УДК 519.254
ББК 2.2.22.172

ВОССТАНОВЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С ГАУССОВСКИМИ ОШИБКАМИ

Булгаков С. А.[1], **Хаметов В. М.**[2]
(*ФГАУВПО «Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“», Москва*)

Статья посвящена построению решения задачи оптимального в среднеквадратическом смысле стохастического восстановления измеримой квадратично интегрируемой отосительно меры Лебега функции, заданной на конечномерном компакте. В ней обосновывается процедура оптимального восстановления, а также условия его несмещенности и состоятельности. Кроме того, предложена и обоснована процедура $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$*-оптимального стохастического восстановления.*

Ключевые слова: ортонормированный базис, стохастическое восстановление функции, несмещенность, состоятельность, оптимальная непараметрическая оценка, ε^{β}-оптимальная оценка.

Введение

Данная статья посвящена решению задачи стохастического восстановления квадратично интегрируемой функции относительно меры Лебега, заданной на конечномерном компакте по наблюдениям за ней с ошибками, которые являются гауссовскими случайными функциями. В ней мы рассматриваем условия существования оптимальной и ε^{β}-оптимальной процедур восстановления по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

---

[1] *Станислав Александрович Булгаков, аспирант,* (*s.a.bulgakov@gmail.com*).
[2] *Владимир Минирович Хаметов, доктор физико-математических наук, профессор,* (*vmkhametov@hse.ru*).

Под задачей стохастического восстановления функции из некоторого класса обычно понимают следующее: имеется возможность наблюдать значение этой функции с ошибками в любой точке области ее определения и требуется оценить (восстановить) ее по результатам наблюдений в соответствии с заданным критерием оптимальности. Следует отметить, что эта задача относится к задачам непараметрического (бесконечномерного) оценивания. Задачам непараметрического оценивания посвящено большое количество работ, например [1–4, 6, 7, 12–16].

Приведем краткий обзор результатов по теории стохастического восстановления функций.

Так, в [1, 2] предложен метод решения задачи восстановления, который основывается на теории поперечников Колмогорова и теореме Гливенко–Кантелли.

В [3, 4] содержится подробный обзор результатов по теории стохастического восстановления. В них для решения этой задачи использован минимаксный подход.

В [5, 18] рассматривается минимаксная постановка задачи стохастического восстановления для нелинейных функционалов, решение которой существенным образом опирается на результаты работы [3]. Важно отметить, что в этих работах содержится большое количество новых точно решаемых примеров. В [10] построены минимаксные оценки коэффициентов полиномиальной регрессии.

В [6, 7] применена теория планирования эксперимента для нахождения решения задачи стохастического восстановления.

В [13, 14, 16] предложены рекурсивные алгоритмы стохастического восстановления неизвестной функции и исследована их эффективность.

В [15] разработан метод построения проекционных оценок для восстановления квадратично интегрируемых плотностей распределения случайных величин.

В отличие от вышеприведенных работ, в этой статье для любой квадратично интегрируемой функции заданной на конечномерном компакте решается задача стохастического восстановления, оптимального в среднеквадратическом смысле. В ней мы устанавливаем условия существования решения этой задачи и приводим явный вид этой непараметрической оценки (теорема 1). Кроме того, здесь впервые устанавливаются условия ее несмещенности (теорема 2) и состоятельности (теорема 3).

Построенные в работе непараметрические оценки квадратично интегрируемых функций сложно реализовать на практике. Поэтому был предложен и обоснован приближенный алгоритм построения таких оценок (теорема 5). Результаты его применения на конкретном примере приведены в разделе 8.

1. Основные определения и обозначения. Постановка задачи стохастического восстановления

Пусть $x \in K$ — конечномерный компакт, $\mathcal{B}(K)$ — борелевская σ-алгебра на K, а $L_2(K)$ — множество измеримых функций $f\colon K \to \mathbb{R}^1$, квадратично интегрируемых относительно меры Лебега Λ на K, т.е. $\int\limits_K f^2(x)dx < \infty$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство на котором задана измеримая функция $n\colon \mathbb{N}^+ \times \Omega \times K \to \mathbb{R}^1$, обозначаемая $n_m(x)$, такая что для любых $x \in K$ и $m \in \mathbb{N}^+$

$$\mathsf{E} n_m(x) = 0, \qquad \mathsf{E} \int\limits_K n_m^2(x)dx = \sigma^2 < \infty, \tag{1}$$

и для любых $x \in K$ и $m \neq q$

$$\mathsf{E} n_m(x) n_q(x) = 0; \tag{2}$$

здесь через $\mathsf{E}(\cdot)$ обозначен интеграл Лебега относительно вероятностной меры P.

Предположим, что в любой точке $x \in K$ мы наблюдаем функцию $y_m(x)$, которая представляет собой сумму функций $f(x) \in L_2(K)$ и $n_m(x)$, т.е. наблюдаем функцию $f(x)$ с аддитивными ошибками $n_m(x)$

$$y_m(x) = f(x) + n_m(x), \tag{3}$$

где $m \in \mathbb{N}^+$ — номер наблюдения.

