XXVIII Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Заключительный этап

Москва, 2023 год

Решения

9 класс

Задача 1. *Эскроу-счета* *(12 баллов)*

В 2019 году в РФ изменились правила продажи жилой недвижимости. До 1 июля 2019 года основной схемой продажи квартир в строящихся многоквартирных домах было так называемое «долевое строительство»: покупатель платил застройщику, а тот обязывался через некоторое время (в типичном случае срок строительства мог составлять несколько лет) передать клиенту в собственность квартиру в построенном доме. С 1 июля 2019 года по закону покупать квартиры в строящихся многоквартирных домах можно только через «эскроу-счета»: покупатель вносит средства на специальный эскроу-счет строительной компании в банке, а банк разморозит выплату этих средств застройщику только после передачи ключей от квартиры покупателю. В случае необходимости поиска денег для финансирования строительства застройщик теперь должен брать кредит, а гасить этот кредит он может после раскрытия эскроу-счетов.

а) *(3 балла)* В чем, на ваш взгляд, основное преимущество эскроу-счетов перед долевым строительством?

б) *(6 баллов)* В предположении отсутствия внешних экономических шоков нарисуйте на одном графике типичную динамику цены на одну и ту же квартиру как функцию от времени с момента начала строительства до момента его окончания для каждого из двух режимов: для долевого строительства и эскроу-счетов. Опишите ключевые особенности графика и приведите экономическую интуицию, стоящую за этими особенностями.

в) *(3 балла)* Традиционно заметную долю на рынке жилой недвижимости занимали так называемые инвесторы, которые покупали квартиру не для себя, а для последующей перепродажи. Как, на ваш взгляд, может измениться число инвестиционных покупок после перехода на эскроу-счета?

Решение

а) Для покупателей квартир на этапе строительства эскроу-счета позволяют застраховаться от негативных событий, которые могут привести к невозможности застройщика довести строительство дома до конца. Если такое событие все-таки наступит, то банк вернет деньги покупателю. При долевом строительстве покупатель остался бы и без квартиры, и без денег с перспективой провести несколько лет в судебных разбирательствах с непредсказуемым исходом.

б) График может выглядеть примерно так, как изображено на рисунке. По горизонтали отложено время: точка 0 соответствует началу строительства, точка 1 его окончанию. По вертикали отложена стоимость квартиры. Оранжевая линия соответствует случаю долевого строительства, а синяя —эскроу-счетам. В обоих случаях цена квартиры растет по мере ее готовности. После окончания строительства стоимость цены квартиры будет выше в случае эскроу-счетов, поскольку застройщики в этом случае вынуждены пользоваться дорогими банковскими кредитами и, фактически, оплачивают риски, которые раньше ложились на покупателей. На первоначальном этапе, однако, разница в цене была еще выше, так как при долевом строительстве застройщики делали скидку из-за мгновенного получения денег за квартиру. Скорость роста цены выше при долевом строительстве: чем ближе к финальному этапу, тем

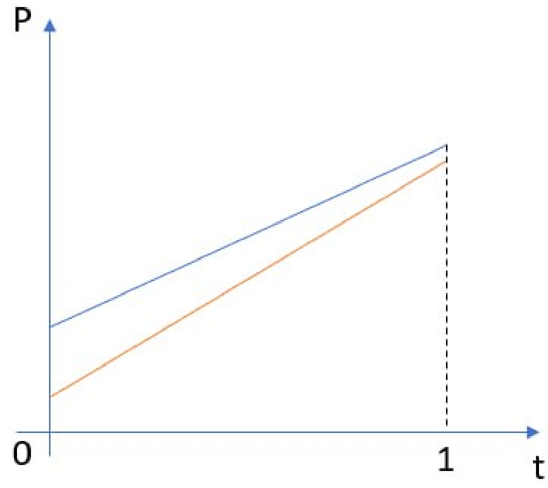

Рис. 1.1: Стоимость квартиры при долевом строительстве и эскроу-счетах

меньше рисков закладывается в цену.

в) Могут иметь место два разнонаправленных эффекта. С одной стороны, инвестиции после введения эскроу-счетов стали менее доходными. Те инвесторы, которые были готовы брать на себя риски в обмен на большой рост стоимости квартиры от начала строительства до его завершения, после введения эскроу-счетов могут отказаться от инвестиционных сделок. С другой стороны, те инвесторы, которым нравятся менее рисковые активы, наоборот, могут начать покупать квартиры. Общий эффект зависит от соотношения численности этих двух групп инвесторов.

Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**.

1. Корректное решение пункта оценивалось в **3 балла**. Важно было указать, что преимущество в виде уменьшенных рисков получали покупатели квартир.

б) Максимальная оценка за пункт — **6 баллов**.

1. Корректное обоснование возрастания цен со временем для обеих схем продажи — **2 балла**.
2. Корректное обоснование того, что стоимость квартиры на любом этапе строительства при режиме эскроу-счетов не ниже, чем при долевом строительстве — **2 балла**.
3. Корректно приведенный эскиз графика — **2 балла**. Если участник олимпиады не объединил на одном графике две зависимости, баллы по этому критерию не начислялись.

в) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**. При наличии подробного обоснования оценивались оба приведенных в решении соображения:

- Количество инвесторов может снизиться из-за снижения доходности инвестирования в недвижимость и ухода инвесторов, любящих риск — **3 балла**.
- Количество инвесторов может вырасти в силу большей привлекательности квартир для не любящих риск инвесторов — **3 балла**.

Задача 2. *Потолок цены и международная торговля* *(12 баллов)*

В мире есть три страны — A, B и C. Внутренние функции спроса и предложения нефти в трех странах имеют следующий вид:

Страна	**A**	**B**	**C**
Спрос	$D_A = 3(120 - P)$	$D_B = 120 - P$	$D_C = 120 - P$
Предложение	$S_A = 0$	$S_B = 2P$	$S_C = P$

На протяжении всей задачи считайте, что нельзя продавать нефть, произведенную в одной стране под видом нефти, произведенной в другой стране.

а) *(2 балла)* Определите равновесную мировую цену при свободной торговле стран, а также то, экспортировать или импортировать нефть будет каждая из стран.

б) *(6 баллов)* Страна A решила ввести потолок цены на импорт нефти из страны B — запретила своим потребителям покупать нефть страны B по цене выше x. При этом цена нефти, произведенной в C и экспортируемой в A, и цена нефти, произведенной в B и экспортируемой в C, определяются свободно. Эти цены могут быть разными. Любой производитель поставляет нефть в ту страну, где цена выше. При безразличии производители нефти из страны B сначала обслуживают внутренних потребителей, потом потребителей из страны C, и в последнюю очередь потребителей из страны A. Информация о том, что делают при безразличии производители страны C, Вам для решения не пригодится. Если в некой стране предлагается нефть по двум разным ценам P_0 и $P_1 > P_0$, и количество нефти по более низкой цене ограничено на уровне Q_0, то сначала потребляется более дешевая нефть, а величина спроса на более дорогую нефть будет равна $\max\{D(P_1) - Q_0; 0\}$, где $D(P)$ — функция спроса в этой стране.

Вам необходимо проанализировать последствия введения потолка для страны A. Определите объем потребления в стране A, Q_A, при $x = 0$, $x = 55$, $x = 65$.

в) *(4 балла)* Допустим, в условиях пункта **б)** страна A также смогла запретить и потребителям из страны C покупать нефть страны B по цене выше x. Остальные условия в силе. Определите объем потребления в стране A, Q_A, при $x = 0$, $x = 55$, $x = 65$.

Решение

а) Приравняем суммарный спрос к суммарному предложению:

$$3(120 - P) + 120 - P + 120 - P = 0 + 2P + P,$$

откуда $P^e = 75$. (Заметим в скобках, что мировой спрос и мировое предложение не будут здесь ломаными, потому что максимальные цены спроса во всех странах одинаковые и минимальные цены предложения во всех странах также одинаковые.)

По цене 75 разница спроса и предложения (дефицит) в стране A равна $3(120-75) - 0 > 0$, значит, страна A будет импортировать нефть. В стране B эта разница равна $(120 - 75) - 2 \cdot 75 < 0$, значит, страна B будет экспортировать нефть. В стране C эта разница равна $(120-75)-75 < 0$, значит, страна C будет также экспортировать нефть.

б) Рассмотрим три указанных значения потолка цены.

- $x = 0$. Производители страны B точно не будут поставлять нефть в страну A. Вместо этого они попытаются переориентироваться на рынок страны C. При этом в стране A будет дефицит, который начнут заполнять производители страны C (больше некому). Спрос в A настолько большой, что производители из C, возможно, полностью переключатся на поставки в A. Попробуем найти равновесие, в котором (1) фирмы из B поставляют нефть на внутренний рынок и в страну C по свободной цене P_{BC}; (2) Фирмы из C поставляют нефть только в A по свободной цене P_{AC}, и не поставляют ничего на внутренний рынок; (3) фирмам из C действительно невыгодно поставлять что-либо на внутренний рынок ($P_{AC} > P_{BC}$).
  В таком равновесии P_{BC} определяется из уравнения $D_B(P_{BC}) + D_C(P_{BC}) = S_B(P_{BC})$, то есть $120 - P_{BC} + 120 - P_{BC} = 2P_{BC}$, откуда $P_{BC} = 60$. При этом P_{AC} определяется из уравнения $D_A(P_{AC}) = S_C(P_{AC})$, то есть $3(120 - P_{AC}) = P_{AC}$, откуда $P_{AC} = 90$. Поскольку $90 > 60$, фирмам из C действительно невыгодно поставлять что-либо на внутренний рынок. В итоге объем потребления в A составит $3(120 - P_{AC}) = 3(120 - 90) = 90$.
- $x = 55$. Заметим, что равновесие, найденное для $x = 0$ останется в силе, так как $x = 55 < P_{BC} = 60$. Производителям из B будет невыгодно поставлять что-либо в A при $x = 55$. Поэтому $Q_A = 90$ по-прежнему.
- $x = 65$. При данном потолке равновесие, найденное выше для $x = 0$ и $x = 55$, разрушится, потому что фирмам из B начнет быть выгодным поставлять нефть в A, а не в B и C: $x = 65 > 60 = P_{BC}$, и в B и C останется неудовлетворенный спрос. Конкуренция потребителей в B и в C с потребителям из A за нефть из B приведет к тому, что в B и в C нефть начнет поставляться тоже по цене, равной потолку $x = 65$ (потребителям в C и в B платить что-то сверх $x = 65$ нет смысла, потому что при безразличии фирмы из B поставляют нефть в B и в C раньше, чем в A). Предполагая, что производители из C поставляют все, как и раньше, только в A, и соответственно весь спрос в C удовлетворяют производители из B, в для страны A останется $S_B(65) - D_B(65) - D_C(65) = 2 \cdot 65 - 2(120 - 65) = 20$ единиц нефти по цене 65. Спрос в A при этом по цене 65, конечно, больше: $3(120 - 65) = 3 \cdot 55 > 20$. Этот дефицит начнут восполнять, как и выше, производители страны C, но не по цене x, а дороже. После того, как потребители из A потребят 20 дешевых единиц нефти, спрос в A на дорогую нефть из C будет равен $\max\{D_A(P) - 20; 0\}$. Значит, равновесная цена поставки нефти из C в A будет теперь определяться из уравнения
$$D_A(P_{AC}) - 20 = S_C(P_{AC})$$
$$3(120 - P_{AC}) - 20 = P_{AC}$$
$$P_{AC} = 85.$$
  Проверим, что по этой цене производителям из C действительно невыгодно ничего поставлять на внутренний рынок: $P_{AC} = 85 > 65 = x$. Значит, найденная конфигурация действительно совместима со стимулами фирм, и $Q_A = 3(120 - P_{AC}) - 20 + 20 = 3(120 - 85) = 105$.

