РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

© 2012 г. **И.В. РОМАНОВ**
(Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва)

О НЕВОЗМОЖНОСТИ ПРИВЕДЕНИЯ ПЛОСКОЙ МЕМБРАНЫ В СОСТОЯНИЕ ПОКОЯ С ПОМОЩЬЮ ГРАНИЧНЫХ СИЛ

Рассматриваются задачи точного управления колебаниями двумерных мембран с помощью граничных сил. Будем говорить, что систему можно привести в состояние покоя, если для любых начальных условий можно найти управление, такое что соответствующее ему решение обратится в нуль за конечное время, причем данное решение должно остаться в нулевом состоянии в дальнейшем. Доказывается, что в случае определенных условий, наложенных на управляющее воздействие, некоторые системы с распределенными параметрами невозможно привести в состояние покоя за конечное время.

Вопрос об управлении колебаниями двумерными мембранами и пластинами с помощью граничных сил рассматривался ранее многими авторами (см., например, [1, 2]). В монографии [3] представлена задача об остановке колебаний ограниченной струны с помощью граничного управления, доказывается, что возможно за конечное время полностью остановить колебания струны при ограничении на абсолютную величину управляющего воздействия и дается оценка времени, необходимого для полной остановки колебаний. В монографии [4] исследуются вопросы оптимального управления системами с распределенными параметрами и формулируются условия оптимальности, аналогичные принципу максимума Л.С. Понтрягина для систем с конечным числом степеней свободы. В [5–7] даны задачи приближенного и точного управления колебаниями двумерных мембран и пластин.

В данной работе доказывается, что колебания прямоугольной мембраны невозможно успокоить равномерно распределенным граничным управлением для достаточно широкого класса начальных возмущений. Также исследуется вопрос управляемости колебаний мембраны произвольной формы в случае, когда управляющее воздействие имеет некоторый специальный вид.

Пусть $\Omega \subset R^2$ здесь и далее ограниченная область с кусочно-гладкой границей, T – некоторое положительное число, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ – боковая поверхность Q_T, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к границе области Ω.

Определим, как обычно, пространство С.Л. Соболева $H^s(\Omega)$ (при целом неотрицательном s), как пространство, полученное замыканием множества бесконечногладких на $\overline{\Omega}$ функций по норме

$$\|\varphi\|^2_{H^s(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left(\varphi^2(x) + \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha \varphi(x)|^2 \right) dx,$$

где $x = (x_1, x_2)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ – мультииндекс, α_j, $j = 1, 2$ – целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}.$$

Если $s = 0$, то по определению получаем пространство $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения колебания двумерной мембраны

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T, \\ y|_{t=0} = \varphi(x), \quad y'_t|_{t=0} = \psi(x), \\ \frac{\partial y}{\partial n}|_\Sigma = P(x, t). \end{gathered} \tag{1}$$

Функцию $P(x, t)$ можно понимать как распределенное по границе двумерной мембраны управляющее воздействие.

Определение 1. *Бесконечно дифференцируемая в Q_T функция $\xi(x, t)$ с компактным в Q_T носителем называется финитной (см. [8]).*

Определение 2. *Функция $y(x, t) \in L_2(Q_T)$ называется слабым решением задачи (1), если для любой пробной финитной функции $\xi(x, t)$ имеет место интегральное тождество*

$$\iint\limits_{Q_T} y(x, t)\xi(x, t) dx dt = \int\limits_{\Omega} (\varphi \Theta'_t - \psi \Theta)_{t=0} dx + \int\limits_{\Sigma} P(x, t)\Theta(x, t) d\Sigma,$$

где $\Theta(x, t)$ – классическое решение следующей задачи (которая называется транспонированной):

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \Theta(x, t) = \xi(x, t) \quad \text{в} \quad Q_T, \\ \Theta|_{t=T} = \Theta'_t|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial n}|_\Sigma = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Постановка задачи, аналогичная приведенной в определении 2, рассматривается, например, в [4, гл. 4].