Поскольку $L_2(K)$ — сепарабельное гильбертово пространство, то в нем существует (вообще говоря неединственная) полная, ортонормированная система функций, которую мы обозначаем через $\{\varphi_i(x)\}_{i\geqslant 0}$, т.е. для любых $i,j \in \mathbb{Z}^+$ функции $\varphi_i(x), \varphi_j(x) \in L_2(K)$ такие, что $\int\limits_K \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij}$, здесь δ_{ij} — символ Кронекера, причем $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\int\limits_K \varphi_i^2(x)dx < \infty$.

Известно [17], что любая $\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(K)$-измеримая функция $g(\omega,x)$ такая что при каждом $\omega\in\Omega$ она принадлежит $L_2(K)$ допускает представление

$$g(\omega,x) = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j^g(\omega)\varphi_j(x),$$

где $\alpha_j^g(\omega) \triangleq \int\limits_K g(\omega,x)\varphi_j(x)dx$ — случайные величины, которые являются коэффициентами Фурье функции $g(\omega,x)\in L_2(K)$ [9]. Обозначим:

$$y_m^i \triangleq \int\limits_K y_m(x)\varphi_i(x)dx, \tag{4}$$

$$\alpha_i \triangleq \int\limits_K f(x)\varphi_i(x)dx, \tag{5}$$

$$n_m^i \triangleq \int\limits_K n_m(x)\varphi_i(x)dx. \tag{6}$$

Из (3)–(6) следует, что для любых i, m выполнено равенство

$$y_m^i = \alpha_i + n_m^i. \tag{7}$$

Отметим, что, в силу условий (1)–(2), для любых $i\geqslant 0$ и $m\geqslant 1$ имеем

$$\alpha_i^2 + \mathsf{E}(n_m^i)^2 < \infty\,,\quad \mathsf{E}(y_m^i)^2 < \infty. \tag{8}$$

Обозначим $\sigma_i^2 \triangleq \mathsf{E}(n_m^i)^2$. Без ограничения общности можно считать, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2 = \sigma^2$.

Очевидно, что для любых $f(x) \in L_2(K)$, $m \in \mathbb{Z}^+$ и $x \in K$ справедливы равенства:

$$f(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x), \tag{9}$$

$$n_m(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} n_m^i \varphi_i(x) - \mathsf{P}\text{-п. н.}, \tag{10}$$

$$y_m(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} y_m^i \varphi_i(x) - \mathsf{P}\text{-п. н.} \tag{11}$$

Обозначим σ-алгебры

$$\mathcal{F}_m^{y^i} \triangleq \sigma\{y_1^i, \ldots, y_m^i\}, \qquad \mathcal{F}_m^y \triangleq \sigma\{y_1^i, \ldots, y_m^i, \forall i \geqslant 0\}.$$

Очевидно, что для любых $m \geqslant 1$ и $x \in K$ случайная функция $y_m(x)$ является $\mathcal{F}_m^y \otimes \mathcal{B}(K)$-измеримой.

Теперь приведем определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Определение 1. *Пусть* $\widehat{f}_m(x)$ *— любая* $\mathcal{F}_m^y \otimes \mathcal{B}(K)$*-измеримая функция, такая что* $\mathsf{E} \int\limits_K \left|\widehat{f}_m(x)\right|^2 dx < \infty$*. Будем называть её оценкой функции* $f(x) \in L_2(K)$*.*

Множество таких оценок обозначим через $\mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$. Очевидно, что $\mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$ — сепарабельное гильбертово пространство.

Задача стохастического восстановления функции $f(x) \in L_2(K)$ состоит в построении оценки $\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$ такой, что

$$\mathsf{E} \int\limits_K \left[f(x) - \widehat{f}_m(x)\right]^2 dx \to \inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})}, \tag{12}$$

— это критерий минимума среднеквадратической ошибки относительно меры $\Lambda \times \mathsf{P}$.

Определим теперь, что мы будем понимать под ε^β-оптимальной и оптимальной оценками.

Определение 2. *Оценку* $\widehat{f}_m^{\varepsilon}(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$ *назовем* *ε^{β}-оптимальной, где* $\varepsilon \in (0,1)$ *— любое,* $1 \geqslant \beta \geqslant 0$*, если*

$$\inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E} \int_K \left[f(x) - \widehat{f}_m(x) \right]^2 dx = \tag{13}$$

$$= \mathsf{E} \int_K \left[f(x) - \widehat{f}_m^{\varepsilon}(x) \right]^2 dx + O(\varepsilon^{\beta}).$$

0-*оптимальную оценку назовем оптимальной.*

Замечание 1. Под $O(\varepsilon^{\beta})$ понимается такая неслучайная функция $\Phi(m,\varepsilon)$ от $m \in \mathbb{Z}^+$ и $\varepsilon \in (0,1)$ со значениями в $\mathbb{R}^1$, у которой для любых $m \in \mathbb{Z}^+$, $\varepsilon \in (0,1)$ существует положительная константа C такая, что $\frac{|\Phi(m,\varepsilon)|}{\varepsilon^{\beta}} \leqslant C < \infty$, где $\beta > 0$.