в) Опять рассмотрим те же три потолка.

- $x = 0$. Производители из страны B будут поставлять нефть только на внутренний рынок, так как экспортировать в любую страну можно только по цене 0. Поэтому объем потребления в A будет определяться из равновесия в системе A-C:

$$D_A(P_{AC}) + D_C(P_{AC}) = S_C(P_{AC})$$

$$3(120 - P_{AC}) + 120 - P_{AC} = P_{AC}$$

$$P_{AC} = 96.$$

$$Q_A = D_A(96) = 3(120 - 96) = 72.$$

  При этом потребители страны B не будут пытаться купить нефть за рубежом, потому что внутренняя цена в B, P_B, будет определяться из уравнения $120 - P_B = 2P_B$ и равняться $P_B = 40 < 96$. Значит, найденная конфигурация действительно является равновесной.
- $x = 55$. Выясним, останется ли в силе ответ для $x = 55$, найденный в б). Теперь производители из страны B будут готовы поставлять в страну C только $S_B(55) - D_B(55) = 2 \cdot 55 - (120 - 55) = 45$ единиц, что меньше, чем спрос в C: $D_c(55) = 65 > 45$. Попытаются ли производители из C заполнить дефицит в C своей нефтью? Они готовы делать это только по цене не ниже $P_{AC} = 90$, найденной в B, но если они предложат нефть по 90 в C, после того как дешевые первые 45 единиц нефти из B будут потреблены, в C останется спрос $D_C(P) - 45 = 75 - P$. Поскольку максимальная цена оставшегося спроса равна $75 < 90$, производители из C не будут поставлять нефть на внутренний рынок, поставляя все в A, а количество в A будет таким же, как в б).
- $x = 65$. Заметим, что в б) фирмы из B и так поставляют нефть в C по цене не выше $x = 65$ (а именно, по цене 65), так что ничего не изменится по сравнению с пунктом б).

Общее решение: интересно решить задачу для любого $x \geqslant 0$. Следуя логике, описанной в решении, легко видеть, что для пункта б) ответ будет таким же, как для $x = 0$, при всех $x \leqslant 60$. При $x > 75 = P^e$ ответ будет равен равновесному Q_A для пункта а), потому что потолок будет выше равновесной цены при свободной торговле и ни на что не повлияет. А при $x \in (60; 75)$ равновесие будет иметь такую же структуру, как для $x = 65$: в стране A будет потребляться некоторое количество дешевой нефти по цене x из страны B и некоторое количество дорогой нефти из C. Количество дешевой нефти будет равно $Q_0 = S_B(x) - D_B(x) - D_C(x) = 2x - 2(120 - x) = 4x - 240$. Цена более дорогой нефти будет определяться из уравнения

$$D_A(P_{AC}) - Q_0 = S_C(P_{AC})$$

$$3(120 - P_{AC}) - (4x - 240) = P_{AC},$$

откуда $P_{AC} = 150 - x$. Значит, $Q_{AC} = 3(120 - P_{AC}) - Q_0 + Q_0 = 3(120 - 150 + x) = 3x - 90$. В итоге получаем, что в условиях пункта б) (когда потолок действует только для потребителей из А), объем потребления в А как функция от x имеет вид

$$Q_A(x) = \begin{cases} 90, & x < 60; \\ 3x - 90, & 60 \leqslant x < 75; \\ 135, & 75 \leqslant x. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис.: Теперь решим в общем виде пункт в). Ясно,

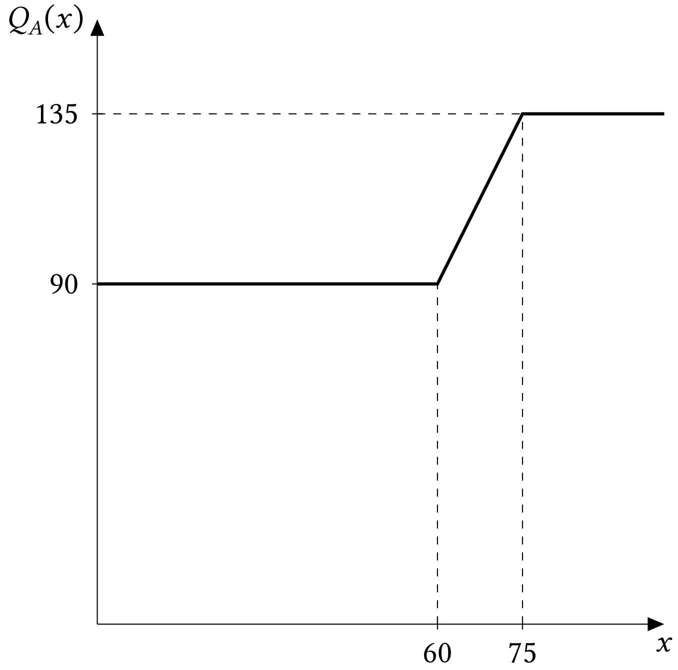

Рис. 2.1: Общее решение пункта б).

что решение будет тем же, что и для $x = 0$ при $x \leqslant P_B^e$, где P_B^e — равновесная цена в В. Действительно, при столь маленьких значениях x производители В будут поставлять нефть только на внутренний рынок, и объем в А будет равен 72, как и при $x = 0$. С другой стороны, при $x \geqslant 60$ ответ будет тем же, что и в б), потому что в б) цена поставки нефти в С сама по себе будет не больше x, и введение потолка x для потребителей из С ни на что не повлияет.

Самое сложное — понять, что будет при $x \in (40{,}60)$. Выше мы увидели, что при $x = 55$ равновесие будет таким же, как и в. б), так как производители из С не захотят поставлять на внутренний рынок. Однако при меньших x это может быть не так. Действительно, при потолке x производители из В будут готовы поставлять в С $S_B(x) - D_B(x) = 2x - (120 - x) = 3x - 120$ единиц продукции. Спрос на потенциальные поставки более дорогой нефти от производителей С по цене P, остающийся после покупок дешевой нефти из В, будет равен

$$D_C(P_{AC}) - (3x - 120) = 240 - 3x - P.$$

Максимальная цена остаточного спроса равна $(240 - 3x)$. Если эта цена не больше, чем равновесная цена поставок из С в А $P_{AC} = 90$, то производители из С не будут ничего поставлять на внутренний рынок, и равновесие будет тем же, что и в B. Это происходит при $240 - 3x \leqslant 90$, то есть $x \geqslant 50$.

А при $x < 50$ максимальная цена остаточного спроса в C $240 - 3x$ будет больше 90, что значит, что производители из C обратят свое внимание и на внутренний рынок. Сколько они будут поставлять на внутренний рынок и по какой цене? Поскольку остаточный спрос в C равен $240 - 3x - P$, цена P, по которой производители из C будут продавать нефть в A и домой, будет определяться из уравнения

$$240 - 3x - P + D_A(P) = S_C(P)$$

$$240 - 3x - P + 3(120 - P) = P$$

$$P = 120 - 0{,}6x.$$

Отсюда $D_A(P) = 3(120 - 120 + 0{,}6x) = 1{,}8x$. Сводя все воедино, получаем, что в пункте в)

$$Q_A(x) = \begin{cases} 72, & x < 40; \\ 1{,}8x, & 40 \leqslant x < 50; \\ 90, & 50 \leqslant x < 60; \\ 3x - 90, & 60 \leqslant x < 75; \\ 135, & 75 \leqslant x. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис.:

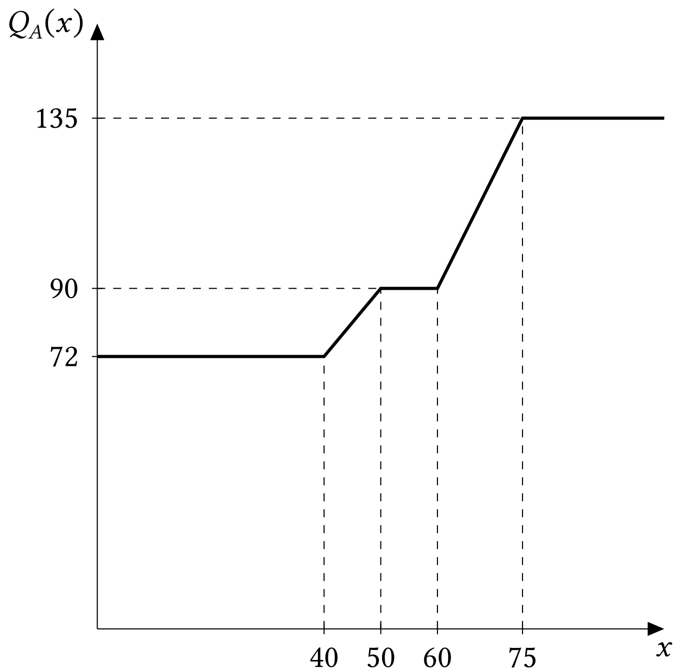

Рис. 2.2: Общее решение пункта в).

Примечание 1: мы видим, что для $x < 50$ страна A потребляет строго меньше в пункте в), чем в пункте б). Таким образом, в в) страдает страна A, хотя ограничения вводятся не для страны A, а для для страны C. Подумайте, какая цепочка экономических взаимосвязей приводит к этому.

Примечание 2: если бы нефть из A можно было бы продавать под видом нефти из C, потолок бы не подействовал. Рынок остался бы в первоначальном равновесии пункта а), просто с использованием «переклеенной этикетки».

Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — **2 балла**.

1. Равновесная цена: $P^e = 75$ — **1 балл**.
2. Корректно определенные потоки товаров: A - импортер, B, C - экспортеры — **1 балл**.

б) Максимальная оценка за пункт — **6 баллов**.

