$ *существует тогда и только тогда, когда существует* $\{\hat{\alpha}_m^0\} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(P)$ *такая, что*

$$\inf_{\{\hat{\alpha}\}_{i\geq 0} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathrm{P})} \mathrm{E} \sum_{i=0}^{\infty} [\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2 = \mathrm{E} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0\right]^2. \tag{20}$$

Замечание 2 *Из утверждения предложения 2 следует, что для существования оптимальной проекционной оценки функции из класса* $\mathbb{M}_{2,m}(P)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали оптимальные оценки ее коэффициентов Фурье.*

3. Существование решения задачи оптимального стохастического восстановления функции из L_2 (*K*)

В данном разделе мы сформулируем один из основных результатов работы.

Предположение 1 *Пусть для любых i ≥ 0 и m ≥ 1 семейство* $\{n_m^i\}_{\substack{i\geq 0 \\ m\geq 1}}$ *образует гауссовскую систему некоррелированных случайных величин с* $Law(n_m^i) = \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, *причем* $\sigma^2 \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат данного раздела.

Теорема 1 *Пусть* $f(x) \in L_2(K)$ *и выполнены условия предположения 1. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для почти всех* $x \in K$ *и* $m \geq 1$ *существует оптимальная проекционная оценка* $\hat{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)$, *которая Λ×P-почти всюду допускает представление*

$$\hat{f}_m^0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\alpha}_{im}^0 \varphi_i(x), \tag{21}$$

причем

$$\hat{\alpha}_{jm}^0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} y_k^j. \tag{22}$$

2) $$\inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})} \mathrm{E} \int_K \left[f(x) - \hat{f}_m(x)\right]^2 dx = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2 = \frac{\sigma^2}{m}. \tag{23}$$

Доказательство теоремы 1 Установим 1). Из утверждения предложения 2 следует что существует оптимальная проекционная оценка $\hat{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})$ такая, что

$$\inf_{\hat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathrm{P})} \mathrm{E}\int_K \left[f(x)-\hat{f}_m(x)\right]^2 dx = \mathrm{E}\int_K \left[f(x)-\hat{f}_m^0(x)\right]^2 dx. \tag{24}$$

Основным содержанием первого утверждения теоремы является доказательство равенств (22) и (21).

Поэтому рассмотрим $\mathrm{E}\int_K \left[f(x)-\hat{f}_m^0(x)\right]^2 dx$. Из утверждения предложения 2 (см. формулу (20)), имеем

$$\mathrm{E}\int_K \left[f(x)-\hat{f}_m^0(x)\right]^2 dx = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{E}\left|\alpha_j-\hat{\alpha}_{jm}^0\right|^2. \tag{25}$$

Отсюда следует, что для каждого $j\in\mathbb{Z}^+$ требуется по результатам наблюдений $(y_1^j,\dots,y_m^j)$ построить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку коэффициента Фурье α_j. Заметим, что в силу (7) распределение случайной величины y_m^j является гауссовским, причем $\mathrm{Law}(y_m^j)=\mathcal{N}(\alpha_j,\sigma_j^2)$. Известно [17], что оптимальная оценка коэффициента Фурье α_j, в силу критерия (20), по результатам наблюдений с ошибками $(y_1^j,\dots,y_m^j)$, обозначаемая $\hat{\alpha}_{jm}^0$, совпадает с соответствующей оценкой по критерию максимального правдоподобия. Следовательно

$$\hat{\alpha}_{jm}^0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k^j \tag{26}$$

Умножим левую и правую часть (26) на $\varphi_j(x)$, а затем выполним суммирование по всем j, имеем (21).

Установим 2). Найдем значение $\mathrm{E}\int_K \left[f(x)-\hat{f}_m^0(x)\right]^2 dx$, в силу (25), (7) и предложения 1 имеем

$$\mathrm{E}\int_K \left[f(x)-\hat{f}_m^0(x)\right]^2 dx = \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{E}\left|\hat{\alpha}_{jm}^0-\alpha_j\right|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{E}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k^j-\alpha_j\right|^2 =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} n_k^j\right)^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sigma_j^2}{m} = \frac{\sigma^2}{m}.$$

Доказательство закончено.