Целью данной статьи является:

1) нахождение условий, при выполнении которых существуют оптимальные и ε^{β}-оптимальные оценки любой неизвестной функции $f(x) \in L_2(K)$ по наблюдениям за ней с гауссовскими ошибками;

2) исследование статистических свойств построенных оценок.

Замечание 2. Известно [16], что задача оптимального восстановления функции $f(x) \in L_2(K)$ по результатам наблюдения за ней с ошибками (3) является задачей непараметрического оценивания.

2. *Представление оценок функции из* $L_2(K)$ *и критериев* (12), (13)

Поскольку $\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$, то $\Lambda \times \mathsf{P}$-почти всюду она допускает представление

$$\widehat{f}_m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\alpha}_{im} \varphi_i(x), \tag{14}$$

где $\widehat{\alpha}_{im}$ — $\mathcal{F}^{y^i}_m$-измеримая случайная величина, $i \in \mathbb{Z}^+$, которая является коэффициентом Фурье оценки $\widehat{f}_m(x)$, т.е.

$$\widehat{\alpha}_{im} \triangleq \int\limits_K \widehat{f}_m(x)\varphi_i(x)dx. \tag{15}$$

Определение 3 [16]. *Оценка* (14) *функции* $f(x) \in L_2(K)$, *где* $\{\varphi_j(x)\}_{j\geqslant 0}$ *— полная ортонормированная система функций в* $L_2(K)$, *называется проекционной.*

Из (14), следует, что соотношение

$$\mathsf{E}\int\limits_K \left|\widehat{f}_m(x)\right|^2 dx = \mathsf{E}\sum_{i=0}^{\infty}\widehat{\alpha}^2_{im} \tag{16}$$

является обобщением известного равенства Парсеваля [8].

Обозначим $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})$ — множество бесконечномерных случайных векторов $\widehat{\alpha}_m \triangleq (\widehat{\alpha}_{0m}, \widehat{\alpha}_{1m}, \dots)$, таких что $\widehat{\alpha}_{im}$ — $\mathcal{F}^{y^i}_m$-измеримы с $\mathsf{E}\sum\limits_{i=0}^{\infty}|\widehat{\alpha}_{im}|^2 < \infty$. Очевидно, что $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})$ — гильбертово пространство. Из равенства (16) следует утверждение.

Предложение 1. $\mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$ *изоморфно* $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})$.

3. Представление критерия оптимальности (12)

Поскольку система $\{\varphi_i(x)\}_{i\geqslant 0}$ — полная ортонормированная, то из (9), (14) и (16) для любого $m \geqslant 1$ следуют равенства

$$\mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x) - \widehat{f}_m(x)\right]^2 dx = \mathsf{E}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\alpha_i - \widehat{\alpha}_{im}\right]^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\mathsf{E}\left[\alpha_i - \widehat{\alpha}_{im}\right]^2, \tag{17}$$

где $\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$ — некоторая проекционная оценка.

Отсюда, в силу предложения 1, имеем

$$\inf_{\widehat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x) - \widehat{f}_m(x)\right]^2 dx = \inf_{\widehat{\alpha}_m\in\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})}\sum_{i=0}^{\infty}\mathsf{E}\left[\alpha_i - \widehat{\alpha}_{im}\right]^2. \tag{18}$$

Пусть $L_{2m} \triangleq L_2(\Omega, \mathcal{F}_m^{y^i}, \mathsf{P})$ — множество $\mathcal{F}_m^{y^i}$-измеримых квадратично интегрируемых случайных величин. Из (18) следует неравенство

$$\inf_{\widehat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x) - \widehat{f}_m(x)\right]^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=0}^{\infty} \inf_{\widehat{\alpha}_{im}\in L_{2m}} \mathsf{E}\left[\alpha_i - \widehat{\alpha}_{im}\right]^2,$$

Ясно, что оценка $\widehat{\alpha}_{im}^o$ является оптимальной тогда и только тогда, когда

(19) $$\inf_{\widehat{\alpha}_{im}\in L_{2m}} \mathsf{E}\left[\alpha_i - \widehat{\alpha}_{im}\right]^2 = \mathsf{E}\left[\alpha_i - \widehat{\alpha}_{im}^o\right]^2.$$

Таким образом, если существует $\widehat{\alpha}_{im}^o$, то

$$\inf_{\widehat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x) - \widehat{f}_m(x)\right]^2 dx \geqslant \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\alpha_i - \widehat{\alpha}_{im}^o\right]^2.$$