1. Корректный анализ случая $x = 0$ — **2 балла**, из которых:
   - Равновесная цена: $P_{BC} = 60$ — **1 балл**.
   - Равновесное количество: $Q_A = 90$ — **1 балл**.
2. Корректный анализ случая $x = 55$ (получение значения $Q_A = 90$) — **1 балл**.
3. Корректный анализ случая $x = 65$ — **3 балла**, из которых:
   - Поставки страны B по цене 65 в объеме 20 — **1 балл**.
   - Равновесная цена: $P_{AC} = 85$ — **1 балл**.
   - Равновесное количество: $Q_A = 105$ — **1 балл**.

в) Максимальная оценка за пункт — **4 балла**.

1. Корректный анализ случая $x = 0$ (получение значения $Q_A = 72$) — **1 балл**
2. Корректный анализ случая $x = 55$ (получение значения $Q_A = 90$) — **2 балла**, из которых **1 балл** за ответ и **1 балл** за обоснование.
3. Корректный анализ случая $x = 65$ (получение значения $Q_A = 105$) — **1 балл**.

Задача 3. *ChatGPT и экономика* *(12 баллов)*

Развитие систем искусственного интеллекта может оказывать большие эффекты на самые разные аспекты экономики. Недавнее появление чат-бота ChatGPT, который использует обработку естественного языка для общения с людьми в режиме диалога, — яркий тому пример. Обученный на большом объеме информации в интернете, он может отвечать на вопрос пользователя, например, объяснять сложные вещи простыми словами, рекомендовать, что можно приготовить из имеющихся продуктов, генерировать идеи для праздника, писать код, тексты и шаблоны писем, делать резюме и рефераты и даже переводить и исправлять ошибки. Другими словами, модель может выступать в виде помощника-собеседника, к которому можно обратиться практически по любому вопросу. Конечно, ответы являются сгенерированными и могут быть не совсем верными, как, впрочем, и любые советы, данные живым собеседником. Много компаний стало заявлять о запуске своих чат-ботов, подобных ChatGPT или использующих его.

В данной задаче мы предлагаем вам выступить в роли эксперта-экономиста, который сможет прокомментировать, как появление и дальнейшее развитие чат-ботов типа ChatGPT может повлиять на разные области экономики. Ваш ответ на каждый пункт ниже должен содержать экономические рассуждения, основанные на известных вам экономических взаимосвязях.

а) *(8 баллов)* Назовите по одной сфере деятельности с разными эффектами на спрос на труд от появления чат-ботов — положительным, отрицательным и нулевым. Для каждой из трех сфер:

- Обоснуйте, почему в данной сфере эффект на спрос на труд именно такой.
- Опишите, как, скорее всего, изменится предложение труда, и в какую сторону в результате изменятся заработная плата и занятость в данной сфере в результате появления чат-ботов.

б) *(4 балла)* Приведите по одному примеру рынков, на которых в результате появления чат-ботов снизится и увеличится конкуренция. Объясните, почему эффект именно такой.

Решение

а) Нужно привести пример трех разных сфер с разным видом воздействия. В условии задачи даны примеры, когда чат-бот может помочь. В основном это сферы, связанные с работой с текстами (в широком понимании, включая офисную работу, программирование) и общением с собеседниками. Примером сферы, на которую повлияли чат-боты, может быть любая, где есть такие аспекты.

В качестве примера сферы с отрицательным общим эффектом хорошо подойдет любая сфера с низкоквалифицированной работой, например, колл-центры, продавцы-консультанты, офис-менеджеры, ресепшн и т.д.

- **Спрос на труд.** Организациям выгодно заменить таких работников на чат-бота или значительно сократить их количество ввиду меньших издержек на поддержание бота. Эту тенденцию мы видим уже сейчас (в большинство служб поддержки можно пробиться только через робота-автоответчика). При развитии чат-ботов больше клиентов могут останавливаться на этапе разговора с ботом, тем самым не требуя общения с оператором. Кроме того, возможно к операторам будут предъявляться дополнительные требования, требующие более высокой квалификации. Таким образом спрос на традиционных операторов и консультантов снизится. Кривая спроса сдвинется влево вниз.

- **Общий эффект на занятость и зарплату.** Засчитываются несколько вариантов ответа. Если смотреть только на эту область, то эффекта на предложение труда не ожидаем — общий эффект приведет к движению по кривой предложения — то есть к падению заработной платы и занятости. В то же время, люди, оставшиеся без работы в других областях (например, офис-менеджеры, если мы говорим про колл-центр), будут искать работу в других сферах, в том числе и этой, и увеличат предложение труда. В данном случае понятен эффект на зарплату — она будет снижаться, а эффект на занятость не однозначен.

В виде положительного общего эффекта хорошо подойдут сферы с высококвалифицированным трудом, которые выиграют от появления таких помощников. Это могут быть программисты, имеющие необходимость поиска информации в интернете по работе определенных пакетов и функций, или работники среднего и высшего звена, часть работы которых составляет рутина, связанная с текстами, которую могут заменить помощники.

- **Спрос на труд.** Высвобождение неэффективного рабочего времени скажется на росте производительности. В виду того, что спрос на труд определяется производительностью — это приведет к росту спроса на труд (кривая спроса сдвинется влево вверх)
- **Общий эффект на занятость и зарплату.** В целом эффект на предложение труда можно не ожидать (высококвалифицированные работники резко не переобучаются), поэтому можно ждать движения вверх по кривой предложения — то есть к росту заработной платы и занятости. Можно было писать про долгосрочный эффект с переобучением. В случае четкого обоснования ответ засчитывался.

В виде нулевого эффекта можно отметить отрасли, не связанные с работой с текстом, поиском информации и общением. Например, низкоквалифицированный труд в виде работы дворников никак не будет воздействован.

- **Спрос на труд.** Эффекта на спрос нет.
- **Общий эффект на занятость и зарплату.** Ввиду первого пункта и освобождение большого числа низкоквалифицированной рабочей силы из отраслей, воздействованных внедрением чат-ботов, можно ожидать роста предложения, поэтому движение будет идти по кривой спроса вправо вниз. Занятость будет расти и зарплата — падать. Предположение о неизменности предложения также засчитывалось.

б) Могут быть приведены разные разумные аргументы, основанные на экономических принципах. В случае приведения в пример рынка товаров или услуг:

Аргумент в пользу роста конкуренции:

• Снижение барьеров на вход. Если раньше нужно было нанимать много консультантов на горячей линии и менеджеров, то теперь можно стартовать с чат-бота.

Аргумент в пользу снижения конкуренции:

• Рост барьеров на вход. Разработка чат-ботов требует большой вычислительной мощности и может получиться так, что на рынке разработчиков чат-ботов может возникнуть большая концентрация из-за малого числа игроков

В случае приведения в пример рынка труда:

Необходимо было четко сформулировать, рассматривались ли рабочие места или рабочая сила. В зависимости от рассматриваемого изменения и переменной конкуренция за рабочие места могла вырасти (в случае неизменного предложения и падения спроса) или упасть (в случае неизменного предложения и роста спроса)

Схема проверки

а) По 1 баллу за пример сферы деятельности.

В случае примера положительного или отрицательного эффекта по 1 баллу ставилось за обоснование эффекта.

1 балл ставился в каждом случае за описание изменения предложения, занятости и заработной платы.

В случае, если предполагали изменение предложения, но его не обосновывали — 0 баллов за общий эффект. В случае, если забывали хотя бы про один элемент (предложение, занятость, заработная плата) — 0 баллов за общий эффект.

Ответ без обоснования или апелляция к неэкономическим аргументам оценивается в 0 баллов.

б) 2 балла за один пример в сторону снижения конкуренции и 2 балла за один пример в сторону роста конкуренции.

Засчитывались и другие примеры (помимо указанных в решении выше), однако было необходимо четко определить рынок и конкуренцию на нем.

Задача 4. *О пользе самоограничения* *(12 баллов)*

На рынке пряжи для вязания конкурируют две обладающие всей полнотой информации фирмы: лидер «Анна» и последователь «Белла». Взаимодействие между фирмами устроено следующим образом:

1) лидер выбирает объем производимой им продукции q_A;

2) наблюдая значение q_A, последователь выбирает объем производимой им продукции q_B;

3) на рынке устанавливается цена по правилу $p = 2 - q_A - q_B$, фирмы продают произведенную продукцию и получают соответствующую прибыль, после этого ничего не происходит.

Общие издержки каждой фирмы на производство q единиц пряжи равны q. При безразличии между несколькими объемами производимой продукции любая фирма выбирает наименьший из них.

а) *(2 балла)* Найдите объемы q_A и q_B, которые выберут фирмы.

б) *(8 баллов)* Предположим, что до начала взаимодействия последователь может ограничить свои производственные мощности. А именно, фирма «Белла» может необратимо закрыть заводы или повредить станки так, что физически не сможет производить больше C единиц продукции. С учетом этой возможности взаимодействие агентов меняется следующим образом:

1) последователь выбирает $C \geqslant 0$ — свой максимально возможный объем производства;

2) лидер, наблюдая C, выбирает объем производимой им продукции q_A;

3) последователь, наблюдая q_A, выбирает объем производимой им продукции q_B, так что q_B не превосходит C;

4) на рынке устанавливается цена $p = 2 - q_A - q_B$, фирмы получают прибыль, взаимодействие заканчивается.

Определите, какие значения C, q_A и q_B будут выбраны. Найдите прибыль последователя и сравните ее с его прибылью в пункте **а)**.

в) *(1 балл)* Если вы решили пункт **б)** верно, у вас получилось, что прибыль последователя выросла по сравнению с пунктом **а)**. Опишите на качественном уровне механизм того, почему прибыль последователя выросла в результате его самоограничения.

г) *(1 балл)* Пусть $C^\star$ — значение C, найденное вами в пункте **б)**. Какие объемы будут выбраны, если вместо того, чтобы реально ограничивать свои производственные мощности, фирма «Белла» на первом шаге лишь сообщит «Анне», что не собирается производить больше $C^\star$ единиц продукции?

Решение

а) Решим игру между лидером и последователем с конца. Воспринимая q_A как заданную величину, последователь решает задачу

$$\pi_B = pq_B - q_B = (2 - q_A - q_B)q_B - q_B = (1 - q_A)q_B - q_B^2 \to \max$$

Прибыль последователя — парабола ветвями вниз относительно q_B при фиксированном q_A, а потому ее максимум лежит в вершине: $q_B = \frac{1-q_A}{2}$. Каким бы ни было значение q_A, выбранное лидером, данный выбор q_B является оптимальной стратегией последователя. Зная это, лидер решает задачу

$$\pi_A = pq_A - q_A = (2 - q_A - q_B)q_A - q_A = \frac{q_A - q_A^2}{2} \to \max$$

Прибыль лидера — парабола ветвями вниз относительно q_A, а потому ее максимум лежит в вершине: $q_A = \frac{1}{2}$. Оптимальный выпуск последователя в таком случае будет равен $q_B = \frac{1}{4}$.