Пусть $\{\lambda_i^2\}_0^\infty$, $\{X_i(x)\}_0^\infty$ – системы собственных значений и собственных функций оператора Лапласа задачи Неймана в области Ω, т.е. $\Delta X_i(x) + \lambda_i^2 X_i(x) = 0$ в Ω, $\dfrac{\partial X_i}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$. Известно, что система собственных функций, определенная выше, является полной в $L_2(\Omega)$.

Определим функцию $T_n(t)$ для любого целого положительного номера n как решение дифференциального уравнения

$$T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \int\limits_{\partial\Omega} X_n(x)P(x,t)d\sigma \tag{3}$$

с начальными условиями: $T_n(0) = \varphi_n$, $T_n'(0) = \psi_n$, где φ_n и ψ_n – коэффициенты разложения функций φ и ψ в ряды Фурье по собственным функциям, т.е.

$$\varphi_n(x) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)X_n(x)dx, \quad \psi_n(x) = \int\limits_{\Omega} \psi(x)X_n(x)dx,$$

а также положим

$$y_N(x,t) := \sum_{n=0}^{N} X_n(x)T_n(t).$$

Докажем теперь важную лемму. Формулировка данной леммы (без доказательства) содержится в [7].

Лемма (сформулирована и доказана совместно с А.С. Шамаевым, см. [7]). *Пусть $P(x,t)$ – произвольная функции из пространства $L_2(\Sigma)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$. Тогда последовательность функций $y_N(x,t)$ сходится в пространстве обобщенных функций к слабому решению задачи* (1).

Доказательство. Возьмем функцию $\Theta(x,t)$, определенную как решение задачи (2). С помощью интегрирования по частям получаем

$$\iint\limits_{Q_T} \left\{ y_N(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\Theta(x,t) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) y_N(x,t)\Theta(x,t)\right\} dxdt =$$
$$= \int\limits_{\Omega} (y_N\Theta_t' - (y_N)_t'\Theta)_{t=0}dx + \int\limits_{\Sigma}\left(y_N\frac{\partial\Theta}{\partial n} - \frac{\partial y_N}{\partial n}\Theta\right)d\Sigma.$$

Последний интеграл в правой части обращается в нуль, так как $\frac{\partial\Theta}{\partial n}|_\Sigma = 0$, а $y_N(x,t)$ – конечная комбинация собственных функций, нормальная производная которых обращается в нуль на границе. Тогда получаем

$$\iint\limits_{Q_T} y_N(x,t)\xi(x,t)dxdt = \int\limits_{\Omega}(\varphi\Theta_t' - \psi\Theta)_{t=0}dx +$$
$$+ \iint\limits_{Q_T}\sum_{n=0}^{N} f_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt,$$

поскольку

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) y_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N}\left(T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t)\right)X_n(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(t)X_n(x).$$

Рассмотрим теперь интеграл $\iint\limits_{Q_T} \sum\limits_{n=0}^{N} f_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt$. Имеем

$$\iint\limits_{Q_T} \sum_{n=0}^{N} f_n(t)X_n(x)\Theta(x,t)dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_T} X_n(x)\sum_{n=0}^{N} \int\limits_{\partial\Omega} X_n(\widetilde{x})P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}\sum_{i=0}^{\infty}\Theta_i(t)X_i(x)dxdt =$$

$$= \int\limits_0^T \left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}\Theta_i(t)\int\limits_{\Omega} X_n(x)X_i(x)dx \int\limits_{\partial\Omega} X_n(\widetilde{x})P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^T \sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)f_i(t)dt.$$

Используя ортогональность собственных функций, получим

$$\iint\limits_{Q_T} y_N(x,t)\xi(x,t)dxdt = \int\limits_{\Omega}\left(y_N\Theta'_t - (y_N)'_t\Theta\right)_{t=0}dx + \int\limits_0^T\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)f_i(t)dt.$$

С другой стороны,

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)f_i(t)dt = \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)\left(\int\limits_{\partial\Omega} X_i(\widetilde{x})P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}\right)dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\left(\sum_{i=0}^{N}\Theta_i(t)X_i(\widetilde{x})\right)P(\widetilde{x},t)d\sigma_{\widetilde{x}}dt = \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\Theta(\widetilde{x},t)P(\widetilde{x},t)d\Sigma.$$

Таким образом, доказано, что $y_N(x,t)$ сходится при $N\to+\infty$ в пространстве обобщенных функций к обобщенному решению задачи (1). Лемма доказана.