Отсюда, в силу теоремы Фубини и последнего неравенства, имеем

(20)

$$\inf_{\widehat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x) - \widehat{f}_m(x)\right]^2 dx \geqslant \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\alpha_i - \widehat{\alpha}_{im}^o\right]^2 =$$

$$= \inf_{\{\widehat{\alpha}_m\}\in\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E}\sum_{i=0}^{\infty} \left[\alpha_i - \widehat{\alpha}_{im}\right]^2 = \mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x) - \widehat{f}_{im}^o(x)\right]^2 dx,$$

где $\widehat{f}_{im}^o(x) \triangleq \sum\limits_{i=0}^{\infty} \widehat{\alpha}_{im}^o \varphi_i(x)$. Следовательно, доказано следующее утверждение.

Предложение 2. *Для любого $m \geqslant 1$ оптимальная проекционная оценка $\widehat{f}_m^o(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$ существует тогда и только тогда, когда существует $\{\widehat{\alpha}_m^o\} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})$ такая, что*

(21) $$\inf_{\{\widehat{\alpha}\}_{i\geqslant 0}\in\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E}\sum_{i=0}^{\infty} \left[\alpha_i - \widehat{\alpha}_{im}\right]^2 = \mathsf{E}\sum_{i=0}^{\infty} \left[\alpha_i - \widehat{\alpha}_{im}^o\right]^2.$$

Замечание 3. Из утверждения предложения 2 следует, что для существования оптимальной проекционной оценки функции из класса $\mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$ необходимо и достаточно, чтобы существовали оптимальные оценки ее коэффициентов Фурье.

Замечание 4. Обычно неизвестно значение σ_i^2 — дисперсии ошибок n_m^i. В [17] показано, что оценка вида

$$\widehat{\sigma}_{im}^2 \triangleq \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} (y_j^i - \bar{y}_m^i)^2,$$

где $\bar{y}_m^i \triangleq \frac{1}{m} \sum\limits_{l=1}^{m} y_l^i$, является несмещенной оценкой дисперсии ошибок, т.е. $\mathsf{E}\widehat{\sigma}_{im}^2 = \sigma_i^2$.

4. Существование решения задачи оптимального стохастического восстановления функции из $L_2(K)$

В данном разделе мы сформулируем один из основных результатов работы.

Предположение 1. *Пусть для любых $i \geqslant 0$ и $m \geqslant 1$ семейство $\{n_m^i\}_{\substack{i \geqslant 0 \\ m \geqslant 1}}$ образует гауссовскую систему некоррелированных случайных величин с $\mathrm{Law}(n_m^i) = \mathrm{N}(0, \sigma_i^2)$, причем $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sigma_i^2 = \sigma^2 < \infty$ и $\inf\limits_i \sigma_i^2 > 0$.*

Теперь мы можем сформулировать основной результат данного раздела.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in L_2(K)$ и выполнены условия предположения 1. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для почти всех $x \in K$ и $m \geqslant 1$ существует оптимальная проекционная оценка $\widehat{f}_m^o(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$, которая $\Lambda \times \mathsf{P}$-почти всюду допускает представление*

$$\widehat{f}_m^o(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\alpha}_{im}^o \varphi_i(x), \tag{22}$$

причем

$$\widehat{\alpha}^o_{jm} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y^j_k. \tag{23}$$

2)

$$\inf_{\widehat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x)-\widehat{f}_m(x)\right]^2 dx = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j^2 = \frac{\sigma^2}{m}. \tag{24}$$

Доказательство. Установим 1). В силу предложения 2 существует оптимальная проекционная оценка $\widehat{f}^o_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$ такая, что

$$\inf_{\widehat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x)-\widehat{f}_m(x)\right]^2 dx = \mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x)-\widehat{f}^o_m(x)\right]^2 dx. \tag{25}$$

Основным содержанием первого утверждения теоремы является доказательство равенств (23) и (22).

Поэтому рассмотрим $\mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x)-\widehat{f}_m(x)\right]^2 dx$. Из утверждения предложения 2 (см. формулу (21)), имеем

$$\mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x)-\widehat{f}^o_m(x)\right]^2 dx = \sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left|\alpha_j-\widehat{\alpha}^o_{jm}\right|^2. \tag{26}$$

Отсюда следует, что для каждого $j \in \mathbb{Z}^+$ требуется по результатам наблюдений $(y^j_1,\ldots,y^j_m)$ построить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку коэффициента Фурье α_j. Заметим, что в силу (7) распределение случайной величины y^j_m является гауссовским, причем $\mathrm{Law}(y^j_m) = \mathrm{N}(\alpha_j,\sigma_j^2)$. Известно [17], что оптимальная оценка коэффициента Фурье α_j, в силу критерия (21), по результатам наблюдений с ошибками $(y^j_1,\ldots,y^j_m)$, обозначаемая $\widehat{\alpha}^o_{jm}$, совпадает с соответствующей оценкой по критерию максимального правдоподобия. Следовательно

$$\widehat{\alpha}^o_{jm} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y^j_k\,. \tag{27}$$

Умножим левую и правую часть (27) на $\varphi_j(x)$, а затем выполним суммирование по всем j, имеем (22).