б) Опять станем решать игру с конца. Раньше, когда последователь не обязывался ограничивать свой объем производства, его оптимальный выпуск в зависимости от q_A был равен $q_B = \frac{1-q_A}{2}$. Однако теперь он ограничен значением C. Стало быть, если $\frac{1-q_A}{2} \geq C$, то выпуск последователя будет равен C. Иными словами

$$q_B = \begin{cases} C, & C \leq \frac{1-q_A}{2} \\ \frac{1-q_A}{2}, & C \geq \frac{1-q_A}{2} \end{cases} \Rightarrow q_B = \begin{cases} C, & q_A \leq 1-2C \\ \frac{1-q_A}{2}, & q_A \geq 1-2C \end{cases}$$

Это верно в силу монотонного возрастания параболы ветвями вниз до ее глобального максимума, находящегося в вершине, и ее монотонного убывания сразу после: условный глобальный максимум параболы в рассматриваемом случае лежит в правом ограничении ее возрастающего участка, коль скоро правое ограничение меньше значения в вершине параболы. В свою очередь, лидер понимает, как изменилась оптимальная реакция последователя, и учитывает это в своей функции прибыли:

$$\pi_A = (1 - q_B)q_A - q_A^2 = \begin{cases} (1-C)q_A - q_A^2, & q_A \leq 1-2C \\ \frac{q_A - q_A^2}{2}, & q_A \geq 1-2C \end{cases} \to max$$

При этом, в своем решении относительно оптимального выбора q_A лидер воспринимает C как заданную величину. Рассмотрим теперь несколько случаев.

Первый случай: $1 - 2C \leq 0$ или, эквивалентно, $C \geq \frac{1}{2}$. В таком случае оптимизационная задача лидера выглядит просто как

$$\pi_A = \frac{q_A - q_A^2}{2} \to max$$

Мы уже знаем ее решение из первого пункта: $q_A = \frac{1}{2}$. В таком случае, что несложно видеть, $q_B = \frac{1}{4}$, и мы имеем равновесие без ограничений. Заметим, кстати, что в таком случае $p = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, $\pi_A = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ и $\pi_B = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ — это понадобится нам чуть позже.

Второй случай: $1 - 2C \geq 0$ или, эквивалентно, $C \leq \frac{1}{2}$. В таком случае функция прибыли лидера состоит из двух участков, а потому мы разобьем этот сценарий еще на два подслучая.

Первый подслучай: $q_A \le 1-2C$. Тогда имеем, что задача лидера имеет вид

$$\pi_A = (1-C)q_A - q_A^2 \to max$$

Это все еще парабола ветвями вниз, ее максимум лежит в вершине, если она доступна: $q_A = \frac{1-C}{2}$; или в правом ограничении возрастающего участка, если вершина оказалась недоступна: $q_A = 1-2C$. Значит, если правое ограничение на значение q_A меньше аргумента вершины параболы, мы должны взять в качестве оптимального значения правое ограничение, иначе — аргумент вершины:

$$q_A = \begin{cases} \frac{1-C}{2}, & 1-2C \ge \frac{1-C}{2} \\ 1-2C, & 1-2C \le \frac{1-C}{2} \end{cases} \Rightarrow q_A = \begin{cases} \frac{1-C}{2}, & C \le \frac{1}{3} \\ 1-2C, & C \ge \frac{1}{3} \end{cases}$$

Заметим, что если вершина параболы, лежащая в точке $q_A = \frac{1-C}{2}$ нам доступна, то она приносит большую прибыль, нежели точка $q_A = 1-2C$, соответствующая правому ограничению (если, конечно, они не совпадают) — этот факт также пригодится нам позднее.

Второй подслучай: $q_A \ge 1-2C$. В таком случае лидер решает задачу

$$\pi_A = \frac{q_A - q_A^2}{2} \to max$$

И оптимальным ее решением, симметрично первому подслучаю, является вершина параболы ветвями вниз (если она нам доступна) или левое ограничение на значение q_A (если оно больше значения вершины параболы):

$$q_A = \begin{cases} 1-2C, & \frac{1}{2} \le 1-2C \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \ge 1-2C \end{cases} \Rightarrow q_A = \begin{cases} 1-2C, & C \le \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}, & C \ge \frac{1}{4} \end{cases}$$

Опять же, заметим, что если вершина параболы, лежащая в точке $q_A = \frac{1}{2}$ нам доступна, то она приносит большую прибыль, нежели точка $q_A = 1-2C$, соответствующая левому ограничению (если, конечно, они не совпадают).

Найдем теперь оптимальное значение q_A в зависимости от C в обоих подслучаях. При $C \le \frac{1}{4}$ на первом участке функции прибыли лидера мы получаем оптимальное значение $q_A = \frac{1-C}{2}$, а на втором — $q_A = 1-2C$. Пользуясь упомянутым выше замечанием, заключаем, что точка $q_A = \frac{1-C}{2}$ приносит лидеру большую прибыль. При $C \ge \frac{1}{3}$ есть два кандидата на оптимальную точку: $q_A = 1-2C$ с первого участка и $q_A = \frac{1}{2}$ со второго. Аналогично, из двух данных объем производства $q_A = \frac{1}{2}$ приносит лидеру большую прибыль. Наконец, если $\frac{1}{4} < C < \frac{1}{3}$, то два кандидата на оптимальную точку — $q_A = \frac{1-C}{2}$ из первого подслучая и $q_A = \frac{1}{2}$ из второго. Для того, чтобы понять, какой из этих двух вариантов более оптимален при различных значениях C, нужно сравнить прибыли в этих точках.

При $q_A = \frac{1-C}{2}$ мы знаем, что

$$\pi_A = (1-C)q_A - q_A^2 = \frac{(1-C)^2}{4}$$

А при $q_A = \frac{1}{2}$ нам известно, что

$$\pi_A = \frac{q_A - q_A^2}{2} = \frac{1}{8}$$

Стало быть, мы будем предпочитать первый объем производства второму при

$$\frac{(1-C)^2}{4} \geq \frac{1}{8} \Rightarrow C \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $0 \leq C \leq \frac{1}{2}$ при взятии квадратного корня. Заметим, что $\frac{1}{4} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{3}$, а значит мы не вышли за пределы ограничений на C, в рамках которых проводили сравнение. Отсюда, при $\frac{1}{4} \leq C \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ лидер будет производить $q_A = \frac{1-C}{2}$ единиц пряжи для вязания, а при $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < C \leq \frac{1}{3} - q_A = \frac{1}{2}$ (при $C = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ фирма безразлична между двумя объемами производства, а потому выбирает меньший из них). Объединяя теперь все рассмотренные случаи получаем:

$$q_A = \begin{cases} \frac{1-C}{2}, & C \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}, & C > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Наконец, переходя к первому этапу взаимодействия, последователь осознает, какое количество продукции будет произведено лидером, а также знает свою реакцию на последнем этапе:

$$q_B = \begin{cases} C, & q_A \leq 1 - 2C \\ \frac{1-q_A}{2}, & q_A \geq 1 - 2C \end{cases} \Rightarrow q_B = \begin{cases} C, & C \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4}, & C > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Учитывая эту информацию, его прибыль в зависимости от значения C записывается как

$$\pi_B = (1-q_A)q_B - q_B^2 = \begin{cases} \frac{C-C^2}{2}, & C \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{16}, & C > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Заметим, что $\frac{C-C^2}{2}$ — парабола ветвями вниз относительно C с максимумом в вершине: $C = \frac{1}{2}$. Однако, $\frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, а потому оптимум на первом участке функции прибыли последователя наступает при $C = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. В таком случае $\pi_B = \frac{C-C^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$

$\frac{\sqrt{2}-1}{4} > \frac{1}{16}$. Стало быть, максимум всей функции прибыли фирмы-последователя достигается при $C = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, которому соответствует $q_B = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Что касается фирмы-лидера, получаем, что $q_A = \frac{1-C}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, а получаемая ей прибыль оказывается равна $\pi_A = (1-C)q_A - q_A^2 = \frac{(1-C)^2}{4} = \frac{1}{8}$ — как и было раньше. Резюмируя вышесказанное, в новом равновесии $q_A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $q_B = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $C = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Прибыль последователя, как уже упоминалось выше, выросла с $\frac{1}{16}$ до $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ в результате самоограничения.

в) В результате смены формата взаимодействия между агентами, значение q_A уменьшилось с $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, а значение q_B выросло с $\frac{1}{4}$ до $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Вместе с этим, прибыль лидера не изменилась и оказалась равной $\frac{1}{8}$, а прибыль последователя выросла с $\frac{1}{16}$ до $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$. Удивительным образом оказалось, что самоограничение последователя привело к Парето-улучшению ситуации для двух конкурентов. Почему же так произошло?

В данной задаче мы смогли пронаблюдать действие того, что в экономической литературе называется связывающим обязательством (*commitment device*). Последователь публично заявил (и, самое главное, доказательно сдержал свое обещание) об ограничении объема производимой им продукции, что, при прочих равных, усилило стимулы лидера к производству меньших объемов товара для снижения собственных издержек и увеличения выручки за счет роста цены на продукт (в итоге она выросла с $\frac{5}{4}$ до $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$). Понимание данного механизма, подразумевающего, при прочих равных, более высокую рыночную цену и меньший объем продукции, производимый лидером, дало последователю толчок к выбору даже большего потолка продукции, чем его исходный объем производства ($1 - \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{4}$). Тем самым, в ситуации повышенной цены и пониженного объема производства конкурента последователь оказался в выигрыше в результате самоограничения.

г) Фирма-лидер в таком случае понимает, что ограничение не является сдерживающим для последователя, а потому при заданном q_A фирма-последователь произведет $q_B = \frac{1-q_A}{2}$ единиц продукции (как вершину своей квадратичной функции прибыли). Из пункта **а)** мы знаем, что тогда лидер выберет $q_A = \frac{1}{2}$, а последователь будет производить $q_B = \frac{1}{4}$ единиц пряжи для вязания.

Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — **2 балла**.

1. Корректная запись функций прибыли лидера и последователя — **1 балл**.
2. Корректный подсчет оптимальных объемов производства для лидера и последователя — **1 балл**.
3. Ошибка в записи либо функций прибыли, либо оптимальных объемов производства — **1 балл за пункт**.

б) Максимальная оценка за пункт — **8 баллов**.

