РАСЧЕТ РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА ТИПИЧНЫХ ОНЧ ХОРОВ В ОБЛАСТИ ИХ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Нещеткин Г.М.[1] , Беспалов П.А.[1,2] , Савина О.Н.[1]

[1] *НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород, Россия, gmneschetkin@edu.hse.ru*

[2] *ИПФ РАН, г. Нижний Новгород, Россия*

Введение

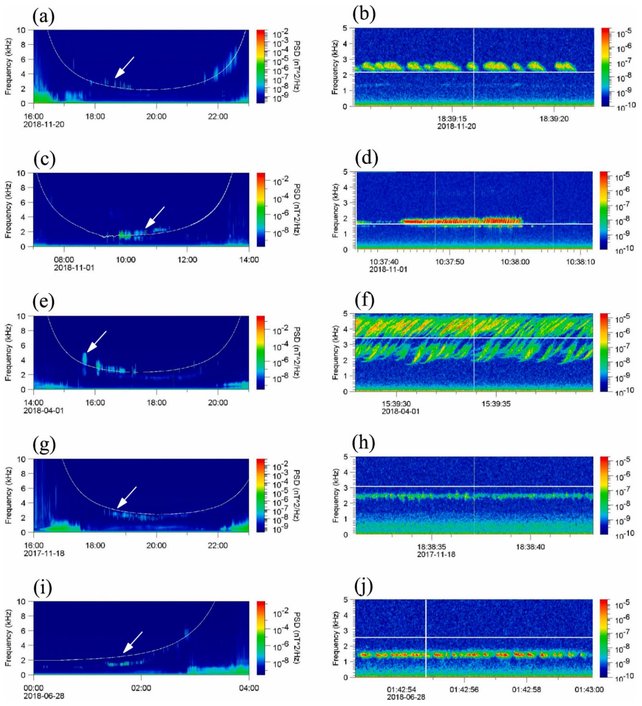
В работе мы проанализировали количественно степень сложности электромагнитных ОНЧ хоров, используя современный математический аппарат анализа волновой турбулентности. Из огромного набора данных наблюдений, накопленных при реализации миссии космических аппаратов Van Allen probe, были выбраны типичные примеры хоровых эмиссий, для которых доступны данные высокого разрешения. Для исключения влияния на результаты эффектов распространения в работе использовались данные, полученные в области возбуждения хоров вблизи локального минимума магнитного поля за пределами плазмосферы. В работе использован оригинальный код расчета размерности Хаусдорфа длинной числовой последовательности. Сложность расчета данной размерности компенсируется тем, что для нее доказаны важные теоремы, позволяющие сделать выводы об ограничениях математического описания изучаемого процесса. Во всех случаях размерность оказалось нецелой, что свидетельствует о сложной динамике системы. При расчетах отмечены скачки размерности, в том числе уменьшение ее вдвое в пределах всплеска хоров. Полученные результаты важны для подтверждения ВРА (beam pulse amplifier) механизма возбуждения хоров, для проверки достоверности численных симуляций и развития методов автоматической обработки данных наблюдений.

Электромагнитные излучения с хоровой структурой динамического спектра наблюдаются вблизи локальных минимумов магнитного поля и отличаются спектральной формой, представляющей последовательность из нескольких последовательных дискретных элементов с периодом менее 1 секунды. Как правило, спектрограммы хоровых излучений расположены в двух полосах частот, разделенных линией половинной гирочастоты электрона.

Мы рассмотрели пять типичных примеров хоров, в двух из которых хоры расположены преимущественно в верхней полосе частот, в одном - в обеих полосах частот и два примера излучений из нижней полосы частот.

Для анализа процесса с высоким разрешением по времени использовались измерения B_U составляющей магнитного поля в UVW системе координат. Высокое разрешение обеспечивают измерительные приборы, которые производят около 35 тысяч измерений в секунду.

Исследуемые случаи



Алгоритм вычисления размерности Хаусдорфа

Согласно общей теории, для экспериментального определения размерности Хаусдорфа достаточно проанализировать зависимость от времени одной из переменных, участвующих в процессе. Процесс, пригодный для анализа, характеризуется плавной, дифференцируемой и неповторяющейся зависимостью от времени. Данные с космического аппарата Van Allen probe A с периодической оцифровкой и высокой частотой дискретизации позволяют подобрать оптимальный материал для анализа.