Установим 2). Найдем значение $\mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x) - \widehat{f}^o_m(x)\right]^2 dx$, в силу (26), (7) и предложения 1 имеем

$$\mathsf{E}\int\limits_K \left[f(x) - \widehat{f}^o_m(x)\right]^2 dx = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left|\widehat{\alpha}^o_{jm} - \alpha_j\right|^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y^j_k - \alpha_j\right|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} n^j_k\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{m} = \frac{\sigma^2}{m}.$$

Доказательство закончено.

__**Замечание 5.**__ 1) Утверждение теоремы 1 в отличие от соответствующих утверждений работ [3, 12, 13], дает новые достаточные условия существования оптимальной оценки функции из $L_2(K)$ по наблюдениям с гауссовскими ошибками.

2) В силу (11) для любых $i \in \{1, \ldots, m\}$ и почти всех $x \in K$ i-е наблюдение $y_i(x)$ допускает представление

$$y_i(x) = \sum_{l \geqslant 0} y^i_l \varphi_l(x).$$

Поэтому, в силу (22), (23), теоремы Фубини и (11), оптимальная проекционная оценка $\widehat{f}^o_m(x)$ имеет вид

$$\widehat{f}^o_m(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \widehat{\alpha}^o_{lm}\varphi_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y^j_l \varphi_l(x) = \tag{28}$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{\infty} y^j_l \varphi(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j(x).$$

5. Несмещенность оценки $\widehat{f}^o_m(x)$

В этом разделе мы покажем что оценка (22) — несмещенная.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда оценка* (22) — *несмещенная.*

Доказательство. Из (7) и (22) для любых $x \in K$ и $m \geqslant 1$, в силу теоремы Фубини, имеем

$$\mathsf{E}\widehat{f}^o_m(x) = \mathsf{E}\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{\alpha}^o_{jm}\varphi_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x)\mathsf{E}\widehat{\alpha}^o_{jm} = \\ = \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x)\frac{1}{m}\mathsf{E}\sum_{k=1}^{m}y^j_k = \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x)\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(\alpha_j + \mathsf{E}n^j_k) = \\ = \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x)\alpha_j = f(x). \tag{29}$$

Доказательство закончено.

6. Состоятельность оценки $\widehat{f}^o_m(x)$

В данном разделе мы установим достаточные условия состоятельности оценки $\widehat{f}^o_m(x)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и для всех $x \in K$ ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sigma^2_j\varphi^2_j(x) < \infty$. Тогда оценка $\widehat{f}^o_m(x)$ "состоятельна.*

Доказательство. Нам надо установить, что для всех $x \in K$

$$\widehat{f}^o_m(x) \xrightarrow[m\to\infty]{\mathsf{P}} f(x).$$

Достаточно доказать, что дисперсия оценки $\widehat{f}^o_m(x)$ стремится к нулю, когда $m \to \infty$.

Сначала вычислим дисперсию оценки $\widehat{f^o_m}(x)$, обозначаемую $\mathsf{D}\widehat{f^o_m}(x)$. Из (22), в силу теоремы Фубини, (9), (7) и (23), имеем

$$
\begin{aligned}
(30)\quad \mathsf{D}\widehat{f^o_m}(x) &= \mathsf{E}\left[\widehat{f^o_m}(x) - f(x)\right]^2 = \\
&= \mathsf{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left(\widehat{\alpha}^j_m - \alpha_j\right)\varphi_j(x)\right]^2 = \\
&= \mathsf{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y^j_k - \alpha_j\right)\varphi_j(x)\right]^2 = \\
&= \mathsf{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} n^j_k\varphi_j(x)\right]^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty}\varphi^2_j(x)\sigma^2_j.
\end{aligned}
$$

Так как ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\varphi^2_j(x)\sigma^2_j$ сходится, то из (30) следует утверждение теоремы. Доказательство закончено.

7. ε^β-оптимальное стохастическое восстановление функции из $L_2(K)$

В данном разделе опишем и обоснуем метод построения ε^β-оптимальной проекционной оценки неизвестной функции $f(x) \in L_2(K)$, которая будет являться конечномерной.

Сначала приведем достаточное условие ε^β-оптимальности проекционной оценки $\widehat{f^o_m}(x)$ неизвестной функции $f(x) \in L_2(K)$.