1. Корректно выписанная функция наилучшего ответа последователя от q_A и C:
$$q_B = \begin{cases} C, & q_A \le 1-2C \\ \frac{1-q_A}{2}, & q_A \ge 1-2C \end{cases}$$ — **1 балл**.
2. Корректно выписанная функция наилучшего ответа лидера от C — **4 балла**, из которых:
   - Корректно выписанная функция наилучшего ответа лидера от C при $C \le \frac{1}{4}$: $q_A = \frac{1-C}{2}$ — **1 балл**.
   - Корректно выписанная функция наилучшего ответа лидера от C при $\frac{1}{4} \le C \le \frac{1}{3}$:
   $$q_A = \begin{cases} \frac{1-C}{2}, & C \le 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}, & C > 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ — **2 балла**.
   - Корректно выписанная функция наилучшего ответа лидера от C при $C \ge \frac{1}{3}$: $q_A = \frac{1}{2}$ — **1 балл**.
   - Если корректно произведено сравнение прибылей лидера при $q_A = \frac{1-C}{2}$ и $\frac{1}{2}$ без рассуждений о том, почему не может случиться так, что $q_A = 1-2C$ при $C \le \frac{1}{4}$ и $C \ge \frac{1}{3}$ — **1 балл за секцию**.
3. Корректно выписанная функция наилучшего ответа последователя от C:
$$q_B = \begin{cases} C, & C \le 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4}, & C > 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ — **1 балл**.
4. Корректно полученные значения $C^\star = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $q_A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $q_B = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ — **1 балл**.
5. Корректно полученное значение новой прибыли последователя $\pi_B = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$ и верное ее сравнение со старой прибылью $\pi_B = \frac{1}{16}$ — **1 балл**.

в) Максимальная оценка за пункт — **1 балл**.

• Решение, содержащее логическую цепочку «последователь ограничил свое производство $\Rightarrow$лидеру стало выгоднее производить, при прочих равных, меньше ($\Rightarrow$необязательно, но желательно: а потому прибыль последователя выросла ввиду сниженной конкуренции и более высокой цены пряжи для вязания)» — **1 балл**.

г) Максимальная оценка за пункт — **1 балл**.

• Решение, содержащее логическую цепочку «последователю станет выгодно отклониться от обещания $\Rightarrow$лидер понимает это и не верит последователю, а потому производит $q_A = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$последователь производит $q_B = \frac{1}{4}$» — **1 балл**.

Задача 5. *Банковские кризисы* *(12 баллов)*

В свете Нобелевской премии по экономике 2022 г. и банковского кризиса в США в марте 2023 г. Всероссийская олимпиада по экономике не могла обойтись без задачи о банковских кризисах. Для ее решения достаточно понимания стимулов экономических агентов и того, что банк привлекает депозиты и выдает кредиты. Знания специализированных концепций, таких как банковский мультипликатор, не требуется.

а) *(3 балла)* Ключевым элементом кризиса являются *набеги вкладчиков на банки.* При этом ожидания банкротства определенного банка могут являться *самосбывающимися.* Объясните, как работают самосбывающиеся ожидания при набеге на банк.

б) *(3 балла)* Как развитие современных коммуникационных технологий влияет на то, насколько быстро происходит набег на банк? Ответьте, основываясь на ваших рассуждениях в пункте **а)**.

в) *(3 балла)* В экономической науке существует дискуссия о том, какая структура связей между банками более устойчива и минимизирует вероятность системного кризиса. В частности, рассматриваются две в некотором смысле противоположные структуры — *распределенная* и *кольцевая.* Они представлены на рисунке:

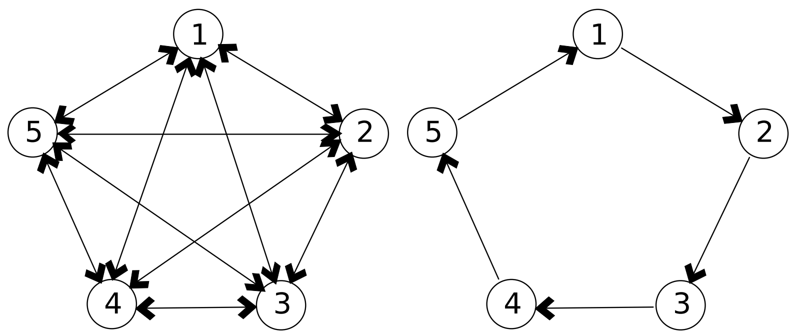

Рис. 5.1: Распределенная (слева) и кольцевая структуры связей между банками.

В *распределенной структуре* каждый банк связан с каждым — иными словами, каждый банк проводит операции (дает кредиты и берет депозиты) с каждым из остальных банков, причем в одинаковых объемах. При *кольцевой структуре* каждый банк дает кредиты одному банку, а принимает депозиты от другого, и так по кругу. То есть банк сохраняет у себя определенную долю в резервы, а остальную часть кладет на депозит в партнерский банк. Кроме изображенных на рисунке связей между банками, есть также и связь каждого банка с реальным сектором — банк берет депозиты у домохозяйств и выдает кредиты различным предприятиям. Из общих соображений кажется, что распределенная структура более устойчива, чем кольцевая. Основываясь на особенностях поведения банков, объясните, почему это может быть не так.

г) *(3 балла)* Из-за того, что фирмы, занимавшие деньги у разорившихся банков, будут вынуждены брать кредиты в других банках, общество будет нести издержки. Некоторые из этих издержек очевидны: это расходы на бумагу для новых договоров, и т. п. Опишите, какие еще издержки будет нести общество из-за того, что фирмы будут вынуждены брать кредиты в других банках.

Решение

а) Поскольку часть средств вкладчиков банк выдал в качестве кредитов, банк не может вернуть деньги всем вкладчикам единовременно. Если часть вкладчиков начинают ожидать, что банк А по какой-то причине разорится, то они начинают изымать из него деньги (закрывать депозиты), чтобы успеть изъять средства до того, как они закончатся (стать именно теми вкладчиками, кто получит деньги). Понимая это, те вкладчики, которые изначально не ожидали, что банк разорится, узнав о поведении первой группы вкладчиков, тоже начинают изымать деньги — чтобы успеть. В итоге для каждого вкладчика, независимо от того, ожидал он изначально, что банк разорится, или нет, становится рациональным действием изъять свои деньги. Как следствие, банк действительно разоряется, потому что деньги изымают больше, чем банк способен в данный момент выдать. То есть банк сталкивается с невозможностью удовлетворить текующие требования вкладчиков, значит объявляется неплатежеспособным (банкротом). Сам факт ожиданий банкротства первой группы вкладчиков привел к банкротству банка. Ожидания претворились в жизнь просто из-за того, что сформировались, поэтому они являются самосбывающимися.

б) Из ответа а) следует, что набег на банк тем масштабнее, чем быстрее одни вкладчики узнают о действиях других. Развитие соцсетей увеличивает скорость распространения такой информации. Рост скорости распространения информации, при сопутствующей вере агентов в нее, стимулирует все больше людей в единицу времени снимать свои средства со счета в банке.

Приложения для онлайн-банкинга тоже можно рассматривать как проявление развития коммуникационных технологий (коммуникация между агентом и банком). Интернет-банкинг упрощает изъятие средств, что может побудить «ленивых» вкладчиков (которые хотели бы снять деньги снять деньги, но им не хочется идти в банк или этот поход связан с слишком большими издержками) снять свои средства. Что при прочих равных увеличивает количество заемщиков, требующих средства в единицу времени. Также агенты не будут тратить время на поход в банк, а значит те, кто хочет снять деньги с депозитов сделают это сразу, как услышат убедительную для них негативную новость. Получается, что вкладчики более синхронно изымают свои средства, так как через приложение это делается быстро, что увеличивает количество заемщиков, требующих средства в единицу времени.

Поэтому развитие современных коммуникационных технологий увеличивает размер и скорость набега на банки.

в) Аргумент 1. Моральный риск. В распределенной системе каждый банк чувствует себя более застрахованным, чем в кольце, так как в случае проблем может перекредитоваться в большем числе других банков. Поэтому он изначально выбирает более рискованные инвестиции в реальный сектор. Так делает каждый банк, что может увеличивать общий риск системы по сравнению с кольцом. А это значит, что в полном графе системный кризис произойдет с большей вероятностью, чем в кольцевой. В данном случае это является проявлением проблемы морального риска.

Аргумент 2. Изъятие из предосторожности останавливает развитие кризиса в кольце, но не в распределенной системе. Во время банковской паники банки изымают друг из друга свои депозиты. Предположим, банк 1 обанкротился. Тогда банки, которые связаны с теми банками, которые инвестировали в банкрота, могут начать тянуть депозиты из таких банков, опасаясь, что из-за банкротства банка 1, связанные с ним начнут испытывать проблемы с ликвидностью. Поскольку в полном графе каждый банк связан со всеми, то при банкротстве одного все остальные начнут тянуть депозиты друг из друга, что приведет к мощному сокращению денежной массы, и нехваткой средств у банков для обеспечения текущих расчетов и требований. При системе кольца изъятие средств, наоборот, может помочь остановить распространение кризиса и уменьшить потери денежной массы. Более того, распространение кризиса останавливается на двух банках. Рассмотрим участок кольца, когда банк 3 банкротится:

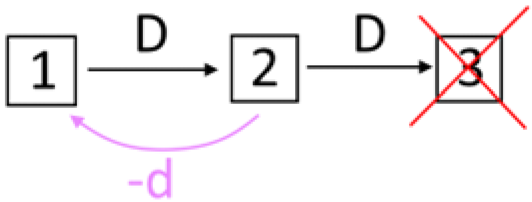

Рис. 5.2: Часть кольцевой системы

В таком случае банк 2 может начать испытывать проблемы с ликвидностью, так как он потерял средства, которые держал в банке 3. Банк 1 понимает это и начинает изымать свои средства из банка 2, что обозначено как $-d$. Таким образом он, с одной стороны, сам стимулирует банкротство банка 2 (случай самосбывающихся ожиданий), но с другой, создает себе дополнительный буфер ликвидности для того, чтобы устоять при банкротстве банка 2. В итоге, распространение кризиса может (зависит от того, на сколько большой буфер будет у банка 1) закончиться на вызванном банкротстве банка 2 вследствие банка 3 и всё. В таком случае банкротство одного банка затрагивает сокращение депозитов только в рамках трёх банков (1, 2, 3), а все остальные банки останутся нетронутыми. Для полного графа это неверно, в такой системе все банки затрагиваются паникой, а не только три, как в кольце. Например, при банкротстве банка 3, первый тоже был бы с ним связан и из него начали бы выводить средства паникующие банки, что увеличивает вероятность банкротства банка 1).

г) Существенные издержки связаны с потерей информации о фирмах, которой обладали обанкротившиеся банки. Эти издержки включают в себя:

- **Издержки из-за неоптимального распределения средств**. Из-за потери информации банкам будет сложнее принять правильное решение о том, какие именно проекты финансировать и в какой степени. В результате общая отдача от проектов для общества может оказаться существенно ниже максимальной, даже если не изменятся общий объем выданных средств и ставка процента.
- **Общее снижение производства из-за роста стоимости кредитования.** Из-за потери информации о фирмах другие банки согласны кредитовать их только под более высокий процент. Это происходит из-за роста премии за риск, ведь новые банки ещё не работали с этими фирмами, а значит не знают специфику

их бизнеса и их надежность как партнеров. Рост стоимости кредита оказывает давление на реальный сектор через канал издержек. Фирмы сокращают производство, падает выпуск в экономике — все общество недополучает доход.