Данная лемма позволяет свести исходную задачу граничного управления системой (1) к задаче управления счетной системой осцилляторов (3).

Пусть управляющее воздействие P в системе (1) не зависит от переменной x, а зависят только от времени t. Покажем, что мембрану прямоугольной формы невозможно привести в состояние покоя для достаточно широкого класса начальных возмущений, в случае когда функция управления является квадратично интегрируемой на интервале $(0,T)$, где $T>0$ – произвольный конечный момент времени.

Пусть $T>0$ – заданный момент времени, a_1, a_2 – произвольные положительные числа, $P(t)$ – произвольная функция из пространства $L_2(0,T)$, φ_n,

ψ_n – как и прежде коэффициенты разложения функций φ и ψ в ряды Фурье по собственным функциям оператора Лапласа.

Теорема 1. *Пусть $\Omega = (0,a_1)\times(0,a_2)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – произвольные функции из пространств $H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ соответственно и функция $y(x,t)$ является решением задачи*

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T),\\
&y|_{t=0} = \varphi(x), \quad y'_t|_{t=0} = \psi(x),\\
&\frac{\partial y}{\partial n}|_\Sigma = P(t).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Тогда, если существует хотя бы один натуральный индекс n, такой что число

$$\lambda_n\varphi_n\cos(\lambda_n T) + \psi_n\sin(\lambda_n T)$$

отлично от нуля, то не существует такого момента времени T и такого управляющего воздействия $P(t)$, при которых функция $y(x,T)$ была бы равной нулю тождественно в области Ω.

Доказательство. Пусть начальные данные в задаче (4) выбраны так, что существует хотя бы один натуральный индекс n такой, что число $\lambda_n\varphi_n\cos(\lambda_n T) + \psi_n\sin(\lambda_n T)$ отлично от нуля. Предположим, что найдутся момент времени T и функция $P(t)$, при которых функция $y(x,T)$ была бы равной нулю тождественно в области Ω. Согласно лемме вопрос приведения в покой системы (4) эквивалентен задаче приведения в покой счетной системы осцилляторов (3).

Рассмотрим счетную систему дифференциальных уравнений (3) с заданными начальными условиями для всех натуральных индексов n. Заметим, что в данном случае функция P зависит только от переменной t. Запишем решения этих уравнений для всех натуральных индексов n:

$$T_n(t) = \lambda_n\varphi_n\cos(\lambda_n t) + \psi_n\sin(\lambda_n t) + \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_{\partial\Omega} X_n(x)d\sigma\int\limits_0^t P(s)\sin\lambda_n(t-s)ds.$$

Используя условия приведения каждого осциллятора в нулевое состояние в момент времени T, т.е. $T_n(T) = 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, получим систему равенств

$$0 = \lambda_n\varphi_n\cos(\lambda_n T) + \psi_n\sin(\lambda_n T) + \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_{\partial\Omega} X_n(x)d\sigma\int\limits_0^T P(s)\sin\lambda_n(T-s)ds. \tag{5}$$

Заметим, что собственные функции оператора Лапласа задачи Неймана в области $\Omega = (0,a_1)\times(0,a_2)$ имеют вид

$$X_{ij}(x_1,x_2) = \frac{2}{(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}}\cos\left(\frac{\pi i x_1}{a_1}\right)\cos\left(\frac{\pi j x_2}{a_2}\right), \quad i,j = 1,2,\ldots.$$

Исходя из явного вида собственных функций, нетрудно проверить, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} X_{ij}(x_1, x_2)d\sigma = 0$$

для любых индексов $i, j = 1, 2 \ldots$. Так как по условию теоремы найдется, по крайней мере, один натуральный индекс n такой, что число $\lambda_n \varphi_n \cos(\lambda_n T) + \psi_n \sin(\lambda_n T)$ отлично от нуля, то соответствующее этому индексу равенство в системе (5) оказывается невыполненным. Таким образом, получено противоречие. Теорема доказана.