Обозначим

$$
(31)\quad L_2 = \left\{ f(\omega, x)\colon K \times \Omega \to \mathbb{R}^1 \colon \mathsf{E}\int\limits_K |f(\omega, x)|^2\,dx < \infty \right\}.
$$

Очевидно, что L_2 — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot\,,\,\cdot)_{L_2}$ и нормой $\|\cdot\|_{L_2}$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть* $\widetilde{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\mathsf{P})$ *некоторая проекционная оценка функции*

$f(x) \in L_2(K)$ *и выполняется условие*

$$\left\| \widehat{f}^o_m - \widetilde{f}_m \right\|^2_{L_2} = O(\varepsilon^{2\beta}),$$

где $\widehat{f}^o_m(x)$ *— оптимальная оценка. Тогда* $\widetilde{f}_m(x)$ *—* ε^β*-оптимальная оценка.*

<u>**Доказательство.**</u> Пусть имеет место равенство

$$\left\| \widetilde{f}_m - \widehat{f}^o_m \right\|_{L_2} = O(\varepsilon^{\beta}). \tag{32}$$

Нужно доказать, что

$$\left\| f - \widetilde{f}_m \right\|^2_{L_2} = \left\| f - \widehat{f}^o_m \right\|^2_{L_2} + O(\varepsilon^{2\beta}). \tag{33}$$

Рассмотрим левую часть (32), имеем неравенство

$$\left\| \widetilde{f}_m - \widehat{f}^o_m - f + f \right\|^2_{L_2} = \left\| \left(f - \widehat{f}^o_m \right) - \left(f - \widetilde{f}_m \right) \right\|^2_{L_2} = \tag{34}$$

$$= \left\| f - \widehat{f}^o_m \right\|^2_{L_2} + \left\| f - \widetilde{f}_m \right\|^2_{L_2} - 2 \cdot \left(f - \widehat{f}^o_m, f - \widetilde{f}_m \right)_{L_2} \geqslant$$

$$\geqslant \left\| f - \widehat{f}^o_m \right\|^2_{L_2} + \left\| f - \widetilde{f}_m \right\|^2_{L_2} - 2 \cdot \left\| f - \widehat{f}^o_m \right\|_{L_2} \cdot \left\| f - \widetilde{f}_m \right\|_{L_2}.$$

Обозначим $g = O(\epsilon^{2\beta})$. Тогда из (34) следует, что

$$g \geqslant \left\| f - \widetilde{f}_m \right\|^2_{L_2} - 2 \cdot \left\| f - \widehat{f}^o_m \right\|_{L_2} \cdot \left\| f - \widetilde{f}_m \right\|_{L_2}. \tag{35}$$

Стало быть

$$\left\| f - \widetilde{f}_m \right\|_{L_2} \leqslant \left\| f - \widehat{f}^o_m \right\|_{L_2} + \sqrt{\left\| f - \widehat{f}^o_m \right\|^2_{L_2} + g}. \tag{36}$$

Из (36) имеем

$$\left\| f - \widetilde{f}_m \right\|^2_{L_2} = \left\| f - \widehat{f}^o_m \right\|^2_{L_2} + O(\varepsilon^{2\beta}).$$

Что и требовалось доказать.

Приводимое ниже утверждение дает достаточные условия существования $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$-оптимальной оценки. Для его формулировки введем обозначения.

Пусть $\{S^\varepsilon_u\}_{u \in \{1,\ldots,N\}}$ — конечное разбиение компакта K, а x_u — точка, которая принадлежит внутренности S^ε_u ($\mathrm{int} S^\varepsilon_u$).

Предположение 2. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $i \in \{1, \dots, m\}$ существуют $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$ и $x_u \in \mathsf{int} S_u^\varepsilon$ такие, что для любого $N \geqslant N(\varepsilon)$ имеет место оценка*

(37)
$$\sum_{u=1}^{N} \left\{ \int\limits_{S_u^\varepsilon} [f(x) - f(x_u)]^2 \, dx + \mathsf{E} \int\limits_{S_u^\varepsilon} [n_i(x) - n_i(x_u)]^2 \, dx \right\} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и предположения 2. Тогда оценка*

$$\widehat{f}_m^\varepsilon(x) \triangleq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{u=1}^{N} y_i(x_u) \mathbf{1}_{S_u^\varepsilon}(x), \tag{38}$$

где $\mathbf{1}_{S_u^\varepsilon}(x) \triangleq \begin{cases} 1 & x \in S_u^\varepsilon, \\ 0 & x \notin S_u^\varepsilon; \end{cases}$ *является $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$-оптимальной.*

Доказательство. Из утверждения теоремы 4 следует, что достаточно доказать

$$I^\varepsilon(m) \triangleq \mathsf{E} \int\limits_K \left| \widehat{f}_m^o(x) - \widehat{f}_m^\varepsilon(x) \right|^2 dx = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}). \tag{39}$$

Рассмотрим левую часть равенства (39). В силу (22), (23) и пункта 2 замечания 5 (см. формулу (28)), имеем

$$I^\varepsilon(m) = \left\| \widehat{f}_m^o - \widehat{f}_m^\varepsilon \right\|^2 =$$
$$= \mathsf{E} \int\limits_K \left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_i(x) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{u=1}^{N} y_i(x_u) \mathbf{1}_{S_u^\varepsilon}(x) \right|^2 dx.$$