Примечание 1: Потерю информации в результате банкротства банков изучал в своих работах Нобелевский лауреат 2022 г. Бен Бернанке, на примере Великой Депрессии.

Примечание 2: Если заемщиками являются физические лица, то проблема потери информации не так сильна, так как существуют бюро кредитных историй. Для фирм институт кредитных историй развит существенно хуже.

Схема проверки

Полный балл за пункт ставится только за полностью верное решение участника. Балл за пункт не ставится в случае:

- Любой (логической/теоретической/эмпирической) ошибки.
- Любого аргумента, основывающегося на нерациональном поведении агента.
- Вероятностного характера аргумента («может/возможно/наверное» и т.п.) без указания условий, при которых аргумент верен.

а) Типичные ошибки:

- Набег на банк ≠ бежать и вкладывать деньги.
- Отсутствие указания того, что агенты верят в плохую новость. При отсутствии веры в проблемы банка агент не сформирует дефолтных ожиданий на его счет, а значит не идет забирать средства из банка. Утверждение «негативная новость формирует ожидания дефолта банка» является неверным.
- Неверно предположение о том, что от самосбывающегося дефолта страдают только плохие банки.
- Нет связи между плохими новостями и действиями агентов.
- Не описан финальный этап — банк становится банкротом (не показано, что ожидания самосбылись).
- Сам по себе факт набега не означает, что банк обанкротится. Фразы «Может обанкротиться/возможно обанкротится/наверное обанкротится» не засчитывались за корректный аргумент. Банк обанкротится только при условии, что пришло забирать деньги больше вкладчиков, чем рассчитывал банк.
- Нет объяснения того, откуда берется уязвимость к панике (например, часть депозитов выдается в кредиты). Снятие депозитов — естественный процесс для любого банка. Необходимо указывать, что из-за паники и ожиданий вкладчики собираются снять больше, чем банк планировал (у него не хватит резервов).

б) Типичные ошибки:

- Не описан механизм того, как скорость передачи информации влияет на скорость набега вкладчиков.

в) Типичные ошибки:

- Банк без денег объявляется банкротом.
- «Отразится на остальных банках» — слишком общее утверждение.
- Клиенты банка-банкрота не идут требовать выплаты в другие банки.

- Искусственное банкротство: конструируется ситуация, в которой банк сам себе делает хуже, хотя мог бы этого не делать (нарушение предпосылки о рациональности).
- «В полном графе в случае банкротства страдают все, тогда как в кольце страдает только один»: в полном графе страдают все **но по чуть-чуть**, тогда как в кольце страдает только ”сосед но в большей степени, так как эти банки сильно взаимосвязаны (сильнее). Этот аргумент, наоборот, соответствует позиции за распределенную систему.

г) Засчитывается любой аргумент, демонстрирующий конкретные издержки, которые несет общество в результате банкротства, и при этом не содержит (логической/теоретической/эмпирической) ошибки в рассуждении. Пример не должен быть частью перераспределения доходов.

Типичные ошибки:

- Пример является частью перераспределения доходов.
- Использование общих терминов без конкретизации: транзакционные издержки/издержки/нестабильность/неопределенность/выгодность и т.п.
- Указание на издержки, которые фирмы и так несут (несли бы) даже без банкротства банка. Например, время на заключение договора в новом банке, ведь договор нужно было бы заключать и со старым.
- Негативное последствие не следует непосредственно из банковского кризиса.

Задача 6. *КПВ в учебе* *(12 баллов)*

Рома — ученик старшей школы, который стремится прилежно учиться. Тем не менее, его силы ограничены. У Ромы есть 180 единиц жизненной энергии, которые он может инвестировать в изучение двух предметов — математики и информатики, по каждому из которых можно получить оценку от 0 до 100 баллов. Каждая единица энергии, потраченная на математику, дает 0,5 балла по математике. С информатикой сложнее: каждая единица энергии, потраченная на информатику, дает 1 балл до достижения оценки x баллов; затем каждая дополнительная единица энергии прибавляет к оценке по информатике лишь 0,5 балла. Обозначим за e_1 и e_2 количества энергии, потраченной на математику и информатику соответственно, за g_1 и g_2 — оценки по математике и информатике соответственно.

Величина x не является константой, а зависит от e_1 по следующему правилу: $x = 8\sqrt{e_1}$. Иными словами, чем больше энергии тратится на математику, тем позже наступает снижение производительности в изучении информатики.

а) *(4 балла)* Постройте КПВ Ромы в координатах (g_1, g_2). Выведите уравнение КПВ $g_2(g_1)$. Имейте в виду, что если Рома выучил некий предмет на g баллов, он может написать контрольную и хуже, если того захочет. КПВ может содержать горизонтальный участок.

б) *(4 балла)* Допустим, Рома посвящает учебе всего себя и максимизирует среднее арифметическое двух оценок. Определите, какие оценки он получит, если оптимально распределит свою энергию. Отметьте полученную точку на рисунке с КПВ.

в) *(4 балла)* Теперь допустим, что кроме оценок Рома в какой-то степени думает и об отдыхе. А именно, он максимизирует величину $(g_1 + g_2)/2 + e_3/3$, где e_3 — количество жизненной энергии, оставшееся после затрат энергии на учебу, Определите, какие оценки он получит, если оптимально распределит свою энергию. Отметьте полученную точку на рисунке с КПВ.

Решение

а) Формализуем условие. Ограничение на жизненную энергию имеет вид $e_1 + e_2 \leq 180$. Зависимость оценки за математику от потраченной на подготовку к ней энергии выглядит как $g_1 = \frac{1}{2}e_1$. В свою очередь, зависимость оценки за информатику от e_1 и e_2 имеет более сложный вид:

$$g_2 = \begin{cases} e_2, & e_2 \leq 8\sqrt{e_1} \\ \frac{1}{2}(e_2 - 8\sqrt{e_1}) + 8\sqrt{e_1}, & e_2 \geq 8\sqrt{e_1} \end{cases}$$

Воспользуемся тем, что $e_1 = 2g_1$ и получим, что

$$g_2 = \begin{cases} e_2, & e_2 \leq 8\sqrt{2g_1} \\ \frac{1}{2}e_2 + 4\sqrt{2g_1}, & e_2 \geq 8\sqrt{2g_1} \end{cases}$$

Отсюда можно выразить обратную зависимость e_2 от g_2 на двух участках:

$$e_2 = \begin{cases} g_2, & g_2 \le 8\sqrt{2g_1} \\ 2g_2 - 8\sqrt{2g_1}, & 2g_2 - 8\sqrt{2g_1} \ge 8\sqrt{2g_1} \end{cases}$$

Значит, исходное ограничение на затраты энергии по подготовке к предметам может быть переписано в терминах g_1 и g_2 как

$$180 \ge e_1 + e_2 = \begin{cases} 2g_1 + g_2, & g_2 \le 8\sqrt{2g_1} \\ 2g_1 - 8\sqrt{2g_1} + 2g_2, & g_2 \ge 8\sqrt{2g_1} \end{cases}$$

Видно, что в целях поиска КПВ мы заинтересованы в строгом равенстве — в противном случае при фиксированном g_1 можно немного увеличить g_2, а значит, мы не на КПВ (если только мы не преодолели порог в 100 баллов для какого-то из предметов, что, как станет видно чуть дальше, не случится).

Предположим, что $g_2 \le 8\sqrt{2g_1}$. Тогда, если мы находимся на КПВ, выполнено, что $2g_1 + g_2 = 180$, откуда $g_2 = 180 - 2g_1$. Решая квадратное относительно $\sqrt{g_1}$ неравенство $180 - 2g_1 \le 8\sqrt{2g_1}$ можно получить, что $g_1 \ge 50$.

Теперь предположим, что $g_2 \ge 8\sqrt{2g_1}$. В таком случае, $2g_1 - 8\sqrt{2g_1} + 2g_2 = 180$, откуда $g_2 = 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}$. Квадратное относительно $\sqrt{g_1}$ неравенство $90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1} \ge 8\sqrt{2g_1}$ совпадает с неравенством, рассмотренным выше, с точностью до знака, а потому его решением является множество $g_1 \le 50$.

Суммируя анализ двух участков можно заключить, что

$$g_2 = \begin{cases} 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}, & g_1 \le 50 \\ 180 - 2g_1, & g_1 \ge 50 \end{cases}$$

Наконец, заметим, что $90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}$ — парабола ветвями вниз относительно $\sqrt{g_1}$ с максимумом в вершине, а значит сформулированая кривая возрастает до точки $\sqrt{g_1} = 2\sqrt{2} \Rightarrow g_1 = 8$. Но тогда вместо выбора точки на кривой при $g_1 < 8$ Рома может просто перейти в точку $g_1 = 8$, увеличив тем самым g_2, и написать контрольные хуже при желании. Значит, КПВ Ромы имеет вид

$$g_2 = \begin{cases} 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}, & 8 \le g_1 \le 50 \\ 180 - 2g_1, & g_1 \ge 50 \end{cases}$$

Также корректным считается решение, где у КПВ Ромы добавляется горизонтальный участок от точки (0; 98) до точки (8; 98), что отображено на рис. 6.1.

б) Полезность Ромы равна

$$U = \frac{g_1 + g_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e_1}{2} + \frac{1}{2}\begin{cases} e_2, & e_2 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ e_2/2 + 4\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases} = \begin{cases} e_1/4 + e_2/2, & e_2 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ e_1/4 + e_2/4 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases}$$

Поскольку Рома будет тратить всю энергию на учебу, $e_2 = 180 - e_1$. С учетом этого

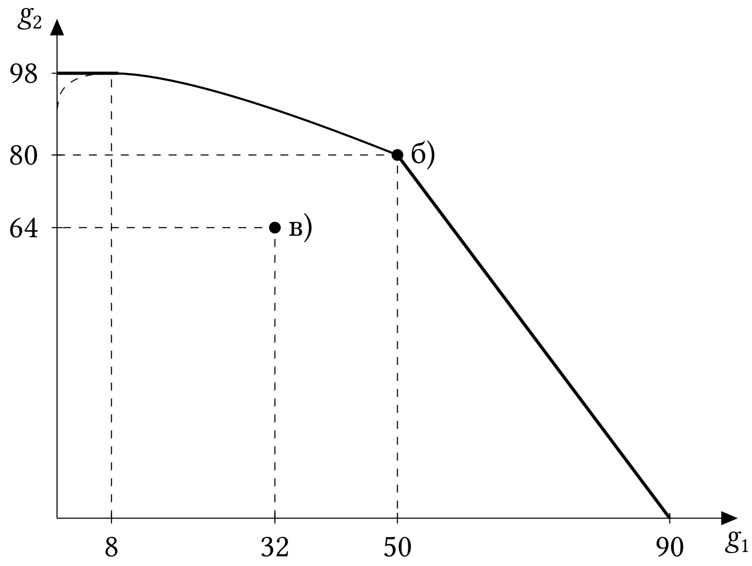

Рис. 6.1: КПВ Ромы и точки, выбираемые им в пунктах б) и в).