Для определения размерности Хаусдорфа, необходимо реконструировать исходное фазовое пространство рассматриваемой системы. Предлагается m-размерное Евклидово пространство, размерность которого должна быть значительно больше ожидаемого значения размерности. Выбрав $B_U^1, B_U^2, B_U^3, \dots$ последовательные, регулярно разнесенные во времени измерения магнитного поля, мы формируем векторы следующего вида:

$$u^i = \left[B_U^i, B_U^{i+1}, \dots, B_U^{i+m-1}\right]$$

Определим общее число таких векторов как N.

Для определения размерности Хаусдорфа необходимо определить число точек в реконструированном пространстве, расстояние между которыми не превышает параметра r. Такая корреляционная сумма записывается в виде:

$$C(m,r) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (1 - \delta_{ij}) H(r - |u^i - u^j|)$$

Где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}, H(\varsigma) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sgn}(\varsigma)),$$

$|u^i - u^j| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (u_k^i - u_k^j)^2}$ - норма Евклида.

Тогда искомая размерность определяется следующим образом:

$$\dim = \lim_{N \to \infty} \lim_{r \to 0} \frac{|\log C(m,r)|}{|\log(r)|}$$

В нашей работе, для больших N ($5.2 \cdot 10^4 < N < 1.25 \cdot 10^6$) мы строим зависимости $|\log(C(m,r))|$ от $|\log(r)|$ для r от 0.999 до 0.001 с шагом (-0.001). Мы выбираем такое большое значение m, при котором угол наклона кривых на этом графике стабилизируется. Коэффициент угла наклона такой кривой мы принимаем за оценку размерности Хаусдорфа. Для корректного покрытия даже малых фрагментов сигнала значение m были выбраны порядка нескольких сотен.

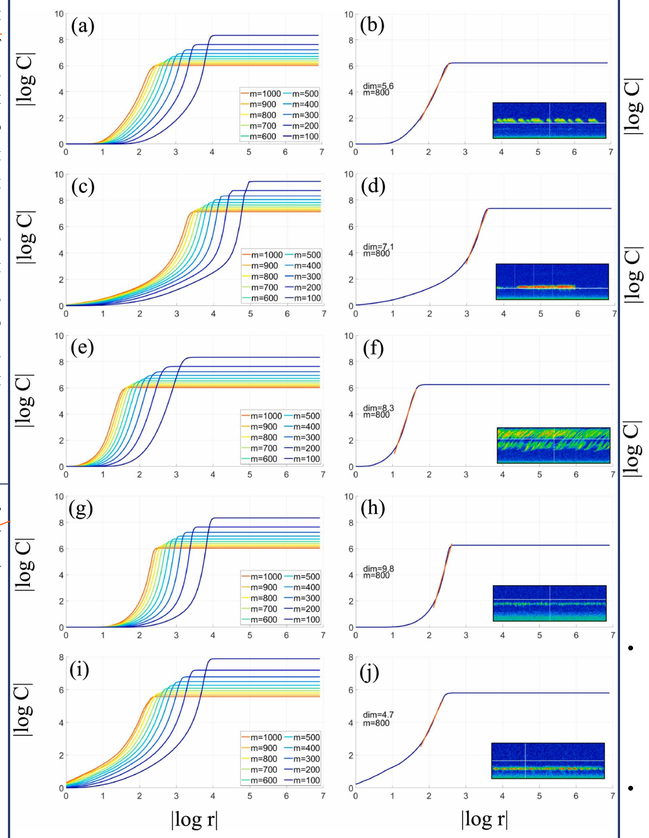
dim=4.7

Разработанный код был протестирован на численной последовательности аттрактора Эно, размерность которой известна и равна 1.261. Мы получили близкое с точностью до сотых значение