Замечание 3 *Утверждение теоремы 1 в отличие от соответствующих утверждений работ [3, 12, 13], дает новые достаточные условия существования оптимальной оценки функции из $L_2(K)$ по наблюдениям с гауссовскими ошибками.*

Следствие 2 *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для каждого $m\geq 1$ почти всюду относительно меры $\Lambda\times P$*

$$\hat f_m^0(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat\alpha_{lm}^0 \varphi_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_l^j \varphi_l(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{\infty} y_l^j \varphi(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j(x). \quad (27)$$

Доказательство следствия 2 вытекает из (11), (20), (21) и теоремы Фубини.

4. Несмещенность оценки $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{x})$

В этом разделе мы покажем что оценка (21) – несмещенная.

Теорема 3 *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда оценка (21) – несмещенная.*

Доказательство теоремы 3 Из (7) и (21) для любых $x \in K$ и $m \geq 1$, в силу теоремы Фубини, имеем

$$\mathrm{E}\hat f_m^0(x) = \mathrm{E}\sum_{j=0}^{\infty} \hat\alpha_{jm}^0 \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x)\mathrm{E}\hat\alpha_{jm}^0 = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x)\frac{1}{m}\mathrm{E}\sum_{k=1}^{m} y_k^j = $$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x)\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} (\alpha_j + \mathrm{E}n_k^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x)\alpha_j = f(x). \quad (28)$$

Доказательство закончено.

5. Состоятельность оценки $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{x})$

В данном разделе мы установим достаточные условия состоятельности оценки $\hat f_m^0(x)$.

Теорема 4 *Пусть выполнены условия теоремы 3 и для почти всех $x \in K$ ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2\varphi_j^2(x) < \infty$. Тогда оценка $\hat f_m^0(x)$ – состоятельна.*

Доказательство теоремы 4 Нам надо установить, что для почти всех $x \in K$

$$\hat f_m^0(x) \underset{m\to\infty}{\overset{\mathrm{P}}{\longrightarrow}} f(x).$$

Достаточно доказать, что дисперсия оценки $\hat f_m^0(x)$ стремится к нулю, когда $m\to\infty$.

Сначала вычислим дисперсию оценки $\hat f_m^0(x)$, обозначаемую $\mathrm{D}\hat f_m^0(x)$. Из (21), в силу теоремы Фубини, (9), (7) и (22), имеем

$$\mathrm{D}\hat{f}_m^0(x) = \mathrm{E}\left[\hat{f}_m^0(x) - f(x)\right]^2 = \mathrm{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\hat{\alpha}_m^j - \alpha_j\right)\varphi_j(x)\right]^2 =$$
$$= \mathrm{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k^j - \alpha_j\right)\varphi_j(x)\right]^2 = \mathrm{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} n_k^j\varphi_j(x)\right]^2 =$$
$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2(x)\sigma_j^2.$$

Так как ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2(x)\sigma_j^2$ сходится, то из последнего равенства следует утверждение теоремы. Доказательство закончено.

6. ε^{β}-оптимальное стохастическое восстановление функции из $L_2(K)$

В данном разделе опишем и обоснуем метод построения ε^{β}-оптимальной проекционной оценки неизвестной функции $f(x) \in L_2(K)$, которая будет являться конечномерной.

Сначала приведем достаточное условие ε^{β}-оптимальности проекционной оценки $\hat{f}_m^0(x)$ неизвестной функции $f(x) \in L_2(K)$.

Обозначим

$$\mathcal{L}_2 \triangleq \left\{f(\omega, x): K\times\Omega \to \mathbb{R}^1 : \mathrm{E}\int_K |f(\omega, x)|^2 dx < \infty\right\}. \tag{29}$$

Очевидно, что $\mathcal{L}_2$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)_{\mathcal{L}_2}$ и нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_2}$.

Теорема 5 *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть для любого ε>0 существует $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое что для любого $N \geq N_0(\varepsilon)$ имеет место неравенство*

$$\sum_{i=\mathrm{N}+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 + \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} \frac{\sigma_i^2}{m} < \varepsilon$$

Тогда оценка

$$\hat{f}_m^{\varepsilon}(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} \hat{\alpha}_{im}^0\varphi_i(x) \tag{30}$$

является ε-оптимальной (β=1), где $\hat{\alpha}_{im}^0$ определяется (26).