полезность перепишется как

$$U(e_1) = \begin{cases} e_1/4 + (180 - e_1)/2, & 180 - e_1 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ 45 + 2\sqrt{e_1}, & 180 - e_1 > 8\sqrt{e_1} \end{cases}$$

Как мы знаем, неравенство $180 - e_1 \leqslant 8\sqrt{e_1}$ эквивалентно неравенству $e_1 \geqslant 100$, так что

$$U(e_1) = \begin{cases} 45 + 2\sqrt{e_1}, & e_1 < 100; \\ 90 - e_1/4, & e_1 \geqslant 100. \end{cases}$$

Рома распределит энергию так, чтобы значение этой функции было максимально. Поскольку функция $45 + 2\sqrt{e_1}$ возрастает, а функция $90 - e_1/4$ убывает, значение $U(e_1)$ максимально при $e_1 = 100$. В результате Рома получит оценки $g_1 = e_1/2 = 50$, $g_2 = e_2 = 80$. Эта точка отмечена на рис. 6.1.

Ответ: $g_1 = 50$, $g_2 = 80$

в) Теперь полезность Ромы равна

$$U = \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{e_3}{3} = \frac{e_3}{3} + \begin{cases} e_1/4 + e_2/2, & e_2 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ e_1/4 + e_2/4 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases}$$

Теперь мы не можем сказать, что $e_1 = 180 - e_2$, так как есть еще и e_3. Поскольку $e_3 = 180 - e_1 - e_2$, полезность можно переписать как

$$U(e_1,e_2) = \frac{180 - e_1 - e_2}{3} + \begin{cases} e_1/4 + e_2/2, & e_2 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ e_1/4 + e_2/4 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases} =$$

$$= 60 + \begin{cases} e_2/6 - e_1/12, & e_2 \leqslant 8\sqrt{e_1}; \\ -e_2/12 - e_1/12 + 2\sqrt{e_1}, & e_2 > 8\sqrt{e_1}. \end{cases}$$

Рома максимизирует эту функцию по двум переменным e_1, e_2. Из-за специального вида этой функции максимизация по двум переменным здесь несложная. Действительно, заметим, что, каково бы ни было значение e_1, полезность возрастает по e_2 при $e_2 < 8\sqrt{e_1}$ и убывает по e_2 при $e_2 > 8\sqrt{e_1}$. Значит, в оптимуме всегда $e_2 = 8\sqrt{e_1}$, то есть Рома будет учить информатику ровно до снижения производительности. Подставляя $e_2 = 8\sqrt{e_1}$ в полезность, получаем функцию от одной переменной

$$U(e_1) = 60 + 8\sqrt{e_1}/6 - e_1/12.$$

Это парабола с ветвями вниз относительно $\sqrt{e_1}$, вершина находится в точке $(8/6)\cdot 6 = 8$. Значит, в оптимуме $e_1 = 8^2 = 64$, $e_2 = 8\sqrt{e_1} = 64$, $g_1 = 32$, $g_2 = 64$.

Эта точка отмечена на 6.1. Она находится под КПВ, что может быть необычным, но не является удивительным. Действительно, если Рома ценит отдых, вполне логично, что он не будет напрягаться на полную мощность, чтобы получать максимально возможную оценку g_2 при фиксированном g_1.

Ответ: $g_1 = 32$, $g_2 = 64$

Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — **4 балла**.

1. Линейный участок КПВ: $g_2 = 180 - 2g_1$ (или иное однозначное описание данного участка) — **1 балл**.
2. Нелинейный участок КПВ: $g_2 = 90 - g_1 + 4\sqrt{2g_1}$ — **1 балл**.
3. Точка излома: $(g_1, g_2) = (50, 80)$ — **1 балл**.
4. Анализ нелинейного участка и указание на горизонтальный (или отсутствующий, в зависимости от интерпретации) участок КПВ при $g_1 \le 8$ — **1 балл**.
5. Отсутствие графика КПВ — **-1 балл**.

б) Максимальная оценка за пункт — **4 балла**.

1. Корректно записанная функции полезности на линейном участке КПВ — **1 балл**.
2. Получение оптимального значения $g_1 = 50$ на линейном участке КПВ — **1 балл**.
3. Корректно записанная функция полезности на нелинейном участке КПВ — **1 балл**.
4. Получение оптимального значения $g_1 = 50$ на нелинейном участке КПВ — **1 балл**.

в) Максимальная оценка за пункт — **4 балла**.

1. Корректно записанная КПВ в координатах (g_1, g_2) при фиксированном значении e_3 — **1 балл**.
2. Корректное доказательство того, что оптимум достигается в точке излома КПВ, то есть при $g_2 = 8\sqrt{2g_1}$ (или ссылка на пункт б)) — **1 балл**.
3. Корректно записанная функция полезности от одной (любой!) переменной — **1 балл**.
4. Получение оптимальных значений $g_1 = 32, g_2 = 64$ — **1 балл**.

Задача 7. *Торговля без денег* *(12 баллов)*

Каждый из семи островов A, B, C, D, E, F, G производит и потребляет все или некоторые из 2023 товаров. Будем обозначать через $d_{ij} \geqslant 0$ потребность острова i в товаре j, а через $s_{ij} \geqslant 0$ объем производства островом i товара j, где $i \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$, $j \in \{1, \dots, 2023\}$. Величины d_{ij} и s_{ij} предопределены и неизменны. Между островами возможен обмен, но денег в экономике нет. Будем называть остров i *счастливым*, если для любого товара j его потребление на острове i не меньше, чем d_{ij}.

а) *(3 балла)* Предположим, что существует волшебник, который может свободно перераспределять произведенные товары между островами. Запишите условие на d_{ij}, s_{ij}, при котором волшебник может сделать так, чтобы каждый остров был счастливым. Докажите, что 1) если волшебник может каждый остров сделать счастливым, то это условие должно быть выполнено (ваше условие является необходимым), а также что 2) если ваше условие оказалось выполнено, то волшебник может сделать каждый остров счастливым (Ваше условие является достаточным).

б) *(6 баллов)* Теперь предположим, что волшебника нет, но острова могут обмениваться друг с другом. Каждый остров в рамках любой сделки с другим островом готов отдать свои товары только в обмен на такое же суммарное количество товаров (например, 5 яблок и 2 груши он готов обменять на 3 банана и 4 апельсина, $5 + 2 = 3 + 4$). Запишите условие на d_{ij}, s_{ij}, при котором острова смогут устроить торговлю (последовательность обменов) так, чтобы каждый остров был в итоге счастливым. Докажите, что это условие является необходимым и достаточным.

в) *(3 балла)* Наконец, предположим, что каждый остров i в рамках любой сделки с другим островом готов отдать свои товары только в обмен на такое же суммарное количество товаров, в которых сам нуждается, то есть таких товаров j, что $d_{ij} > s_{ij}$. Является ли достаточным условие, которое вы получили в качестве ответа в пункте **б)**, для того, чтобы острова смогли устроить торговлю так, чтобы каждый остров в итоге был счастливым?

Решение

а) Поскольку волшебник может свободно перераспределять все произведенные товары, необходимо всего лишь, чтобы суммарно на всех островах оказалось произведено как минимум такое количество товаров каждого вида, в котором испытывают потребность все острова суммарно. Иными словами, для всех $j \in \{1, 2, \dots, 2023\}$ должно быть выполнено неравенство:

$$s_{Aj} + s_{Bj} + \dots + s_{Gj} \geq d_{Aj} + d_{Bj} + \dots + d_{Gj}$$

В противном случае найдется такой товар, что суммарный объем его производства меньше суммарной потребности в нем, а значит удовлетворить потребности всех островов в этом товаре путем перераспределения не удастся. Стало быть, это условие действительно является необходимым.

Если 2023 неравенства выполнены, то волшебник может собрать все произведенные товары со всех островов и выдать острову i d_{ij} единиц товара j, тем самым закрыв его потребность в данном товаре. Это верно для всех i и для всех j, коль скоро суммарные потребности островов в каждом товаре не больше, чем суммарный объем производства каждого товара, а значит и достаточное условие выполнено. Остатки можно распределить произвольным образом.

б) 2023 неравенства из предыдущего пункта все так же должны выполняться, потому что в противном случае хотя бы по одному товару суммарная потребность всех островов превышала суммарный запас ресурсов, а значит потребности всех островов в нем не смогли бы быть удовлетворены. Однако, одного этого условия теперь недостаточно.

Заметим, что в результате любого обмена суммарное количество товаров, которым обладает участвующий в обмене остров, не изменяется, потому что обмен предполагает передачу и получение одинакового количества товаров. Стало быть, если после обмена некоторый остров стал счастивым, то суммарный объем всех товаров в наличии у этого острова должен быть не меньше суммарной потребности этого острова во всех товарах — в противном случае острову не хватит товаров для удовлетворения потребности в одном из ресурсов. Значит, чтобы все острова удовлетворили свои потребности во всех товарах, необходимо, чтобы для всех $i \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$ были выполнены 7 неравенств:

$$s_{i1} + s_{i2} + \dots + s_{i2023} \geq d_{i1} + d_{i2} + \dots + d_{i2023}$$

Таким образом, получили систему из 2030 неравенств:

$$s_{Aj} + s_{Bj} + \dots + s_{Gj} \geq d_{Aj} + d_{Bj} + \dots + d_{Gj}$$

$$s_{i1} + s_{i2} + \dots + s_{i2023} \geq d_{i1} + d_{i2} + \dots + d_{i2023}$$

Докажем, что эта система и является искомым необходимым и достаточным условием.

Если не выполнено одно из первых 2023 неравенств, то потребность в некотором товаре как минимум для одного из островов не сможет быть удовлетворена из-за недопроизводства. Если не выполнено одно из последних 7 неравенств, то некоторому острову не хватит запаса ресурсов для покрытия своих нужд путем обмена. Таким образом, приведенные 2030 неравенств являются необходимым условием.