Последнее равенство, в силу теоремы Фубини с учетом разбиения $\{S_u^\varepsilon\}$, можно переписать в виде

$$I^\varepsilon(m) = \mathsf{E} \int\limits_K \left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{u=1}^{N} [y_i(x) - y_i(x_u)] \, \mathbf{1}_{S_u^\varepsilon}(x) \right|^2 dx = \tag{40}$$
$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{u=1}^{N} \mathsf{E} \int\limits_{S_u^\varepsilon} \left[y_i(x) - y_i(x_u) \mathbf{1}_{S_u^\varepsilon}(x) \right] \times$$
$$\times \left[y_j(x) - y_j(x_u) \mathbf{1}_{S_u^\varepsilon}(x) \right] dx.$$

(40) с учетом (1), (3) примет вид

$$I^{\varepsilon}(m) = \sum_{u=1}^{N} \int\limits_{S_u^{\varepsilon}} [f(x) - f(x_u)]^2 \, dx +$$
$$+ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{u=1}^{N} \mathsf{E} \int\limits_{S_u^{\varepsilon}} [n_i(x) - n_i(x_u)]^2 \, dx \, .$$

Отсюда, в силу предположения 2 (см. (37)), получаем, что $I^{\varepsilon}(m) = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$. Поэтому утверждение теоремы 5 следует из теоремы 4. Доказательство закончено.

8. Пример восстановления квадратично интегрируемой функции по наблюдениям с гауссовскими ошибками

В качестве примера рассматривается задача восстановления неизвестной числовой функции $f(x) \in L_2([0;1]^2)$, значения которой в каждой точке $x \in [0;1]^2$ наблюдаются с гауссовскими независимыми ошибками $n(x)$, причем закон распределения $n(x)$ – нормальный с нулевым средним и дисперсией σ^2 (не зависящей от точки $x \in [0;1]^2$). Известно, что: 1) $L_2([0;1]^2)$ – сепарабельное гильбертово пространство, и поэтому существует плотное множество $Q \in [0;1]^2$; 2) $f(x)$ и $n_m(x)$ ($m \in \mathbb{N}^+$) непрерывны в $L_2([0;1]^2)$. Поэтому для любой наперед заданной степени точности существует конечное число точек из Q, в которых следует проводить наблюдения. На рис. 1 приведено изображение оцениваемой функции $f(x)$. Очевидно, что она принадлежит $L_2([0;1]^2)$. На рис. 2, в соответствии со сделанным выше замечанием, представлен результат наложения на оцениваемую функцию аддитивного «белого» шума с дисперсией $0{,}0025$ в каждой точке, принадлежащей Q. В соответствии с алгоритмом (38) была построена $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$-оптимальная оценка функции, изображенной на рис. 1. Для случая, когда $m = 256$, на рис. 3 приведено графическое изображение результата применения алгоритма (38). Отметим, что в данном случае эмпирическая дисперсия остатков практически совпадает с результатом, полученным в утверждении пункта 2 теоремы 1 (см. формулу (24)). Последнее указывает на высокую эффективность алгоритма (38).

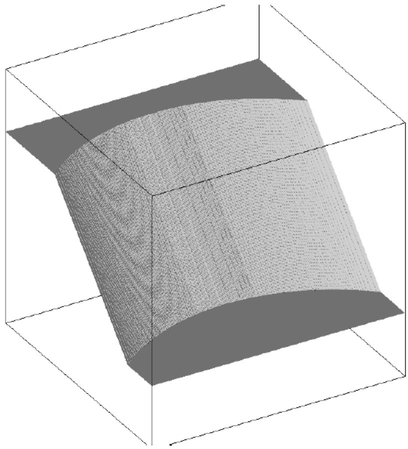

Рис. 1.

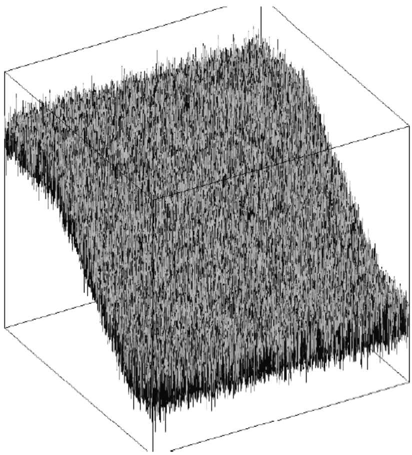

Рис. 2.