Доказательство теоремы 5 Рассмотрим средрнеквадратическую ошибку оценки, имеем равенство

$$\mathcal{J}(m, K) \triangleq \mathrm{E}\int_K \left|f(x) - \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} \hat{\alpha}_{im}^0\varphi_i(x)\right|^2 dx = \mathrm{E}\int_K \left|\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\varphi_i(x) - \right.$$
$$\left.\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} \hat{\alpha}_{im}^0\varphi_i(x)\right|^2 dx = \mathrm{E}\int_K \left|\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} (\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0)\varphi_i(x) + \sum_{i=\mathrm{N}+1}^{\infty} \alpha_i\varphi_i(x)\right|^2 dx\,.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{J}(m,K) = \mathrm{E}\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} \left|\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0\right|^2 + \sum_{i=\mathrm{N}+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \,. \tag{31}$$

Последнее, с учетом (26), (28), а также (4), (5), (6), (7) примет вид

$$\mathcal{J}(m,K) = \mathrm{E}\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m} n_k^i\right)^2 + \sum_{i=\mathrm{N}+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=\mathrm{N}+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{\mathrm{N}} (\sigma_i)^2 < \varepsilon$$

Последнее неравенство вытекает из условий теоремы. Отсюда следует что

$$\mathrm{E}\int_K \left[f(x) - \hat{f}_m^{\varepsilon}\right]^2 dx = O(\varepsilon)\,,$$

то есть оценка (30) является ε-оптимальной. Доказательство закончено.

Замечание 4 *Из утверждения и доказательства теоремы 5 очевидным образом следует что ε-оптимальная оценка определяемая (30) является смещенной и поэтому не является состоятельной. Однако она является ассимптотически несмещенной когда N→∞.*

Заключение

В статье построены оптимальная и ε-оптимальная оценки квадратично интегрируемой функции, заданной на конечномерном компакте и наблюдаемой с гауссовскими ошибками, а также исследованы некоторые свойства этих оценок.

Список литературы

[1]. *Вапник В.Н., Глазкова Т.Г., Кощеев В.А.* и др. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 816 с.

[2]. *Вапник В.Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 448 с.

[3]. *Дарховский Б.С.* Новый подход к стохастической задаче восстановления // Теория вероятностей и ее применения. – 2004. – Т. 49. – Вып. 1. – С. 36–53.

[4]. *Дарховский Б.С.* О стохастической задаче восстановления // Теория вероятностей и ее применения. – 1998. – Т. 43. – Вып. 2. – С. 357–364.

[5]. *Дарховский Б.С.* Стохастическая задача восстановления функционалов // Проблемы передачи информации. – 2008. – Т. 44. – Вып. 4. – С. 29–41.

[6]. *Ермаков С.М., Бродский В.З., Жиглявский А.А.* и др. Математическая теория планирования эксперимента. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 392 с.

[7]. *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента: учебное пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с.

[8]. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 495 с.

[9]. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. – Изд. 4е, перераб. – 543 с.

[10]. *Легостаева И.Л., Ширяев А.Н.* Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса // Теория вероятностей и ее применения. – 1971. – Т. 16. – Вып. 2. – С. 339–345.

[11]. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 696 с.

[12]. *Стратонович Р.Л.* Оптимальное расширение функционального подпространства в алгоритмах восстановления плотности и функции распределения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1970. – № 2. – С. 37–64.

[13]. *Стратонович Р.Л.* Эффективность методов математической статистики в задачах синтеза алгоритмов восстановления неизвестной функции // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1969. – № 1. – С. 32–46.

[14]. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Советское радио, 1975. – 704 с.

[15]. *Хаметов В.М., Сиверцев О.Н.* Задача восстановления функций // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13, Вып. 2. – С. 354–356.

[16]. *Ченцов Н.Н.* Статистические решающие правила и оптимальные выводы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 520 с.

[17]. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.:Наука, 1980. – 574 с.

[18]. *Darkhovskiy B.* Non asymptotic minimax estimation of functions with noisy observations // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2012. – Vol. 41, № 6. – P. 787–803.

MODELLING OPTIMAL AND ε-OPTIMAL RECOVERY ALGORITHMS OF SQUARE-INTEGRABLE FUNCTION FROM OBSERVATIONS WITH GAUSSIAN ERRORS

Bulgakov S.A, Khametov V.M.

sbulgakov@hse.ru, vmkhametov@hse.ru
National Research University Higher School of Economics

Received 18.12.2019

The aim of the article is to construct a solution for the problem of the optimal recovery (in the mean-square sense) of a measurable square-integrable (with respect to the Lebesgue measure) function defined on a finite-dimensional compact set. We prove optimal recovery procedure and establish conditions of its unbiasedness and consistency. Furthermore, an ε-optimal stochastic recovery procedure is proposed and proved.