Замечание 1. Применяя изложенное выше рассуждение, можно доказать, что мембрану круглой формы также невозможно остановить за конечное время равномерно распределенным по границе управлением.

Замечание 2. Аналогичные результаты можно получить для пластины прямоугольной и круглой форм. Постановка задачи управления для двумерной пластины, а также формулировка утверждения о том, что исходную задачу можно свести к исследованию управляемости счетной системы осцилляторов, содержатся в [6].

Рассмотрим задачу управления для мембраны произвольной формы. Пусть граничное управляющее воздействие в этом случае есть произведение двух функций, одна из которых зависит только от координат на плоскости и является фиксированной, а вторая зависит только от времени и является собственно управляющим воздействием:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0, T), \\
y|_{t=0} = \varphi(x), \quad y'_t|_{t=0} = \psi(x), \\
\frac{\partial y}{\partial n}|_{\Sigma} = f(x)P(t).
\end{gathered} \tag{6}$$

Докажем, что в этом случае для любой функции управления $P(t)$ найдутся такие начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, что систему (6) нельзя привести в покой за любое конечное время.

Как было сказано выше, по определению систему можно привести в состояние покоя, если для любых начальных условий можно найти управление, такое что соответствующее ему решение обратится в нуль за конечное время, причем данное решение должно остаться в нулевом состоянии в дальнейшем. Покажем, что решение задачи (6) нельзя привести в покой за любое конечное время.

Теорема 2. Пусть в задаче (6) $f(x)$ *– произвольная фиксированная функция из* $L_2(\Omega)$, *тогда существуют начальные данные* $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, *такие что для любой функции* $P(t)$ *из* $L_2(0, T)$ *решение задачи* (6) *невозможно привести в покой за любое время* T.

Доказательство. Предположим противное. Пусть φ и ψ – произвольные начальные данные в задаче (6) из пространств $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно. И пусть существуют такой момент времени $T > 0$ и такая функция $P(t)$, удовлетворяющая условиям теоремы, что решение задачи (6) можно привести в покой.

Из леммы следует, что систему (6) можно привести в состояние покоя за конечное время тогда и только тогда, когда можно успокоить колебания всех осцилляторов, заданных счетной системой дифференциальных уравнений (3). Введем обозначения:

$$u_n(t) = \alpha_n P(t), \quad \alpha_n = \int\limits_{\partial\Omega} X_n(x) f(x) d\sigma, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Определим числа:

$$b'_n(T) = \lambda_n \varphi_n \cos(\lambda_n T) + \psi_n \sin(\lambda_n T),$$
$$b''_n(T) = \lambda_n \varphi_n \sin(\lambda_n T) - \psi_n \cos(\lambda_n T), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Запишем решения уравнений (3) (для натуральных n) при условии, что управляющее воздействие имеет вид такой же, как в системе (6)

$$T_n(t) = \varphi_n \cos \lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_0^t u_n(s) \sin \lambda_n (t - s) ds, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Используя условия приведения системы в покой $T_n(T) = 0$, $T'_n(T) = 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, получим так называемую систему моментов

$$b'_n(T) = \alpha_n \int\limits_0^T P(s) \sin \lambda_n (s - T) ds, \quad n = 1, 2, \ldots ;$$
$$\text{(7)} \qquad b''_n(T) = \alpha_n \int\limits_0^T P(s) \cos \lambda_n (s - T) ds, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Если для какого-нибудь номера n число α_n равняется нулю, то очевидно найдутся такие начальные данные, что система (7) не будет иметь решения для любой функции $P(s)$ из $L_2(0, T)$. Эти начальные данные следует выбрать такими, чтобы, по крайней мере, одно из чисел $b'_n(T)$ или $b''_n(T)$ было не равно нулю.