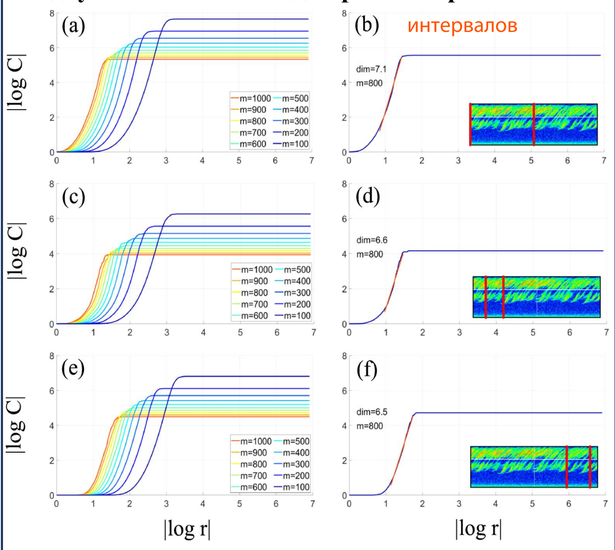
Наименьшее значение размерности мы получили для одного из примеров хоров в нижней полосе частот (4.7), в то время как для хоров так же из нижней полосы частот, но ближе к линии гирочастоты, мы получили значение размерности близкое к 10 (9.8). Для верхней полосы частот получены значения 5.6 (практически все элементы спектрограммы выше линии половинной гирочастоты) и 7.1 (хоры преимущественно в верхней полосе, есть редкие элементы в нижней). Для хоров в обеих полосах частот размерность равна 8.3.

Для хоров в обеих полосах частот и преимущественно в верхней полосе частот мы провели дополнительный анализ – вычислили значение размерности, варьируя рассматриваемый временной интервал.

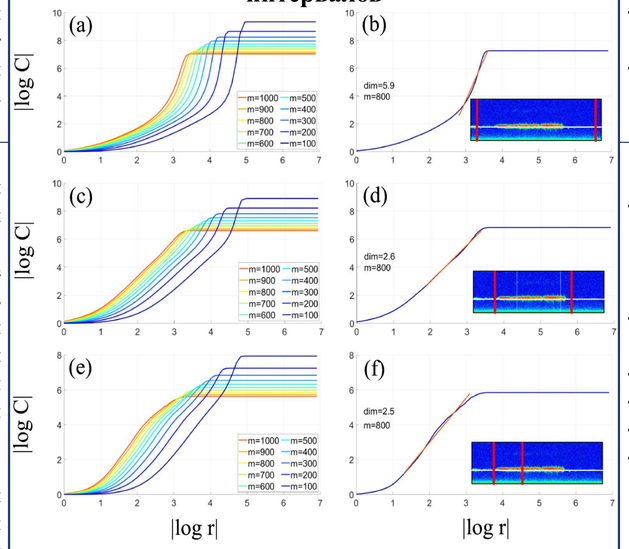
Результаты расчета размерности Хаусдорфа



Расчет размерности хоров преимущественно в двух полосах частот для разных временных интервалов



Расчет размерности хоров преимущественно в верхней полосе частот для разных временных интервалов



Заключение

- Мы получили значение размерности Хаусдорфа для нескольких типичных примеров электромагнитных излучений с хоровой структурой динамического спектра. Во всех случаях размерность оказалась нецелой, что указывает на сложную природу наблюдаемого явления.
- Результаты показали, что размерность хоров невелика и для аналитического описания этих эмиссий не требуется большого числа переменных и нелинейных автономных дифференциальных уравнений.
- Установлен пример хоровых излучений, для описания которых требуется только 3 уравнения.
- Установлен интервал изменения размерности (2,10), который позже был проверен и на других примерах.
- Обнаружены скачки размерности при изменении временного интервала.
- Полученные результаты хорошо согласуются с выводами теории, основанной на ВРА (Beam Pulse Amplifier) механизме возбуждения хоров.

Список литературы

- Bespalov P.A., Savina O.N., Neshchetkin G.M. Hausdorf dimension of electromagnetic chorus emissions in their excitation region according to Van Allen probe data. Results in Physics, 2022, v. 35, article id. 105295. https://doi.org 10.1016/j.rinp.2022.105295.
- Bell TF., Inan US., Haque N., Pickett JS. Geophys Res Lett, 36 (11) (2009), p. L11101.
- Eckman JP., Ruelle D. Rev Modern Phys, 57 (3) (1985), pp. 617-656.
- Takens F. Lect Notes Math, 898 (1981), pp. 366-381.
- Henon M. Comm Math Phys, 50 (1) (1976), pp. 69-77.
- http://emfisis.physics.uiowa.edu/Flight/

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда по проекту № 20-12-00268