Проверим достаточность. Пусть все 2030 неравенств выполнены. Алгоритм обменов, который позволит сделать все острова счастливыми, может быть таким. Рассмотрим остров A. Пусть у него не хватает нескольких товаров (если остров A не испытывает недостатка ни в одном из товаров, перейдем к острову B). Рассмотрим произвольный из недостающих товаров k. Из предположения следует, что в сумме у всех остальных островов точно есть излишек товара k, способный покрыть дефицит острова A в нем. Кроме того, из предположения следует, что у острова A точно есть излишек других товаров в объеме не меньшем, чем дефицит товара k. Это означает, что остров A может последовательно обменяться с другими островами так, чтобы покрыть свой дефицит в товаре k, отдавая при этом товар, которого на острове A в излишке.

Проделаем эту же операцию со всеми остальными товарами, в которых у острова A наблюдается дефицит. После этого дефицит острова A будет закрыт. При этом у других островов не возникает дополнительного дефицита ни по какому товару. Проделаем эти же шаги для всех оставшихся островов, имеющих дефицит в некоторых товарах. После этого все острова окажутся счастливыми.

в) Нет, это условие не является достаточным. Предположим, что острова C, D, E, F, G не производят ни одного товара и не нуждаются ни в одном товаре (для них $d_{ij} = s_{ij} = 0$). Предположим, что остров A производит единицу первого товара и ничего больше, а также не нуждается в потреблении ни одного товара. Наконец, предположим, что остров B нуждается только в единице первого товара и производит только единицу второго товара. Формально, среди всех d_{ij} только $d_{B1} = 1$, и все остальные равны нулю, а среди всех s_{ij} только $s_{A1} = s_{B2} = 1$, и все остальные равны нулю. Тогда единственным нуждающимся островом оказывается остров B, чью потребность может закрыть лишь остров A, который, однако, не заинтересован в этом, потому что он уже счастливый. Тем не менее, в условиях пункта **б)** обмен бы состоялся, поскольку остров A мог бы обменять единицу первого товара на единицу второго товара от острова B, и все острова оказались бы счастливыми.

Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**.

1. Корректно выписано условие — **1 балл**.
2. Корректно доказана необходимость — **1 балл**.
3. Корректно доказана достаточность — **1 балл**.

б) Максимальная оценка за пункт — **6 баллов**.

1. Корректно выписано условие — **2 балла**, из которых:
   - Корректно выписана система из 2023 неравенств (или ссылка на верное условие из предыдущего пункта) — **1 балл**.
   - Корректно выписана система из 7 неравенств — **1 балл**.
2. Корректно доказана необходимость условия — **1 балл**.
3. Корректно доказана достаточность условия — **3 балла**.

в) Максимальная оценка за пункт — **3 балла**.

1. Корректно доказана недостаточность условия из пункта б) — **3 балла**.
2. При в целом правильной конструкции контрпримера определены не все d_{ij}, s_{ij} — **2 балла из 3**.

Задача 8. *Дважды оптимальная субсидия* *(12 баллов)*

Фирма-монополист производит товар «Штуки». Спрос на этот товар описывается уравнением $Q = 80 - P$. Средние издержки производства одной «Штуки» не зависят от выпуска и равны 20. Участник заключительного этапа олимпиады легко определит, что фирма выберет объем производства, равный 30, в то время как если бы рынок «Штук» был конкурентен, рыночный объем производства равнялся бы 60.

Как известно, в обычных условиях совершенно-конкурентный объем выпуска является еще и оптимальным с точки зрения общества. Государство захотело добиться того, чтобы фирма увеличила свой выпуск до этого уровня, то есть с 30 до 60. Один из способов сделать это — предоставить фирме субсидию, которая зависит от выпуска. Пусть $S = f(Q)$, где $Q \geqslant 0$ — объем проданной продукции, $S \geqslant 0$ — общая сумма выплачиваемой фирме субсидии. Проблема, однако, в том, что разные схемы субсидирования повлекут за собой разные расходы государства.

Если фирма безразлична между несколькими объемами выпуска, она выбирает наибольший из них.

а) *(2 балла)* Пусть $f(Q) = aQ$. Какое значение параметра a нужно выбрать государству, чтобы фирма выбрала объем 60? Каковы будут расходы государства на субсидию?

б) *(2 балла)* Пусть $f(Q) = aQ^2$. Какое значение параметра a нужно выбрать государству, чтобы фирма выбрала объем 60? Каковы будут расходы государства на субсидию?

в) *(8 баллов)* Допустим, государство может выбрать в качестве схемы выплаты субсидии *любую* функцию $S = f(Q)$, определенную для всех $Q \in [0; 80]$ и принимающую только неотрицательные значения, — например, $f(Q) = a\sqrt{Q} + bQ^3 + \frac{c}{Q+1}$, или $f(Q) = \begin{cases} aQ^4, & Q < 10; \\ bQ^4, & Q \geqslant 10, \end{cases}$ или любую другую (фантазия у государства безгранична). Как и прежде, функция должна быть такой, чтобы фирма продала 60 «Штук». Какую функцию нужно ввести государству, чтобы расходы на субсидию были минимальны? (Если таких функций несколько, приведите любую из них.) Чему равны эти минимальные расходы?

Решение

а) Составим функцию прибыли фирмы: $\pi(Q) = P(Q)Q - TC(Q) + f(Q) = (80 - Q)Q - 20Q + aQ$. Фирма максимизирует эту функцию по Q, оптимальный выпуск находится в вершине параболы: $Q^* = (60 + a)/2$. Нам нужно, чтобы этот выпуск равнялся 60, откуда $Q^* = (60 + a)/2 = 60$, $a = 60$, расходы равны $S = aQ = 60 \cdot 60 = 3600$.

Ответ: $a = 60$, $S = 3600$.

б) Теперь функция прибыли фирмы примет вид $\pi(Q) = P(Q)Q - TC(Q) + f(Q) = (80 - Q)Q - 20Q + aQ^2$. Фирма максимизирует эту функцию по Q, оптимальный выпуск находится в вершине параболы: $Q^* = 30/(1 - a)$. Нам нужно, чтобы этот выпуск равнялся 60, откуда $Q^* = 30/(1 - a) = 60$, $a = 1/2$, расходы равны $S = aQ^2 = 60 \cdot 60/2 = 1800$. Расходы при квадратичной субсидии получились меньше.

Ответ: $a = 1/2$, $S = 1800$.

в) Функция прибыли фирмы примет вид $\pi(Q) = P(Q)Q - TC(Q) + f(Q) = (80 - Q)Q - 20Q + f(Q) = 60Q - Q^2 + f(Q)$.

Будем решать задачу в два шага:

1. Докажем, что при любой схеме выплаты субсидии $S = f(Q)$, при которой фирма выбирает выпуск 60, расходы не меньше 900.
2. Приведем функцию $f^*(Q)$, при которой расходы равны 900.

Из утверждений 1 и 2 будет следовать, что $f^*(Q)$ является искомой оптимальной функцией (возможно, не единственной, но находить все оптимальные f^* не требуется).

Чтобы доказать оценку $S \geqslant 900$, заметим, что оптимальность выпуска 60 означает, что для любого $Q \geqslant 0$ должно выполняться

$$60 \cdot 60 - 60^2 + f(60) \geqslant 60Q - Q^2 + f(Q).$$

Отсюда для любого $Q \geqslant 0$

$$f(60) \geqslant 60Q - Q^2 + f(Q) \geqslant 60Q - Q^2 + 0,$$

где мы использовали неотрицательность $f(Q)$. Полученное неравенство является наиболее сильным при Q таком, что правая часть $60Q - Q^2$ максимальна, то есть при $Q = 30$. Значит, $f(60) \geqslant 60 \cdot 30 - 30^2 = 900$.

Можно было доказать оценку $S \geqslant 900$ и взяв альтернативный выпуск 30 сразу: в любом случае, для фирмы выпуск 60 должен оказаться не хуже, чем, в том числе, ее монопольный выпуск 30. Отсюда можно сразу получить неравенство $0 + f(60) \geqslant 900 + f(30) \geqslant 900$.

Теперь приведем пример функции $f(Q)$, такой что фирма выбирает выпуск 60 и расходы равны 900. Пусть

$$f^*(Q) = \begin{cases} 0, & Q \neq 60; \\ 900, & Q = 60. \end{cases}$$

Иными словами, субсидия платится только за выпуск 60 и в размере 900. При $Q \neq 60$, прибыль как и в отсутствие вмешательства равна $60Q - Q^2$, а при $Q = 60$ она равна 900. В итоге оба выпуска 30 и 60 будут давать прибыль 900, и она будет максимальной. По условию, фирма выберет наибольший из этих двух выпусков, то есть 60, и расходы будут равны 900. Значит, $f^*(Q)$ подходит.

Ответ: $f^*(Q)$ дана выше, $S = 900$.

Примечание 1: Конечно, подходит и множество других функций $f(Q)$, например
<

$$f(Q) = \begin{cases} 0, & Q < 60; \\ 900, & Q \geqslant 60. \end{cases}$$

Вообще, подойдет любая неотрицательная функция f, такая что:

1. $f(60) = 900$;

2. $f(Q) \leqslant Q^2 - 60Q + 900$ для любого $Q \leqslant 60$;
3. $f(Q) < Q^2 - 60Q + 900$ для любого $Q \in (60; 80]$.

Примечание 2: один из естественных, но неверных подходов к задаче такой: поскольку квадратичная субсидия оказалась лучше линейной, будем повышать степень. Нетрудно доказать, что при $f(Q) = aQ^n$ из равенства производной прибыли нулю получается, что нужно брать $a(n) = \frac{1}{60^{n-2}n}$, тогда расходы будут равны $\frac{3600}{n}$. Получается, что увеличивая n, мы можем получить сколь угодно малые расходы, что противоречит нашему ответу 900 выше. В чем проблема с этим рассуждением? Дело в том, что при $n \geqslant 4$ и $S = a(n)Q^n$ 60 не будет точкой максимума прибыли — равенства производной нулю для этого недостаточно.

Примечание 3: данная субсидия названа «дважды оптимальной», так как она приводит одновременно 1) к установлению оптимального для общества выпуска; 2) к минимальным расходам на выплату субсидии при достижении этого выпуска.

Схема проверки

а) Максимальная оценка за пункт — **2 балла**.

1. Корректно полученное значение $a = 60$ — **1 балл**.
2. Корректно полученное значение $S = 3600$ — **1 балл**.

б) Максимальная оценка за пункт — **2 балла**.

1. Корректно полученное значение $a = 0.5$ — **1 балл**.
2. Корректно полученное значение $S = 1800$ — **1 балл**.

в) Максимальная оценка за пункт — **8 баллов**.

1. Оценка минимального размера государственной субсидии $S \geq 900$ — **6 баллов**, причем:
   - Недоказанное утверждение о том, что $S \geq 900$ — **2 балла**.
   - Частично корректное доказательство (например, недостаточные рассуждения о том, почему невозможно получить $S < 900$) — **4 балла**.
   - Полностью корректное доказательство оценки — **6 баллов**.
2. Пример функции $f(Q)$, для которой нижняя оценка $S = 900$ достигается — **2 балла**.