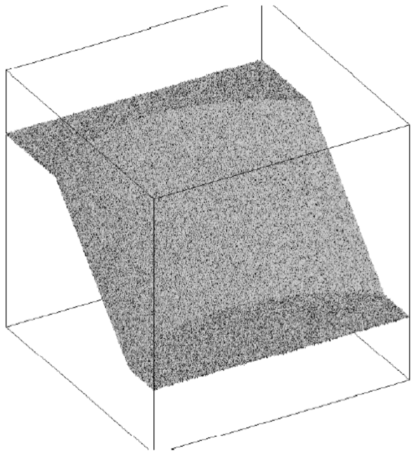

Рис. 3.

Заключение

В статье получены следующие результаты:

1) установлены условия существования и вид (22) бесконечномерной оптимальной проекционной оценки квадратично интегрируемой функции, заданной на конечномерном компакте по наблюдениям с гауссовскими ошибками (теорема 1);

2) установлены условия несмещенности и состоятельности оценки (22) (теоремы 2, 3);

3) предложен новый конечномерный алгоритм (38) $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$-оптимального стохастического восстановления, который допускает простую реализацию на ЭВМ.

Литература

1. ВАПНИК В.Н., ГЛАДКОВА Т.Г., КОЩЕЕВ В.А. И ДР. *Алгоритмы и программы восстановления зависимостей.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 816 с.
2. ВАПНИК В.Н. *Восстановление зависимостей по эмпирическим данным.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 448 с.

3. ДАРХОВСКИЙ Б.С. *Новый подход к стохастической задаче восстановления* // Теория вероятностей и ее применения. – 2004. – Т. 49. – Вып. 1. – С. 36–53.
4. ДАРХОВСКИЙ Б.С. *О стохастической задаче восстановления* // Теория вероятностей и ее применения. – 1998. – Т. 43. – Вып. 2. – С. 357–364.
5. ДАРХОВСКИЙ Б.С. *Стохастическая задача восстановления функционалов* // Проблемы передачи информации. – 2008. – Т. 44. – Вып. 4. – С. 29–41.
6. ЕРМАКОВ С.М., БРОДСКИЙ В.З., ЖИГЛЯВСКИЙ А.А. И ДР. *Математическая теория планирования эксперимента.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 392 с.
7. ЕРМАКОВ С.М., ЖИГЛЯВСКИЙ А.А. *Математическая теория оптимального эксперимента*: учебное пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с.
8. КАШИН Б.С., СААКЯН А.А. *Ортогональные ряды.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 495 с.
9. КОЛМОГОРОВ А.Н., ФОМИН С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. – Изд. 4е, перераб. – 543 с.
10. ЛЕГОСТАЕВА И.Л., ШИРЯЕВ А.Н. *Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса* // Теория вероятностей и ее применения. – 1971. – Т. 16. – Вып. 2. – С. 339–345.
11. ЛИПЦЕР Р.Ш., ШИРЯЕВ А.Н. *Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы).* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 696 с.
12. СТРАТОНОВИЧ Р.Л. *Оптимальное расширение функционального подпространства в алгоритмах восстановления плотности и функции распределения* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1970. – № 2. – С. 37–64.
13. СТРАТОНОВИЧ Р.Л. *Эффективность методов математической статистики в задачах синтеза алгоритмов восстановления неизвестной функции* // Известия АН

СССР. Техническая кибернетика. – 1969. – № 1. – С. 32–46.

14. ТИХОНОВ В.И., КУЛЬМАН Н.К. *Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов.* – М.: Советское радио, 1975. – 704 с.
15. ХАМЕТОВ В.М., СИВЕРЦЕВ О.Н. *Задача восстановления функций* // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13, Вып. 2. – С. 354–356.
16. ЧЕНЦОВ Н.Н. *Статистические решающие правила и оптимальные выводы.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 520 с.
17. ШИРЯЕВ А.Н. *Вероятность.* – М.:Наука, 1980. – 574 с.
18. DARKHOVSKIY B. *Non asymptotic minimax estimation of functions with noisy observations* // Communications in Statistics — Simulation and Computation. – 2012. – Vol. 41, № 6. – P. 787–803.

RECOVERY OF SQUARE-INTEGRABLE FUNCTION FROM OBSERVATIONS WITH GAUSSIAN ERRORS

Stanislav Bulgakov, National Research University Higher School of Economics, Moscow, postgraduate student (s.a.bulgakov@gmail.com).
Vladimir Khametov, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Doctor of Physic and Mathematic Science, Professor (vmkhametov@hse.ru).

Abstract: The aim of the article is to construct a solution for the problem of the optimal recovery (*in the mean-square sense*) *of a measurable square-integrable* (*with respect to the Lebesgue measure*) *function defined on a finite-dimensional compact set. We prove optimal recovery procedure and establish conditions of its unbiasedness and consistency. Furthermore, an $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$-optimal stochastic recovery procedure is proposed and proved.*

Keywords: orthonormal basis, stochastic recovery of function, unbiasedness, consistency, optimal non-parametric estimation, $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$-optimal estimation.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии В.А. Уткиным

Поступила в редакцию 28.08.2014.
Дата опубликования 31.03.2015.