Пусть теперь $\alpha_n \neq 0$ для любого номера n. Умножим первое уравнение системы (7) на мнимую единицу i и сложим его со вторым уравнением. Тогда, применяя формулу Эйлера, получим систему моментов

$$\text{(8)} \qquad \frac{b'_n(T) + b''_n(T)}{\alpha_n} e^{i\lambda_n T} = \int\limits_0^T P(s) e^{i\lambda_n s} ds, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Известно (см., например, [9]), что если $\{\mu_n\}$ – последовательность комплексных чисел, такая что $0 < |\mu_n| \le |\mu_{n+1}| \le \ldots$, $|\mu_n| \to +\infty$ при $n \to +\infty$, для которой существует число $\gamma > 1$ такое, что выполнено свойство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|\mu_n|^\gamma} = +\infty, \tag{9}$$

то система экспонент $\{e^{\mu_n t}\}$ является полной в $L_2(0,T)$ для любого $T > 0$. Известно также, что первый член асимптотики для собственных значений λ_n^2 двумерного оператора Лапласа равен Cn, где $C > 0$ – некоторая константа, зависящая от геометрии области Ω (см. [10]). Отсюда следует, что для последовательности положительных корней из собственных значений, умноженных на мнимую единицу, т.е. для $\{i\lambda_n\}$, выполнено свойство (9) (если положить $\mu_n = i\lambda_n$) при γ, равном, например, двум. Таким образом, система экспонент $\{e^{i\lambda_n s}\}$ является полной в $L_2(0,T)$ для любого $T > 0$. Заметим, что если из счетной системы $\{e^{i\lambda_n s}\}$ исключить любой элемент, то новая система останется полной в силу того, что по-прежнему будет выполнено свойство (9).

Так как по предположению начальные данные в (6) являются произвольными, то пусть $\psi \equiv 0$, а функция φ такая, что все ее коэффициенты Фурье φ_n равны нулю за исключением некоторого произвольного φ_k, равного 1. Тогда при всех натуральных $n \neq k$ уравнения из системы моментов (8) будут иметь вид

$$0 = \int_0^T P(s) e^{i\lambda_n s} ds, \quad n \neq k. \tag{10}$$

Если $n = k$, то

$$\frac{\cos(\lambda_k T) + \sin(\lambda_k T)}{\alpha_k} \lambda_k e^{i\lambda_k T} = \int_0^T P(s) e^{i\lambda_k s} ds. \tag{11}$$

Так как числа $\cos(\lambda_k T)$ и $\sin(\lambda_k T)$ при любом T одновременно в нуль не обращаются, то число в левой части уравнения (11) не равно нулю. В силу полноты системы экспонент $\{e^{i\lambda_n s}\}_{n\neq k}$ в $L_2(0,T)$ следует, что система уравнений (10) имеет единственное решение $P(s) \equiv 0$. Но из уравнения (11) следует, что $P(s)$ не может равняться нулю тождественно. Следовательно, система моментов (7) не имеет решения относительно выбранных начальных данных. Получили противоречие с исходным предположением. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lions J.L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30. No. 1. P. 1–68.
2. *Zuazua E.* Exact controllability of a vibrating plate model for an arbitrarily small time // C.R. Acad. Sci. A. 1987. V. 304. No. 7. P. 173–176.

3. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Физматлит, 1965.
4. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
5. *Романов И.В.* Точное управление колебаниями прямоугольной пластины с помощью граничных сил // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика. 2011. № 4. С. 49–53.
6. *Романов И.В.* Управление колебаниями пластины с помощью граничных сил // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика. 2011. № 2. С. 3–10.
7. *Романов И.В., Шамаев А.С.* Управление колебаниями мембран и пластин с помощью граничных сил // Докл. АН. Сер. Теория управления. 2011. Т. 438. № 3. С. 318–322.
8. *Олейник О.А.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ, 2005.
9. *Седлецкий А.М.* Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации // Совр. математика. Фундамент. направления. 2003. № 5. С. 3–152.
10. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: ГТТИ, 1933.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 02.04.2012